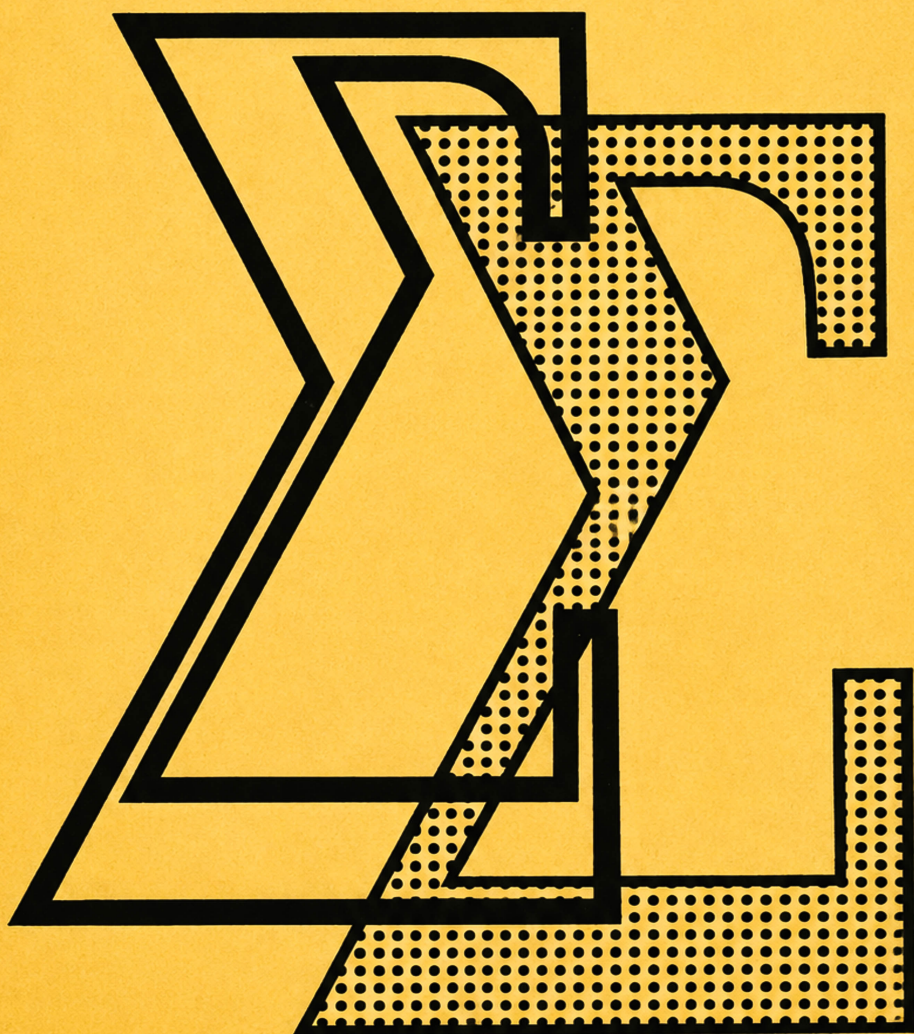


**КРАТКИЙ
КУРС
ВЫСШЕЙ
МАТЕМАТИКИ**



**В. Е. ШНЕЙДЕР,
А. И. СЛУЦКИЙ,
А. С. ШУМОВ**

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

**Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших технических
учебных заведений**



**ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА — 1972**

Шнейдер В. Е. и др.

Ш76 Краткий курс высшей математики. Учеб. пособие
для втузов. М., «Вышш. школа», 1972.
640 с. с илл.
Перед загл. авт.: Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И.,
Шумов А. С.

Данное учебное пособие предназначено для студентов вечерних факультетов втузов и заводов-втузов. Оно в основном охватывает весь материал, предусмотренный обязательной программой. Достаточное количество решенных примеров и задач способствует лучшему усвоению теоретического материала.

Рецензенты: кафедра высшей математики МВТУ им. Баумана и ст. преп. А. П. Сильванович.

2—2—3
50—72

517

Шнейдер Владимир Евгеньевич
Слуцкий Александр Исахарович
Шумов Александр Сергеевич

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Редактор В. А. Подольский. Редактор издательства А. М. Суходский. Художник Л. К. Макарова. Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор В. А. Орлова,

Сдано в набор 2/VIII-1971 г. Подп. к печати 9/XI-1971 г. Формат 60×90/16. Объем 40 печ. л. Уч.-изд. л. 33,72. Изд. № ФМ.—392
Тираж 93.000 экз. Цена 1 р. 04 к.

План выпуска литературы для вузов и техникумов издательства «Высшая школа» на 1972 г. Позиция № 50. Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14, Издательство «Высшая школа»

Ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Москва, М-54, Валовая, 28. Зак. 2242

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

Глава I. Метод координат. Понятие функции

§ 1. Действительные числа. Координаты точки на прямой	4
1. Понятие действительного числа (4). 2. Геометрическое изображение действительных чисел. Координаты точки на прямой (5). 3. Абсолютная величина действительного числа (6). 4. Расстояние между двумя точками на прямой (8).	
§ 2. Координаты на плоскости и в пространстве	8
1. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости. Метод координат (8). 2. Расстояние между двумя точками на плоскости (10). 3. Деление отрезка в данном отношении (10). 4. Координаты точки в пространстве (12). 5. Расстояние между двумя точками в пространстве (13).	
§ 3. Угол между двумя осями. Полярные координаты	14
1. Угол между двумя осями (14). 2. Полярные координаты (15). 3. Зависимость между декартовыми и полярными координатами (17).	
§ 4. Функциональная зависимость	18
1. Переменные величины (18). 2. Понятие функции (19). 3. График функции (21). 4. Способы задания функций (22). 5. Основные элементарные функции и их графики (24). 6. Сложные функции. Элементарные функции (26). 7. Целые и дробно-рациональные функции (27). 8. Функции четные и нечетные. Периодические функции (28).	
§ 5. Уравнение линии	30
1. Определение линии с помощью уравнения (30). 2. Нахождение уравнения линии по ее геометрическим свойствам (32).	
§ 6. Преобразование координат	34
1. Параллельный перенос осей координат (34). 2. Поворот осей координат (35).	

Глава II. Аналитическая геометрия на плоскости

§ 1. Прямая	37
1. Угол между двумя прямыми (37). 2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом (37). 3. Уравнение прямой, параллельной оси ординат (39). 4. Общее уравнение прямой и его частные случаи (40). 5. Точка пересечения прямых. Построение прямой по ее уравнению (41). 6. Вычисление угла между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (42). 7. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении (44). 8. Пучок прямых (45). 9. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (46). 10. Расстояние от точки до прямой (47).	
§ 2. Кривые второго порядка	49
1. Определение кривой второго порядка (49). 2. Окружность (50). 3. Эллипс (51). 4. Гипербола (55). 5. Парабола (59). 6. Окружность, эллипс, гипербола и парабола как конические сечения (61). 7. Упрощение уравнения кривой второго порядка. График квадратного трехчлена (62). 8. Уравнение равносторонней гиперболы, оси которой приняты за оси координат (63). 9. График дробно-линейной функции (64). 10. Преобразование уравнения кривой второго порядка, не содержащего члена с произведением координат (65).	

Глава III. Элементы векторной и линейной алгебры

§ 1. Элементы теории определителей	68
1. Определители второго порядка и их свойства (68). 2. Определители третьего порядка (69). 3. Понятие об определителях высших порядков (73).	
§ 2. Системы уравнений первой степени	74
1. Система двух уравнений с двумя неизвестными (74). 2. Однородная система двух уравнений первой степени с тремя неизвестными (77). 3. Система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными (78). 4. Однородная система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными (81).	
§ 3. Элементы векторной алгебры	81
1. Скалярные и векторные величины (81). 2. Линейные операции над векторами (83). 3. Угол между двумя векторами (86). 4. Проекция вектора на ось и составляющая вектора по оси (86). 5. Разложение вектора на составляющие по осям координат (89). 6. Направляющие косинусы вектора (91). 7. Условие коллинеарности двух векторов (92). 8. Скалярное произведение (92). 9. Выражение скалярного произведения через проекции перемножаемых векторов (95). 10. Косинус угла между двумя векторами (96). 11. Векторное произведение (96). 12. Выражение векторного произведения через проекции перемножаемых векторов (99). 13. Смешанное произведение трех векторов (101). 14. Геометрический смысл смешанного произведения (102). 15. Условие компланарности трех векторов (102).	
§ 4. Матрицы и действия над ними	104
1. Понятие о матрице (104). 2. Равенство матриц. Действия над матрицами (105). 3. Обратная матрица (109). 4. Матричная запись и матричное решение системы уравнений первой степени (112).	
§ 5. Линейные отображения	114
1. Основные понятия (114). 2. Преобразование координат (117). 3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (121). 4. Упрощение общего уравнения кривой второго порядка (126).	

Глава IV. Аналитическая геометрия в пространстве

§ 1. Плоскость	129
1. Уравнение поверхности (129). 2. Нормальный вектор плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку (130). 3. Общее уравнение плоскости и его частные случаи (131). 4. Построение плоскости по ее уравнению (133). 5. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей (134). 6. Точка пересечения трех плоскостей (136).	
§ 2. Прямая в пространстве	137
1. Уравнения линии в пространстве (137). 2. Общие уравнения прямой (137). 3. Векторное уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой (138). 4. Канонические уравнения прямой (139). 5. Уравнения прямой, проходящей через две точки (142). 6. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых (142).	
§ 3. Прямая и плоскость в пространстве	144
1. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости (144). 2. Точка пересечения прямой с плоскостью (145). 3. Расстояние от точки до плоскости (147). 4. Пучок плоскостей (147).	
§ 4. Поверхности второго порядка	149
1. Сфера (149). 2. Цилиндрические поверхности (150). 3. Конические поверхности (152). 4. Поверхность вращения (153). 5. Эллипсоид (155). 6. Гиперboloиды (156). 7. Параболоиды (159).	

Глава V. Теория пределов

§ 1. Предел функции	162
1. Предел функции при $x \rightarrow +\infty$ (162). 2. Предел функции при $x \rightarrow -\infty$ (165). 3. Предел функции при $x \rightarrow x_0$ (166). 4. Бесконечно малые функ-	

ции. Ограниченные функции (168). 5. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми функциями (172). 6. Основные теоремы о пределах (174). 7. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$ (180). 8. Последовательность. Число e (182). 9. Натуральные логарифмы (188). 10. Сравнение бесконечно малых функций (188).	
§ 2. Непрерывные функции	191
1. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва (191). 2. Операции над непрерывными функциями. Непрерывность элементарных функций (195). 3. Свойства функций, непрерывных на сегменте (198). 4. Понятие об обратной функции (200). 5. Обратные тригонометрические функции (203). 6. Показательная и логарифмическая функции (205). 7. Понятие о гиперболических функциях (205).	
Глава VI. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	
§ 1. Производная	207
1. Приращение аргумента и приращение функции (207). 2. Определение непрерывности функции с помощью понятий приращения аргумента и приращения функции (208). 3. Задачи, приводящие к понятию производной (208). 4. Определение производной и ее механический смысл (210). 5. Дифференцируемость функции (211). 6. Геометрический смысл производной (212). 7. Производные некоторых основных элементарных функций (214). 8. Основные правила дифференцирования (217). 9. Производная обратной функции (220). 10. Производные обратных тригонометрических функций (220). 11. Производная сложной функции (221). 12. Производные гиперболических функций (223). 13. Производная степенной функции с любым показателем (224). 14. Сводная таблица формул дифференцирования (224). 15. Неявные функции и их дифференцирование (225). 16. Уравнения касательной и нормали к кривой (227). 17. Графическое дифференцирование (228).	
§ 2. Производные высших порядков	230
1. Нахождение производных высших порядков (230). 2. Механический смысл второй производной (231).	
§ 3. Дифференциал функции	232
1. Дифференциал функции и его геометрический смысл (232). 2. Производная как отношение дифференциалов (235). 3. Дифференциал суммы, произведения и частного функций (235). 4. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала (235). 5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям (236). 6. Дифференциалы высших порядков (239).	
§ 4. Функции, заданные параметрически, и их дифференцирование	240
1. Параметрическое задание функций и линий (240). 2. Дифференцирование функций, заданных параметрически (243).	
§ 5. Векторная функция скалярного аргумента	245
1. Параметрические уравнения пространственной кривой (245). 2. Векторная функция скалярного аргумента и ее производная (246). 3. Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой (248). 4. Механический смысл первой и второй производных векторной функции скалярного аргумента (250).	
§ 6. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях	252
1. Теорема Ферма (252). 2. Теорема Ролля (253). 3. Теорема Лагранжа (254). 4. Правило Лопиталя (256).	
§ 7. Приложение производной к исследованию функций и построению графиков	259
1. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции (259). 2. Максимум и минимум функции (262). 3. Достаточный признак существования экстремума, основанный на знаке второй производной (266). 4. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции (268). 5. Применение теории максимума и минимума к решению задач (269). 6. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки	

	перегиба (270). 7. Асимптоты графика функции (273). 8. Общая схема исследования функции и построение ее графика (276).	
§ 8.	Приближенное решение уравнений	280
	1. Нахождение грубо приближенных значений корней графическим методом (281). 2. Уточнение найденных значений корней методом хорд и касательных (281).	
§ 9.	Интерполяционная формула Лагранжа	286

Глава VII. Неопределенный интеграл

§ 1.	Неопределенный интеграл и его свойства	289
	1. Понятия первообразной и неопределенного интеграла (289). 2. Геометрический смысл неопределенного интеграла (291). 3. Таблица основных интегралов (293). 4. Основные свойства неопределенного интеграла (294).	
§ 2.	Основные методы интегрирования	295
	1. Интегрирование методом разложения (295). 2. Интегрирование методом замены переменной (296). 3. Интегрирование по частям (299).	
§ 3.	Интегрирование рациональных функций	302
	1. Некоторые сведения о многочленах (302). 2. Рациональные дроби. Выделение правильной рациональной дроби (304). 3. Интегрирование простейших рациональных дробей (305). 4. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби (308). 5. Метод неопределенных коэффициентов (309). 6. Интегрирование рациональных дробей (312).	
§ 4.	Интегрирование тригонометрических функций	313
	1. Интегралы вида $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$, где m и n — целые числа (313). 2. Рациональные функции двух переменных (315). 3. Интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x) \, dx$ (316).	
§ 5.	Интегрирование некоторых иррациональных функций	318
	1. Интегралы вида $\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) \, dx$ (318). 2. Интеграл вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} \, dx$ (320). 3. Интегралы видов $\int \sqrt{a^2-x^2} \, dx$ и $\int \sqrt{x^2+m} \, dx$ (321). 4. Интегралы вида $\int R(x; \sqrt{Ax^2+Bx+C}) \, dx$, где $R(x; \sqrt{Ax^2+Bx+C})$ — рациональное выражение относительно x и $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ (322).	
§ 6.	Общие замечания о методах интегрирования. Интегралы, не берущиеся в элементарных функциях	324
	1. Общие замечания (324). 2. Понятие об интегралах, не берущихся в элементарных функциях (324).	

Глава VIII. Определенный интеграл

§ 1.	Задачи, приводящие к определенному интегралу	325
	1. Задача о площади (325). 2. Задача о работе переменной силы (327).	
§ 2.	Определенный интеграл	329
	1. Интегральная сумма. Определенный интеграл (329). 2. Свойства определенного интеграла (332). 3. Производная интеграла по переменной верхней границе (337). 4. Формула Ньютона-Лейбница (339). 5. Замена переменной в определенном интеграле (341).	
§ 3.	Геометрические и физические приложения определенного интеграла	345
	1. Вычисление площади в декартовых координатах (345). 2. Вычисление площади в полярных координатах (348). 3. Вычисление объема тела по известным поперечным сечениям (350). 4. Объем тела вращения (353). 5. Длина дуги кривой (354). 6. Дифференциал дуги (358).	

7. Площадь поверхности вращения (360). 8. Общие замечания о решении задач методом интегральных сумм (362).	
§ 4. Кривизна плоской кривой	365
1. Основные определения (365). 2. Вычисление кривизны (366). 3. Радиус кривизны. Круг кривизны. Центр кривизны (368). 4. Эволюта и эвольвента (370).	
§ 5. Несобственные интегралы	372
1. Интегралы с бесконечными границами (372). 2. Интегралы от разрывных функций (375). 3. Признаки сходимости несобственных интегралов (379).	
§ 6. Приближенные методы вычисления определенных интегралов	381
1. Общие замечания. Постановка вопроса (381). 2. Метод трапеций (381). 3. Метод параболических трапеций (метод Симисона) (384).	

Глава IX. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

§ 1. Функции нескольких переменных	389
1. Функция двух переменных и ее область определения (389). 2. График функции двух переменных (392). 3. Функции трех и большего числа переменных (393).	
§ 2. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность функции. Точки разрыва	395
1. Основные определения (395). 2. Непрерывность функции нескольких переменных (397). 3. Понятие области (397). 4. Точки разрыва (398). 5. Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области (399).	
§ 3. Частные производные	400
1. Частные производные первого порядка (400). 2. Геометрический смысл частных производных функций двух переменных (402). 3. Частные производные высших порядков (403).	
§ 4. Полный дифференциал функции нескольких переменных	405
1. Полное приращение функции (405). 2. Полный дифференциал функции (406). 3. Приложение полного дифференциала к приближенным вычислениям (409).	
§ 5. Дифференцирование сложных и неявных функций	413
1. Дифференцирование сложных функций (413). 2. Инвариантность формы полного дифференциала (416). 3. Дифференцирование неявных функций (417).	
§ 6. Скалярное поле	419
1. Скалярное поле и его геометрическое изображение (419). 2. Производная по направлению (421). 3. Градиент (424). 4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности (427). 5. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных (430).	
§ 7. Экстремум функции двух переменных	430
1. Необходимые и достаточные условия существования экстремума (430). 2. Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных (433).	

Глава X. Кратные и криволинейные интегралы

§ 1. Двойной интеграл	435
1. Задачи, приводящие к двойному интегралу (435). 2. Двойной интеграл. Теорема существования (437). 3. Свойства двойного интеграла (440). 4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах (441). 5. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах (448). 6. Приложения двойного интеграла (453).	
§ 2. Тройной интеграл	460
1. Задача о массе (460). 2. Тройной интеграл и его свойства (461). 3. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах (463). 4. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах (466). 5. Приложения тройного интеграла (468).	

§ 3. Криволинейный интеграл	472
1. Векторное поле (472). 2. Задача о работе. Криволинейный интеграл (473). 3. Вычисление криволинейного интеграла (476). 4. Формула Остроградского—Грина (481). 5. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования (483). 6. Отыскание первообразной по полному дифференциалу (487). 7. Криволинейный интеграл по длине дуги (493).	

Глава XI. Ряды

§ 1. Числовые ряды	495
1. Основные определения (495). 2. Геометрическая прогрессия (497). 3. Простейшие свойства числовых рядов (498). 4. Необходимый признак сходимости ряда (499). 5. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов (501). 6. Знакопеременные ряды (508). 7. Остаток ряда и его оценка (512).	
§ 2. Функциональные ряды	516
1. Область сходимости функционального ряда (516). 2. Правильно сходящиеся функциональные ряды и их свойства (517).	
§ 3. Степенные ряды	519
1. Область сходимости степенного ряда (519). 2. Свойства степенных рядов (522). 3. Ряды по степеням разности $x-a$ (524). 4. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора (525). 5. Разложение некоторых элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена (529).	
§ 4. Приложения рядов к приближенным вычислениям	536
1. Вычисление значений функций с помощью рядов (536). 2. Приближенное вычисление интегралов (538).	
§ 5. Понятие о функции комплексной переменной. Степенные ряды в комплексной области	540
1. Понятие о функции комплексной переменной (540). 2. Числовые ряды с комплексными членами (542). 3. Степенные ряды в комплексной области (543).	
§ 6. Ряды Фурье	546
1. Периодические процессы и периодические функции (546). 2. Ряд Фурье (547). 3. Сходимость ряда Фурье (549). 4. Ряды Фурье для четных и нечетных функций (552). 5. Разложение в ряд Фурье функций с периодом $2l$ (555).	

Глава XII Дифференциальные уравнения

§ 1. Дифференциальные уравнения первого порядка	561
1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям, и некоторые общие понятия (561). 2. Дифференциальные уравнения первого порядка (563). 3. Уравнения с разделяющимися переменными (568). 4. Однородные уравнения (571). 5. Линейные уравнения (572). 6. Уравнение в полных дифференциалах (575). 7. Особые решения (576). 8. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера (578).	
§ 2. Дифференциальные уравнения второго порядка	580
1. Основные понятия (580). 2. Простейшие уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка (582). 3. Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков (587).	
§ 3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	589
1. Определение и общие свойства (589). 2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка (590). 3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка (593). 4. Метод вариации произвольных постоянных (595).	
§ 4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	597
1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (597). 2. Линейные неоднородные диф-	

ференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (600). 3. Приложение линейных дифференциальных уравнений второго порядка к изучению механических и электрических колебаний (607).

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков	612
1. Определения и общие свойства (612). 2. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами (613)	
§ 6. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов . .	616
§ 7. Понятие о системах дифференциальных уравнений	617
1. Общие понятия (617). 2. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (621).	
Приложение 1. Интерполяционная формула Ньютона	624
1. Разности и их свойства (624). 2. Интерполяционная формула Ньютона (626). 3. Численное дифференцирование (629).	
Приложение 2. Метод наименьших квадратов.	631

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый читателю «Краткий курс высшей математики» предназначен для студентов вечерних факультетов втузов и заводов-втузов. Он в основном охватывает весь материал, предусмотренный обязательной программой. Этот курс возник в результате многолетней работы авторов со студентами-вечерниками и студентами заводов-втуза.

Несмотря на небольшой объем книги, авторы стремились изложить материал по возможности строго и доступно. В каждом разделе курса приведено достаточное количество решенных задач и примеров, поясняющих и закрепляющих теоретический материал. Кроме того, чтобы избежать формального введения основных понятий, предварительно рассматривались геометрические и физические задачи, естественно приводящие к этим понятиям.

При изложении отдельных тем курса авторы следовали методике, отраженной в более полных учебниках (например, в курсах математического анализа А. Ф. Берманта и И. Г. Арамановича или Н. С. Пискунова). Методика изложения этих тем проверена многолетней практикой преподавания и менять ее вряд ли целесообразно.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность сотрудникам кафедры высшей математики МВТУ им. Баумана и в особенности доценту этой кафедры С. В. Фролову, а также старшему преподавателю Минского высшего радиотехнического училища А. П. Сильвановичу за тщательное рецензирование рукописи и критические замечания, которые способствовали ее улучшению.

Кроме того, авторы выражают благодарность редактору книги доценту В. А. Подольскому и редактору издательства А. М. Суходскому, проделавшим большую работу по редактированию рукописи.

Авторы

ГЛАВА I

МЕТОД КООРДИНАТ.

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ НА ПРЯМОЙ

1. Понятие действительного числа

В настоящем курсе нам все время придется иметь дело с действительными числами. Напомним основные сведения о действительных числах, которые мы считаем известными читателю из курса математики средней школы. Множество* действительных чисел состоит из всех рациональных и всех иррациональных чисел. *Рациональным числом* называется число вида $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, причем $n \neq 0$. В частности, всякое целое число m может быть представлено в виде $\frac{m}{1}$ и, следовательно, является рациональным числом. *Иррациональным числом* называется действительное число, которое нельзя представить в виде отношения двух целых чисел.

К необходимости введения понятия иррационального числа приводит рассмотрение многих задач, в частности — задачи измерения длин некоторых отрезков (например, длины диагонали квадрата со стороной, равной единице). Как известно, всякое рациональное число $\frac{m}{n}$ либо является целым, либо представляется конечной или периодической бесконечной десятичной дробью. Иррациональное же число представляется непериодической бесконечной десятичной дробью. Например, рациональные числа $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{3}$ представляются следующими десятичными дробями:

$$\frac{3}{4} = 0,75; \quad \frac{1}{3} = 0,333 \dots = 0,(3).$$

Иррациональные числа $\sqrt{2}$ и π представляются непериодическими бесконечными десятичными дробями:

$$\sqrt{2} = 1,414 \dots; \quad \pi = 3,14159 \dots$$

* Понятие *множества* или совокупности является одним из основных математических понятий. Примерами множеств могут служить совокупность студентов данного вуза, множество страниц данной книги, множество всех четных чисел и т. д. Из приведенных примеров следует, что множество может содержать конечное или бесконечное количество предметов или, как говорят, *элементов*. В первом случае множество называется *конечным*, во втором — *бесконечным*.

Запись действительных чисел с помощью десятичных дробей позволяет каждое иррациональное число заменить близким к нему рациональным числом. Это близкое рациональное число называется *рациональным приближением* данного иррационального числа. В качестве рационального приближения берут конечную десятичную дробь, у которой первые n цифр после запятой совпадают с первыми n цифрами после запятой данного иррационального числа, а все остальные цифры заменены нулями. Ошибка при этой замене не превосходит, очевидно, $\frac{1}{10^n}$. Так, например, рациональным приближением числа $\pi = 3,14159 \dots$, отличающимся от него не более, чем на $\frac{1}{100}$, будет рациональное число $3,14$: $\pi \approx 3,14$. В инженерных расчетах арифметические действия над иррациональными числами заменяются соответствующими действиями над их рациональными приближениями.

Заметим, что практически для получения приближенного результата достаточно во всех вычислениях брать на один знак больше, чем требуется, а затем округлить полученный результат до нужного числа знаков. Например, при вычислении суммы $\pi + \sqrt{3}$ с точностью до $0,01$ получим

$$\pi + \sqrt{3} \approx 3,142 + 1,732 = 4,874 \approx 4,87.$$

Подробное изложение теории действительных чисел читатель найдет, например, в курсе дифференциального и интегрального исчисления Г. М. Фихтенгольца (т. I, гл. I).

2. Геометрическое изображение действительных чисел. Координаты точки на прямой

Действительные числа можно изображать точками числовой оси.

Числовой осью называется прямая, на которой выбраны начальная точка (начало), положительное направление (отмеченное на чертеже стрелкой) и отрезок, длина которого считается равной единице (единица масштаба) (рис. 1). Направление, противоположное положительному направлению числовой оси, называется отрицательным. Если действительное число $x > 0$, то оно изображается точкой числовой оси, находящейся от начала на расстоянии x в положительном направлении; если $x < 0$, то точка оси, изображающая x , лежит в отрицательном направлении от начала на расстоянии, равном $-x$ (при x отрицательном $-x > 0$); число нуль изображается начальной точкой оси.

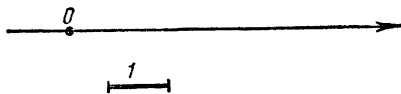


Рис. 1

Действительное число x называется *координатой* той точки M числовой оси, которая его изображает. Условимся писать $M(x)$ в том случае, когда x является координатой точки M .

На рис. 2, а отмечены точки $M_1(1)$, $M_2(-2)$, $M_3\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $M_4(\lg 2)$ числовой оси, изображающие соответственно действительные числа 1 , -2 , $\frac{\pi}{2}$, $\lg 2$. Очевидно, каждому действительному числу x соответствует единственная точка M числовой оси, и, наоборот, каждой точке M этой оси соответствует единственное действительное число x — координата этой точки. Как говорят, между множеством всех действительных чисел и множеством точек числовой оси существует

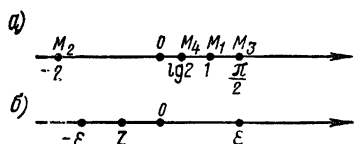


Рис. 2

взаимно однозначное соответствие. Поэтому в дальнейшем часто вместо слов «дано число x » будут употребляться слова «дана точка x ». Кроме того, точка на числовой прямой часто будет обозначаться ее координатой.

Множество действительных чисел является упорядоченным. Это значит, что два любых не равных между собой действительных числа x_1 и x_2 удовлетворяют одному и только одному из двух неравенств: $x_1 > x_2$ или $x_1 < x_2$.

На горизонтально расположенной оси с положительным направлением слева направо точки, соответствующие большему действительным числам, лежат правее точек, соответствующих меньшим числам.

Отметим также, что множество действительных чисел является плотным, т. е. обладает следующим свойством: между любыми двумя не равными друг другу действительными числами находится бесконечно много других действительных чисел. Это значит, что если (для определенности) $x_1 < x_2$, то существует бесконечное множество чисел x , больших x_1 , но меньших x_2 : $x_1 < x < x_2$.

3. Абсолютная величина действительного числа

Абсолютной величиной (модулем) действительного числа x называется само это число, если $x \geq 0$, или число $-x$, если $x < 0$. Абсолютная величина действительного числа x обозначается символом $|x|$. Таким образом:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Так, например, $|2| = 2$, $|\pi| = \pi$, $|0| = 0$, $|-3| = -(-3) = 3$. Модуль любого действительного числа либо положителен (если число не равно нулю), либо равен нулю (если само число равно нулю). Отсюда следует, что любое действительное число не больше своего модуля, т. е.

$$x \leq |x|.$$

Равенство будет иметь место при $x \geq 0$, а неравенство при $x < 0$ (так как в последнем случае число x отрицательно, а его модуль положителен).

Исходя из определения абсолютной величины действительного числа, легко выяснить ее геометрический смысл: абсолютная величина действительного числа x равна расстоянию точки $M(x)$ от начала. Например, точка $M_1(1)$ (см. рис. 2, а) находится от начала на расстоянии, равном $|1|=1$, точка $M_2(-2)$ — на расстоянии, равном $|-2|=2$, и т. д.

Пользуясь геометрическим смыслом абсолютной величины, легко установить, что при любом $\varepsilon > 0$ неравенство $|z| < \varepsilon$ равносильно неравенствам $-\varepsilon < z < \varepsilon$.

Действительно, неравенство $|z| < \varepsilon$ означает, что точка отстоит от начала на расстоянии, меньшем ε , т. е. $-\varepsilon < z < \varepsilon$ (рис. 2, б). Обратно, если $-\varepsilon < z < \varepsilon$, то точка z находится от начала на расстоянии, меньшем ε , а это значит, что $|z| < \varepsilon$.

Абсолютные величины действительных чисел обладают свойствами, изложенными в следующих теоремах.

Теорема 1. Абсолютная величина суммы двух действительных чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел:

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|.$$

Доказательство. Предположим вначале, что $x_1 + x_2 \geq 0$. Тогда $|x_1 + x_2| = x_1 + x_2$. Но $x_1 \leq |x_1|$ и $x_2 \leq |x_2|$. Следовательно, $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$.

Предположим теперь, что $x_1 + x_2 < 0$. В этом случае $|x_1 + x_2| = -(x_1 + x_2) = -x_1 - x_2$. Но $-x_1 \leq |-x_1| = |x_1|$ и $-x_2 \leq |-x_2| = |x_2|$. Отсюда $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$.

Замечание. Теорему 1 можно обобщить на случай любого конечного числа слагаемых.

Теорема 2. Абсолютная величина разности двух действительных чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел:

$$|x_1 - x_2| \geq |x_1| - |x_2|.$$

Доказательство. Так как $x_1 = (x_1 - x_2) + x_2$, то по теореме 1 получим $|x_1| = |(x_1 - x_2) + x_2| \leq |x_1 - x_2| + |x_2|$, откуда $|x_1 - x_2| \geq |x_1| - |x_2|$.

Теорема 3. Абсолютная величина произведения нескольких действительных чисел равна произведению абсолютных величин этих чисел:

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \dots \cdot |x_n|.$$

Теорема 4. Абсолютная величина частного двух действительных чисел равна частному абсолютных величин этих чисел:

$$\left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \frac{|x_1|}{|x_2|}.$$

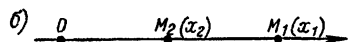
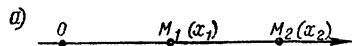
Теоремы 3 и 4 непосредственно следуют из определения абсолютной величины и действий умножения и деления.

Замечание. В дальнейшем, как правило, будут рассматриваться числа действительные. Поэтому для краткости они часто будут просто называться числами. Если же потребуются рассмотреть комплексные числа, то всякий раз будет сделана особая оговорка.

4. Расстояние между двумя точками на прямой

С помощью координат уже сейчас можно решать некоторые геометрические задачи. Найдем, например, расстояние между двумя точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ на прямой (на числовой оси).

Предположим сначала, что обе координаты неотрицательны, причем $x_2 > x_1$ (рис. 3, а). Тогда $OM_1 = x_1$, $OM_2 = x_2$ и, следовательно, искомое расстояние $d = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1$. Если по-прежнему x_1 и x_2 неотрицательны, но $x_2 < x_1$ (рис. 3, б), то $d = x_1 - x_2$.



Очевидно, в обоих случаях можно записать

$$\text{Рис. 3} \qquad d = |x_2 - x_1|. \qquad (1)$$

Нетрудно убедиться, что в случаях, когда обе координаты x_1 и x_2 неположительны или когда x_1 и x_2 имеют разные знаки, формула (1) сохраняет свою силу.

Пример 1. Найти расстояние между точками $M_1(-0,8)$ и $M_2(3, 2)$.

Решение. По формуле (1) получим

$$d = |3,2 - (-0,8)| = 3,2 + 0,8 = 4.$$

§ 2. КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости. Метод координат

Как было показано, положение точки на прямой определяется одним числом — координатой этой точки. Положение точки на плоскости определяется уже двумя числами.

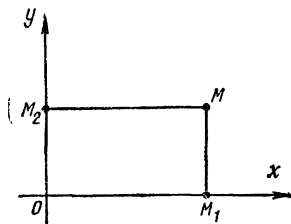


Рис. 4

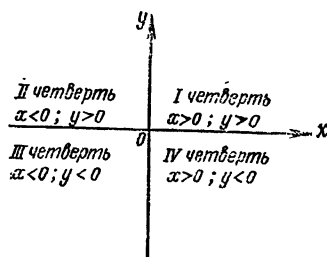


Рис. 5

Действительно, пусть на плоскости заданы две взаимно перпендикулярные числовые оси Ox и Oy , имеющие общее начало O (совпадающее с точкой пересечения осей) и общую единицу масштаба (рис. 4).

Плоскость, в которой расположены оси Ox и Oy , назовем *координатной плоскостью* и обозначим Oxy . Рассмотрим произвольно выбранную точку M координатной плоскости Oxy и пусть M_1 и

M_2 —проекция точки M соответственно на оси Ox и Oy . Координата x точки M_1 на оси Ox называется *абсциссой* точки M , а координата y точки M_2 на оси Oy —*ординатой* точки M . Рассматриваемые совместно числа x и y называются *прямоугольными* (или декартовыми) *координатами* точки M *.

Очевидно, каждой точке M на координатной плоскости соответствует единственная упорядоченная пара чисел x и y —ее прямоугольные координаты. Обратно, каждая пара чисел x и y определяет единственную точку M на плоскости Oxy . Действительно, числам x и y соответствуют вполне определенные точки M_1 и M_2 на осях Ox и Oy . Перпендикуляры к осям, составленные в этих точках, пересекутся в единственной точке M с координатами x и y .

В дальнейшем, если будет сказано «дана точка» или «найти точку» на плоскости, то это будет соответственно означать, что заданы или требуется найти координаты этой точки.

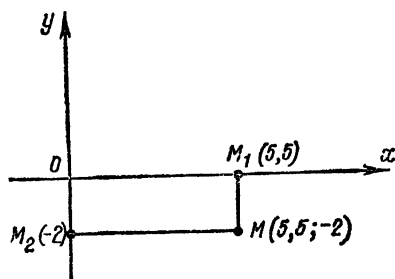


Рис. 6

Ось Ox называется *осью абсцисс*, ось Oy —*осью ординат*, а обе оси вместе—*осями координат*. Общее начало осей абсцисс и ординат называется *началом координат*.

Оси Ox и Oy делят координатную плоскость на четыре части, называемые *четвертями* (рис. 5). В I четверти $x > 0$, $y > 0$; во II четверти $x < 0$, $y > 0$; в III четверти $x < 0$, $y < 0$; в IV четверти $x > 0$, $y < 0$.

Условимся в дальнейшем писать $M(x; y)$ в том случае, когда x является абсциссой, а y —ординатой точки M . Например, запись $M(1; -2)$ означает, что точка M имеет абсциссу 1 и ординату (-2) .

Пример. Построить на плоскости точку $M(5, 5; -2)$.

Решение. Строим на оси абсцисс точку M_1 по ее координате 5,5, а на оси ординат—точку M_2 , имеющую координату (-2) . Проводим через точку M_1 прямую, перпендикулярную оси Ox , а через точку M_2 —прямую, перпендикулярную оси Oy . Точка M пересечения этих прямых и есть искомая (рис. 6).

Итак, положение точки на плоскости определяется упорядоченной парой чисел—координатами этой точки. Ниже мы увидим, что положение точки в пространстве определяется тремя числами. Способ определения положения точек с помощью чисел называется *методом координат*. Создателем координатного метода был французский математик Декарт, который прилагал этот метод ко многим геометрическим задачам и создал новую математическую дисциплину—*аналитическую геометрию*, занимающуюся изучением свойств геометрических фигур и их взаимного расположения методами алгебры. Простейшие задачи аналитической геометрии рассмотрены в п. 2, 3,

* По имени французского математика и философа Рене Декарта (1596—1650).

4 и 5. Основные разделы аналитической геометрии изложены в гл. II и IV. В дальнейшем метод координат получил широкое развитие и нашел применение во многих областях математики и механики.

В следующих пунктах мы рассмотрим применение метода координат к решению некоторых геометрических задач.

2. Расстояние между двумя точками на плоскости

Пусть даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Требуется найти расстояние между ними.

Предположим вначале, что отрезок M_1M_2 не параллелен ни одной из координатных осей (рис. 7). Проведем через точку M_1 прямую, параллельную оси Ox , а через точку M_2 — прямую, параллельную оси Oy и отметим точку N пересечения этих прямых. Треугольник M_1M_2N — прямоугольный. По теореме Пифагора

$$M_1M_2^2 = M_1N^2 + NM_2^2.$$

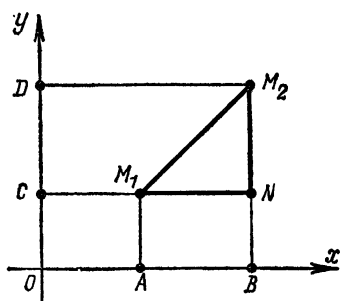


Рис. 7

Пусть A и B — проекции точек M_1 и M_2 на ось Ox , а C и D — проекции тех же точек на ось Oy . Тогда $M_1N = AB = |x_2 - x_1|$; $NM_2 = CD = |y_2 - y_1|$. Обозначая искомое расстояние M_1M_2 через d , получим

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Следовательно,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2)$$

В частности, расстояние d точки $M(x; y)$ от начала координат находится по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3)$$

Формула (2) остается справедливой и в случае, когда отрезок M_1M_2 параллелен одной из осей.

Пример. Найти расстояние между точками $M_1(2; -1)$ и $M_2(-1; 3)$.
Решение. По формуле (2) получим

$$d = \sqrt{(-1 - 2)^2 + [3 - (-1)]^2} = 5.$$

3. Деление отрезка в данном отношении

Разделить отрезок M_1M_2 в данном отношении $\lambda > 0$ это значит найти на заданном отрезке такую точку M , для которой имеет место равенство

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda.$$

Пусть точки M_1 и M_2 имеют соответственно координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 . Найдем координаты x, y точки M . Обозначим через N_1, N и N_2 проекции точек M_1, M и M_2 на ось Ox (рис. 8). Из элементарной геометрии известно, что отрезки, заключенные между параллельными прямыми, пропорциональны. Следовательно,

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{N_1N}{NN_2} = \lambda.$$

Но $N_1N = |x - x_1|$, $NN_2 = |x_2 - x|$, поэтому $\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \lambda$. В этом отношении модули $|x - x_1|$ и $|x_2 - x|$ можно заменить разностями $x - x_1$ и $x_2 - x$, если учесть, что эти разности имеют одинаковые знаки (см. рис. 8, а, на котором обе разности положительны, и рис. 8, б, на котором они отрицательны). Таким образом,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

Отсюда

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Аналогично можно получить соответствующее выражение и для y .

Окончательно, для координат x и y искомой точки M получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{aligned} \quad (4)$$

В частности, для координат середины отрезка M_1M_2 ($\lambda = 1$) получим формулы:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, каждая из координат середины отрезка равна среднему арифметическому соответствующих координат его концов.

Пример. Разделить отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$, если $M_1(1; 2)$, $M_2(3; 4)$.

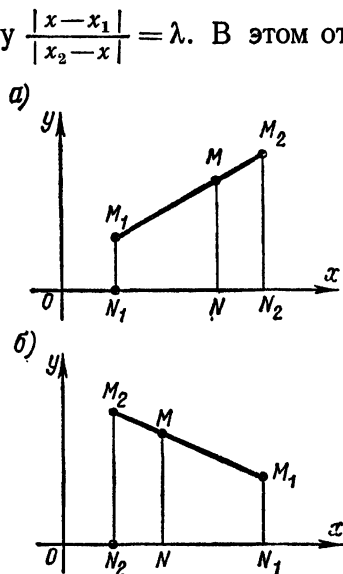


Рис. 8

Решение. Так как $x_1=1$, $y_1=2$, $x_2=3$ и $y_2=4$, то по формулам (4) получим:

$$x = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3};$$

$$y = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{3}.$$

Таким образом, искомой оказалась точка $M\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

З а м е ч а н и е. При решении задачи о делении отрезка в данном отношении мы предполагали, что этот отрезок M_1M_2 — направленный, т. е. имеющий начало M_1 и конец M_2 . Если сохранить численное значение λ , а точки M_1 и M_2 поменять местами, то точка $\bar{M}$, делящая отрезок M_2M_1 в отношении λ , не будет, вообще говоря, совпадать с прежней точкой M , делившей в отношении λ отрезок M_1M_2 . Например, точкой, делящей в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$ отрезок M_2M_1 , имеющий начало $M_2(3; 4)$ и конец $M_1(1; 2)$, будет уже не точка $M\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$, а точка $\bar{M}(\bar{x}; \bar{y})$, координаты которой находятся следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{3 + \frac{1}{2} \cdot 1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{3};$$

$$\bar{y} = \frac{4 + \frac{1}{2} \cdot 2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{10}{3}.$$

4. Координаты точки в пространстве

Покажем, что положение точки в пространстве можно определить тремя числами.

Рассмотрим три взаимно перпендикулярные оси в пространстве Ox , Oy и Oz , имеющие общее начало O (точку пересечения осей) и общую масштабную единицу (рис. 9). Назовем эти оси *координатными осями*, а их общее начало — *началом координат*. Пространство, в котором заданы оси Ox , Oy и Oz , обозначим символом $Oxyz$. Пусть M — произвольно выбранная точка пространства $Oxyz$. Проведем через нее три плоскости, перпендикулярные координатным осям. Точки M_1 , M_2 и M_3 пересечения этих плоскостей с осями Ox , Oy и Oz называются проекциями точки M на соответствующие оси. Пусть точка M_1 на оси Ox имеет координату x , точка M_2 на оси Oy — координату y и точка M_3 на оси Oz — координату z . Числа x , y и z называются *прямоугольными* (а также *декартовыми*) *координатами* точки M

в пространстве. При этом x называется *абсциссой*, y —*ординатой*, а z —*аппликатой* точки M . Такие же названия носят и координатные оси: ось Ox называется *осью абсцисс*, ось Oy —*осью ординат*, ось Oz —*осью аппликат*.

Очевидно, каждая точка M пространства определяет единственную упорядоченную тройку чисел x , y и z —ее координаты. Обратно, положение точки M в пространстве $Oxyz$ вполне определяется тремя ее декартовыми координатами. Поэтому в дальнейшем, если будет

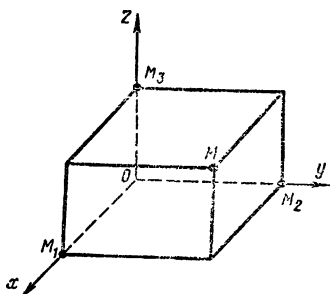


Рис. 9

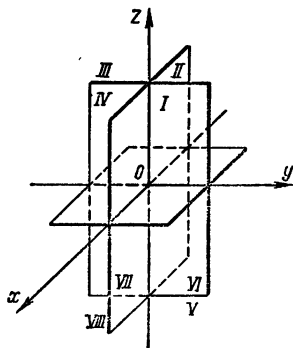


Рис. 10

сказано «дана точка» или «требуется найти точку», то это будет соответственно означать, что даны или требуется найти координаты этой точки.

Если через каждую пару координатных осей провести плоскость, то получатся три взаимно перпендикулярные плоскости Oxy , Oyz и Oxz , называемые *координатными плоскостями*. Они делят пространство на восемь частей—октантов (рис. 10): в I октанте $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$; во II октанте $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$; в III октанте $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$; в IV октанте $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$; в V октанте $x > 0$, $y > 0$, $z < 0$; в VI октанте $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$; в VII октанте $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$; в VIII октанте $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$. В дальнейшем запись $M(x; y; z)$ будет означать, что точка M имеет абсциссу x , ординату y и аппликату z .

5. Расстояние между двумя точками в пространстве

С помощью координат в пространстве, как и на плоскости, можно решать многие геометрические задачи. Рассмотрим одну из них.

Пусть требуется найти расстояние между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ в пространстве.

Проведем через каждую из точек M_1 и M_2 по три плоскости, параллельные координатным плоскостям (рис. 11). Эти шесть плоскостей, пересекаясь, образуют прямоугольный параллелепипед, диагональю которого является отрезок M_1M_2 . Из стереометрии известно, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда

равен сумме квадратов трех его ребер, выходящих из одной вершины. Поэтому

$$M_1M_2^2 = M_1N^2 + M_1P^2 + M_1Q^2.$$

Спроектировав концы ребер M_1N , M_1P и M_1Q параллелепипеда соответственно на оси Ox , Oy и Oz , получим на этих осях отрезки AB , CD и EF , причем

$$M_1N = AB = |x_2 - x_1|,$$

$$M_1P = CD = |y_2 - y_1|,$$

$$M_1Q = EF = |z_2 - z_1|.$$

Следовательно, квадрат искомого расстояния d

$$d^2 = M_1M_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2,$$

или

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

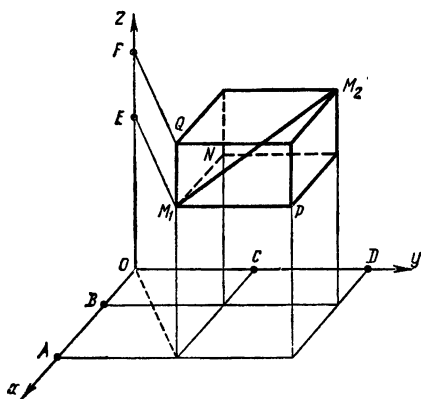


Рис. 11

Отсюда окончательно получим

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (6)$$

Пример. Найти расстояние d между точками $M_1(-1; 2; -3)$ и $M_2(1; 1; -5)$.

Решение. По формуле (6) получим

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{[1 - (-1)]^2 + (1 - 2)^2 + [-5 - (-3)]^2} = \\ &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3. \end{aligned}$$

§ 3. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ОСЯМИ. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

1. Угол между двумя осями

Рассмотрим в плоскости P две оси l_1 и l_2 , пересекающиеся в точке O . Углом между осью l_1 и осью l_2 называется угол, на который следует повернуть в плоскости P ось l_1 относительно точки O до ее совпадения с осью l_2 . При этом предполагается, что на плоскости P выбрано положительное направление вращения (против часовой стрелки). При повороте оси l_1 в положительном направлении угол считают положительным, а при повороте в противоположном направлении — отрицательным. Таким образом, существенным является порядок, в котором рассматриваются оси. Обозначим символом $(\widehat{l_1, l_2})$ угол между осями l_1 и l_2 . Тогда этот угол и угол $(\widehat{l_2, l_1})$ не равны друг другу. Значение угла между двумя пересекающимися осями определяется неоднозначно. В самом деле, если после поворота на угол φ ось l_1 совпала с осью l_2 , то можно совершить

еще несколько полных оборотов в любом направлении, после чего ось l_1 опять совпадет с осью l_2 . Таким образом, для угла $(\widehat{l_1, l_2})$, кроме φ , получится еще бесконечно много значений вида $\varphi + 2k\pi$, где k может быть любым целым числом. В дальнейшем, если это специально не оговорено, под углом между двумя осями мы будем понимать его наименьшее положительное значение.

2. Полярные координаты

В п. 1 § 2 рассматривались прямоугольные декартовы координаты точки на плоскости. Однако можно построить много других систем координат, позволяющих определить положение каждой точки плоскости с помощью двух действительных чисел. Наиболее употребительной после декартовой системы координат является *полярная система координат*.

Рассмотрим на плоскости ось l (т. е. прямую, имеющую начало, положительное направление и масштабную единицу) (рис. 12). Назовем эту ось *полярной осью*, а ее начало O — *полюсом*.

Пусть M — любая точка плоскости, не совпадающая с полюсом. Проведем через эту точку и полюс ось l_1 , начало которой совпадает с полюсом; положительное направление выбрано от полюса к точке M , а масштабная единица — та же, что и на полярной оси.

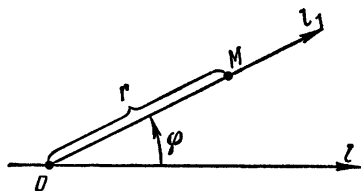


Рис. 12

(В частном случае, если точка M лежит на положительной части полярной оси, то ось l_1 совпадает с полярной осью l , если же точка M лежит на отрицательной части полярной оси, то оси l_1 и l имеют противоположные направления.) Обозначим координату точки M на оси l_1 через r и назовем ее *полярным радиусом* точки M . Угол $(\widehat{l, l_1})$ между полярной осью и осью l_1 обозначим через φ и назовем его *полярным углом* точки M . Для данной точки M угол определяется неоднозначно (с точностью до слагаемого вида $2k\pi$, где k — любое целое число). В дальнейшем, если не будет специально оговорено, из всех этих значений выберем то, которое удовлетворяет условию

$$0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Тогда каждой точке плоскости, не совпадающей с полюсом, будет соответствовать вполне определенное и единственное значение полярного угла φ . Полярный радиус r для такой точки также имеет вполне определенное значение, он всегда положителен (так как положительное направление на оси l_1 выбирается от полюса O к точке M) и равен *расстоянию* этой точки от полюса. Обратно, если мы знаем, что точка M имеет полярный угол φ и полярный радиус r , то мы можем построить эту точку. Для этого достаточно провести через полюс ось l_1 под углом φ к полярной оси l и построить на оси l_1 точку, имеющую координату r .

Таким образом, полярный угол φ и полярный радиус r любой точки M плоскости, за исключением полюса, вполне определяют положение этой точки на плоскости. Числа φ и r называются *полярными координатами* точки M . Полюс находится в особом положении. Для него ось l_1 не имеет определенного направления и, следовательно, полярный угол не существует. Полярный радиус полюса равен нулю, и эта единственная координата вполне определяет положение полюса.

Условимся писать $M(\varphi; r)$ в том случае, когда φ является полярным углом, а r — полярным радиусом точки M .

Пример 1. Построить в полярной системе координат точки

$$M_1\left(\frac{\pi}{4}; 2\right), M_2(\pi; 1), M_3(0; 3) \text{ и } M_4\left(\frac{3\pi}{2}; 2\right).$$

Решение. Для построения первой точки проводим ось l'_1 под углом $\frac{\pi}{4}$ к полярной оси l (рис. 13) и отмечаем на этой оси точку M_1

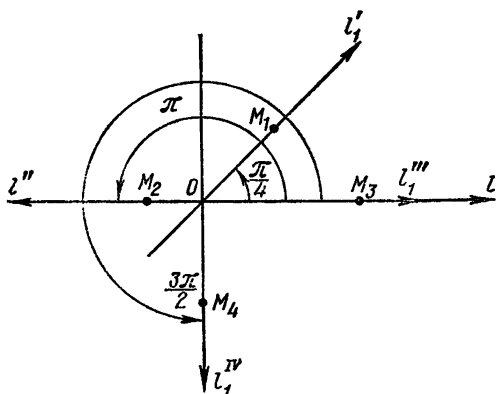


Рис. 13

с координатой 2. Остальные точки строятся аналогично: проводятся оси l''_1 , l'''_1 и l^{IV}_1 , образующие с полярной осью соответственно углы π , 0 и

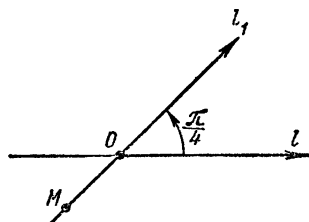


Рис. 14

$\frac{3\pi}{2}$, а затем на оси l''_1 строится точка M_2 с координатой 1, на оси l'''_1 — точка M_3 с координатой 3 и на оси l^{IV}_1 — точка M_4 с координатой 2.

З а м е ч а н и е. Положительное направление оси l_1 выбрано нами от полюса к точке M . В некоторых случаях положительным направлением оси l_1 удобнее считать противоположное направление, от точки M к полюсу. Тогда полярный радиус r точки M будет, очевидно, отрицательным. Обратно, если задано отрицательное значение полярного радиуса r точки M , то это значит, что положительное направление оси l_1 выбрано от точки M к полюсу.

Пример 2. Построить в полярной системе координат точку $M\left(\frac{\pi}{4}; -2\right)$.

Решение. Проводим ось l_1 под углом $\varphi = \frac{\pi}{4}$ к полярной оси (рис. 14) и строим на оси l_1 точку M с отрицательной координатой $r = -2$.

3. Зависимость между декартовыми и полярными координатами

Иногда приходится одновременно пользоваться декартовыми и полярными координатами на плоскости. При этом естественно поставить следующие две взаимно обратные задачи.

1. Зная полярные координаты φ и r точки M , найти ее декартовы координаты x и y .

2. Зная декартовы координаты x и y точки M , найти ее полярные координаты φ и r .

Решение этих задач зависит от взаимного расположения полярной оси и осей декартовой системы. Мы рассмотрим лишь частный случай, когда полярная ось совпадает с осью абсцисс декартовой системы (и, следовательно, полюс совпадает с началом координат декартовой системы). При этом предполагается, что все три оси — полярная ось и оси Ox и Oy — имеют общую единицу масштаба.

Исходя из определения тригонометрических функций $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, получим (рис. 15):

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

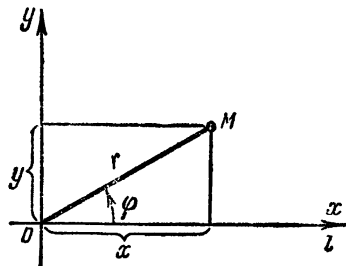


Рис. 15

Формулы (7) выражают декартовы координаты точки через ее полярные координаты. Чтобы выразить полярные координаты через декартовы, возведем обе части каждого из равенств (7) в квадрат, а затем сложим полученные равенства почленно:

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi),$$

или

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Отсюда

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (8)$$

Поделив почленно второе равенство (7) на первое, получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (9)$$

Равенство (8) выражает полярный радиус r через декартовы координаты. Равенство (9) позволяет, зная декартовы координаты, найти тангенс полярного угла. Однако найденному значению $\operatorname{tg} \varphi$ соответствуют два значения φ (при условии $0 \leq \varphi < 2\pi$). Из этих двух значений полярного угла φ выбирается то, при котором удовлетворяются равенства (7).

Пример. Зная декартовы координаты $x = \sqrt{3}$ и $y = 1$ точки M , найти ее полярные координаты.

Решение. По формуле (8) находим

$$r = \sqrt{(V\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2.$$

По формуле (9) получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{V\sqrt{3}} = \frac{V\sqrt{3}}{3}.$$

Этому значению тангенса соответствуют два значения φ : $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ и $\varphi_2 = \frac{7\pi}{6}$. Равенства (7) в данном случае запишутся так:

$$V\sqrt{3} = 2 \cos \varphi, \quad 1 = 2 \sin \varphi.$$

Они удовлетворяются только для первого значения φ . Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Таким образом, точка M имеет полярные координаты $\varphi = \frac{\pi}{6}$ и $r = 2$.

§ 4. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

1. Переменные величины

Человеку постоянно приходится встречаться с различными физическими величинами, такими, например, как объем, плотность, длина, время, давление, температура и т. д. Все эти величины, качественно отличаясь друг от друга, имеют, однако, то общее свойство, что каждая из них может быть измерена. В результате измерений получаются действительные числа, которые мы будем называть численными значениями соответствующих величин. При измерениях одной и той же величины могут получиться различные численные значения, если эта величина измеряется, скажем, в различные моменты времени или при различных условиях. Например, скорость движения автомобиля на различных участках пути или в различные моменты времени имеет различные численные значения. Точно так же давление некоторой массы газа в замкнутом сосуде имеет различные численные значения при различных температурах. Одним словом, численные значения величины могут изменяться, и поэтому сама величина называется переменной. В математике отвлекаются от конкретного физического смысла величин и считают *переменную величину* (короче — переменную) *заданной, если известно множество всех численных значений, которые она может принимать*. Постоянную величину (т. е. величину, которая при рассматриваемых условиях не меняет своего численного значения) принято рассматривать как частный случай переменной, когда множество ее численных значений состоит из одного числа. Численные значения переменной величины образуют некоторое множество действительных чисел. Ему соответствует некоторое множество точек на числовой оси. Оба эти множества могут быть самыми различными (в зависимости от рассматриваемой переменной). Но в дальнейшем чаще всего нам придется иметь дело с множествами чисел, которые называются *сегментом и интервалом*.

Определение 1. *Интервалом называется множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам*

$$a < x < b,$$

где a и b —действительные числа.

Определение 2. *Сегментом называется множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам*

$$a \leq x \leq b,$$

где a и b —действительные числа.

Интервал обозначается символом (a, b) , а сегмент—символом $[a, b]$. При этом a и b называются концами соответствующего интервала или сегмента. Например, интервал $(2, 5)$ состоит из всех чисел x , удовлетворяющих неравенствам $2 < x < 5$. В частности, точки $x=3$, $x=4$ принадлежат интервалу $(2, 5)$, в то время как точки $x=2$, $x=5$, $x=8$ этому интервалу не принадлежат.

Часто приходится рассматривать также множества чисел, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$. Каждое из этих множеств называется *полуинтервалом* или *полусегментом* и обозначается соответственно $[a, b)$ или $(a, b]$.

Каждый из введенных терминов будет относиться не только к данному множеству чисел, но и к соответствующему ему множеству точек на числовой прямой. Так, сегменту $[a, b]$ геометрически соответствует отрезок числовой оси с концами в точках a и b , а интервалу (a, b) —тот же отрезок с удаленными концами a и b . Сегмент $[a, b]$ получится, если к интервалу (a, b) присоединить его концы—точки a и b .

В некоторых случаях рассматриваются бесконечные интервалы и полуинтервалы. Приведем определяющие их неравенства и соответствующие обозначения:

$x > a$, обозначение $(a, +\infty)$;

$x \geq a$, обозначение $[a, +\infty)$;

$x < b$, обозначение $(-\infty, b)$;

$x \leq b$, обозначение $(-\infty, b]$.

Всю числовую ось можно также рассматривать как бесконечный интервал, который обозначается символом $(-\infty, +\infty)$.

2. Понятие функции

При совместном рассмотрении двух переменных величин часто оказывается, что численные значения одной из них зависят от численных значений другой. Например, площадь квадрата зависит от длины его стороны. Если через x обозначить длину стороны квадрата, а через y —его площадь, то эта зависимость выражается формулой

$$y = x^2.$$

Отметим два обстоятельства.

1. Нам известно множество численных значений, которые может принимать x , это — множество всех положительных чисел. В самом деле, x выражает длину стороны квадрата и, следовательно, не может быть отрицательным числом или нулем. С другой стороны, мы вправе рассматривать любой квадрат, и, следовательно, x может быть любым положительным числом.

2. Если x изменяется, то изменяется и y , но по определенному закону: каждому значению x соответствует определенное и единственное значение y .

Говорят, что площадь квадрата является функцией длины его стороны.

Рассмотрим еще один пример. Пусть материальная точка движется прямолинейно с постоянной скоростью v см/сек из пункта A и через T сек достигает пункта B . Путь s , пройденный точкой к моменту t этого движения, можно найти по формуле

$$s = vt.$$

Здесь s является функцией t .

Опять отметим, что

1) известно, какие численные значения может принимать t :

$$0 \leq t \leq T;$$

2) каждому из этих значений t соответствует единственное значение s .

Обобщая эти примеры, приходим к следующему определению.

Определение. *Переменная y называется функцией переменной x , если:*

1) задано множество M численных значений x ;

2) задан закон, по которому каждому значению x из этого множества соответствует единственное численное значение y .

При этом x называется *независимой переменной* или *аргументом*. Если y является функцией x , то говорят, что между x и y существует *функциональная зависимость*.

Определение. *Множество всех значений аргумента данной функции называется областью определения (или областью задания) этой функции.*

В первом из рассмотренных выше примеров областью определения функции $y = x^2$ являлся бесконечный интервал $(0, +\infty)$. Во втором примере областью определения функции $s = at$ был сегмент $[0, T]$.

Тот факт, что y есть функция переменной x , записывается символически следующим образом:

$$y = f(x)$$

(читается: « y есть эф от x »).

При рассмотрении какого-нибудь частного значения функции $y = f(x)$, т. е. значения, которое она принимает при заданном численном значении $x = x_0$, пишут $f(x_0)$ или $y|_{x=x_0}$.

Например, если $y = x^2$, то $y|_{x=\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Аналогично, если

$$f(x) = \sin x, \text{ то } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Кроме буквы f для обозначения функций употребляются и другие буквы, например: $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$, $y = y(x)$. Точно так же не обязательно функция и ее аргумент должны обозначаться буквами y и x , вполне возможно обозначать их и другими буквами.

3. График функции

Во многих случаях свойства функций становятся более ясными и наглядными, если эту функцию изобразить графически, т. е. построить ее график.

Определение. Графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости Oxy , для каждой из которых абсцисса x является значением аргумента, а ордината y — соответствующим значением данной функции.

График функции можно, вообще говоря, строить по отдельным его точкам. Пусть, например, функция $y = f(x)$ задана на сегменте $[a, b]$. Выберем между a и b ряд близких значений аргумента и составим таблицу

x	$x_0 = a$	x_1	x_2	$\dots$	$x_n = b$
y	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

в которой поместим выбранные значения аргумента x и соответствующие им значения функции y . С помощью этой таблицы построим точки $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $\dots$, $M_n(x_n; y_n)$ и соединим их плавной кривой*. Эта кривая и является приближенным графиком данной функции (рис. 16).

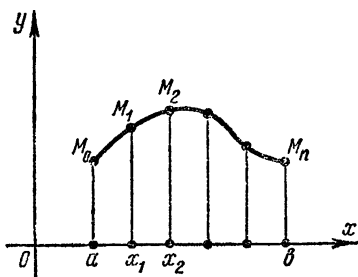


Рис. 16

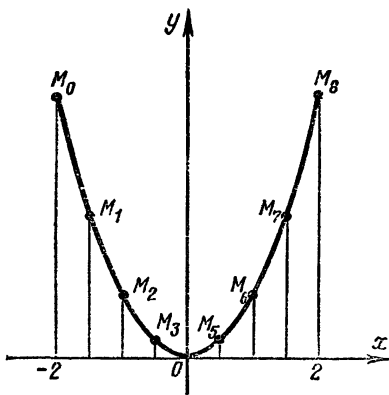


Рис. 17

Пример. Построить график функции, заданной формулой $y = x^2$, при условии $-2 \leq x \leq 2$.

* Говоря о плавности кривой, мы подразумеваем, что эта кривая нигде не прерывается, т. е. малым изменениям абсцисс соответствуют малые изменения ординат точек кривой. Плавность графика функции тесно связана с понятием непрерывности функции, которое подробно рассматривается в гл. V, § 2.

Решение. Составим таблицу

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

и построим точки $M_0(-2; 4)$, $M_1(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4})$, $M_2(-1; 1)$, $M_3(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$, $M_4(0; 0)$, $M_5(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$, $M_6(1; 1)$, $M_7(\frac{3}{2}; \frac{9}{4})$ и $M_8(2; 4)$. Соединив эти точки плавной линией, получим искомый график (рис. 17).

4. Способы задания функций

Функции могут быть заданы самыми различными способами. Однако, наиболее часто встречаются следующие три способа задания функций: аналитический, табличный и графический.

Аналитический способ задания функции. При аналитическом способе задания функция определяется с помощью аналитического выражения, т. е. с помощью формулы, указывающей, какие действия надо совершить над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции.

В п. 2 и 3 мы уже встречались с функциями, заданными с помощью формул, т. е. аналитически. При этом в п. 2 для функции $y = x^2$ область определения $(0, +\infty)$ была установлена, исходя из геометрических соображений, а для функции $s = at$ область задания $[0, T]$ была указана в условии. В п. 3 для функции $y = x^2$ область определения $[-2, 2]$ также задавалась по условию. Однако очень часто функция задается только с помощью аналитического выражения (формулы), без каких-либо дополнительных условий. В таких случаях под областью определения функции мы будем понимать совокупность всех тех значений аргумента, для которых это выражение имеет смысл и приводит к действительным значениям функции.

Пример 1. Найти область определения функции $y = \sqrt{1-x^2}$.

Решение. Функция задана только формулой, ее область определения не указана и никаких дополнительных условий нет. Поэтому под областью определения этой функции мы должны понимать совокупность всех тех значений аргумента x , для которых выражение $\sqrt{1-x^2}$ имеет действительные значения. Для этого должно быть $1-x^2 \geq 0$. Решая это неравенство, приходим к заключению, что областью определения данной функции является сегмент $[-1, 1]$.

Пример 2. Найти область определения функции $y = \frac{1}{x-2}$.

Решение. Область определения, очевидно, состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$, так как выражение $\frac{1}{x-2}$ не имеет смысла при $x=2$, а при всех остальных значениях x определено.

Читатель теперь сам легко увидит, что для функции $y=x^2$ областью определения будет вся числовая ось, а для функции $y=\sqrt{x}$ — бесконечный интервал $x \geq 0$.

Следует обратить внимание на то, что нельзя отождествлять функцию и формулу, с помощью которой задается эта функция. Посредством одной и той же формулы можно задать различные функции. В самом деле, в п. 2 мы рассматривали функцию $y=x^2$ с областью определения $(0, +\infty)$, в п. 3 строился график для функции $y=x^2$ с областью определения $[-2, 2]$. И, наконец, только что мы рассмотрели функцию, заданную только формулой $y=x^2$ без каких-либо дополнительных условий. Областью определения этой функции является вся числовая ось. Эти три функции различны между собой, так как они имеют разные области определения. Но задаются они с помощью одной и той же формулы.

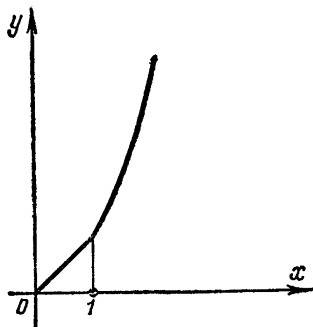


Рис. 18

Возможен и обратный случай, когда одна функция на различных участках ее области определения задается различными формулами. Например, рассмотрим функцию y , определенную для всех неотрицательных значений x следующим образом: $y=x$ при $0 \leq x \leq 1$ и $y=x^2$ при $x > 1$, т. е.

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1; \\ x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Эта функция определена двумя аналитическими выражениями, действующими на различных участках ее области определения. График данной функции изображен на рис. 18.

Табличный способ задания функции. При табличном задании функции составляется таблица, в которой указывается ряд значений аргумента и соответствующих значений функции. Широко известны логарифмические таблицы, таблицы значений тригонометрических функций и многие другие. Довольно часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных непосредственно из опыта. В нижеприведенной таблице приведены полученные из опыта удельные сопротивления ρ меди (в ом-сантиметрах) при различных температурах t (в градусах):

t	10	20	30	40	50
ρ	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$

t	60	70	80	90	100
ρ	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$2,3 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$

Графический способ задания функции. При графическом задании дается график функции, и ее значения, соответствующие тем или иным значениям аргумента, непосредственно находятся из этого графика. Во многих случаях такие графики чертятся с помощью самопишущих приборов.

5. Основные элементарные функции и их графики

Среди функций, заданных аналитически, основную роль в нашем курсе будут играть *элементарные функции*. Прежде всего рассмотрим *основные элементарные функции*. Так называются следующие функции:

1. Постоянная (константа) $y = C$, где C — действительное число.
2. Степенная функция $y = x^n$, где n — действительное число, отличное от нуля.
3. Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$).
4. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$).
5. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.
6. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$.

Рассмотрим области определения основных элементарных функций и их графики.

1. Постоянная — это функция, имеющая одно и то же значение для всех значений аргумента. График функции $y = C$ — прямая, параллельная оси абсцисс.

2. Вид области определения степенной функции зависит от показателя n . Если n принимает различные натуральные значения, то получится ряд функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ и т. д., для каждой из которых область определения — вся числовая ось. Для нечетных n графики некоторых степенных функций приведены на рис. 19, а для четных — на рис. 20.

Из остальных степенных функций рассмотрим сейчас лишь две:

$$y = \frac{1}{x} \quad (n = -1) \quad \text{и} \quad y = \sqrt[n]{x} \quad \left(n = \frac{1}{2}\right).$$

Первая из них $y = \frac{1}{x}$ определена на всей числовой оси, за исключением точки $x = 0$. График этой функции приведен на рис. 21.

Вторая функция $y = \sqrt[n]{x}$ (подразумевается арифметическое значение корня) определена для $x \geq 0$ и имеет график, изображенный на рис. 22.

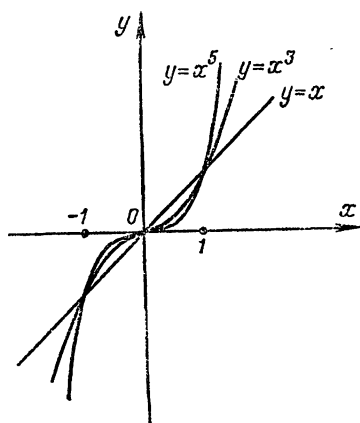


Рис. 19

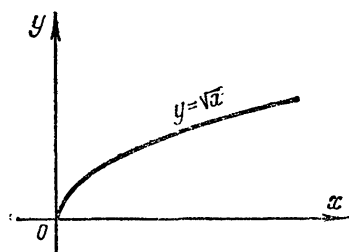


Рис. 22

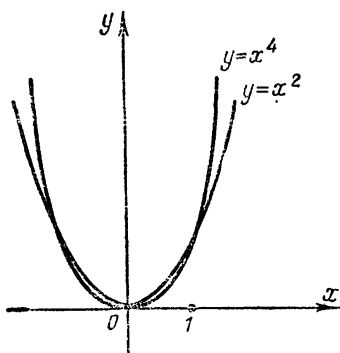


Рис. 20

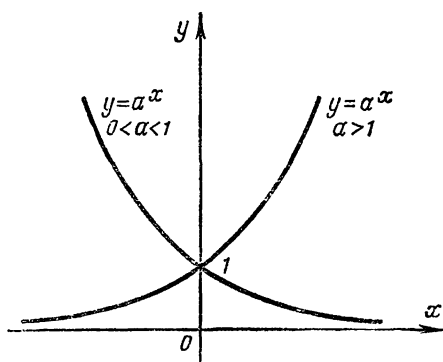


Рис. 23

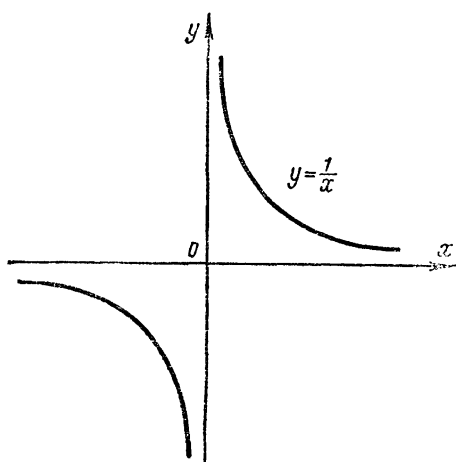


Рис. 21

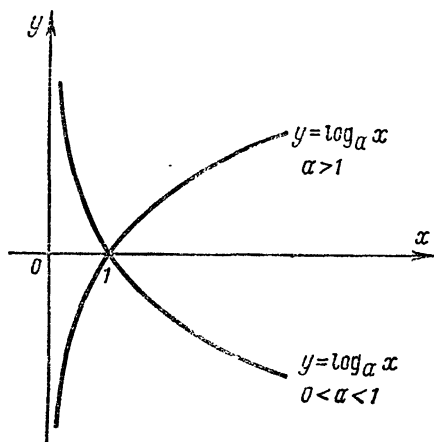


Рис. 24

3. Показательная функция $y = a^x$ определена для всех значений x . На рис. 23 приведены графики показательных функций для $a > 1$ и для $0 < a < 1$.

4. Область определения логарифмической функции $y = \log_a x$ — бесконечный интервал $(0, +\infty)$. Графики (для $a > 1$ и для $0 < a < 1$) изображены на рис. 24.

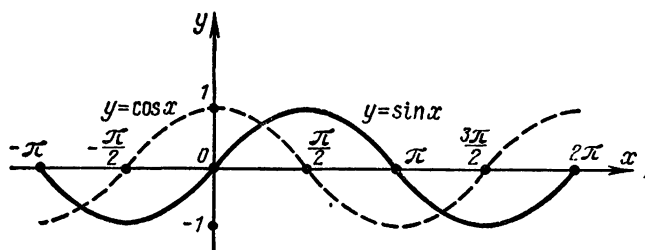


Рис. 25

5. Графики тригонометрических функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ изображены на рис. 25. Каждая из них определена на всей числовой оси. Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена на всей числовой оси, за

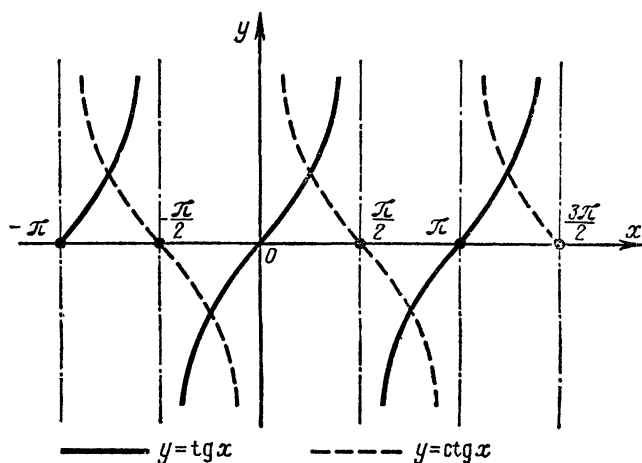


Рис. 26

исключением точек вида $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, а функция $y = \operatorname{ctg} x$ — на всей числовой оси, кроме точек $x = k\pi$ (k — любое целое число). Графики этих функций изображены на рис. 26.

6. Обратные тригонометрические функции и их графики будут рассмотрены в гл. V, § 2, п. 5.

6. Сложные функции. Элементарные функции

До сих пор речь шла о функциях, аргумент которых являлся независимой переменной. Однако во многих случаях приходится рассматривать функции, аргумент которых в свою очередь является

функцией новой переменной. Рассмотрим функцию $y = f(u)$, аргумент u которой является функцией переменной x :

$$u = \varphi(x).$$

Тогда переменная y также будет функцией x . Эта функция называется *сложной функцией* или *функцией от функции*. Она обозначается следующим образом:

$$y = f[\varphi(x)].$$

Переменная u называется *промежуточным аргументом* сложной функции.

Например, если $y = \lg u$, а $u = \sin x$, то y есть сложная функция x : $y = \lg(\sin x)$.

При определении сложной функции мы предполагали, что y есть функция от u . Следовательно, u принимает лишь такие значения, для которых функция $y = f(u)$ определена. Но тогда и значения x надо брать лишь такие, для которых соответствующие значения u входят в область определения функции $y = f(u)$. Например, сложная функция $y = \lg(\sin x)$ определяется лишь для тех значений x , для которых $u = \sin x > 0$, так как логарифмическая функция определена лишь для положительных значений ее аргумента.

Пользуясь понятием сложной функции, можно дать определение элементарной функции.

О п р е д е л е н и е. *Элементарной функцией называется функция, которую можно задать одним аналитическим выражением, составленным из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления) и операций взятия функции от функции, последовательно примененных конечное число раз.*

Основные элементарные функции также относятся к классу элементарных функций. В нашем курсе мы, за редкими исключениями, будем рассматривать именно элементарные функции.

Примерами элементарных функций могут служить функции

$$y = \lg(1 + \cos^2 x), \quad y = 2^{\cos(\lg x)}, \quad y = \frac{x^3 + 3x^2 - x + 5}{x^2 - 3x + 20},$$

$$y = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}} - \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{(x^3 + 1)^{\frac{2}{5}} - x^3}.$$

С некоторыми неэлементарными функциями читатель встретится, например, в гл. VII, § 6, п. 2.

7. Целые и дробно-рациональные функции

В этом пункте мы рассмотрим некоторые важные частные случаи элементарных функций.

О п р е д е л е н и е. *Целой рациональной функцией или многочленом называется функция вида*

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

где n — натуральное число, называемое степенью многочлена, а $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ — действительные числа, называемые коэффициентами многочлена.

Примеры целых рациональных функций:

$$y = 2x^2 - 1, \quad y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad y = 2x^3.$$

Многочлен первой степени $y = a_0x + a_1$ называется *линейной функцией*.

З а м е ч а н и е. Постоянную функцию $y = C$ можно рассматривать как многочлен нулевой степени: $y = Cx^0$.

Многочлен есть функция, определенная на всей числовой оси.

О п р е д е л е н и е. *Дробно-рациональной функцией или рациональной дробью называется отношение двух многочленов:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}. \quad (10)$$

Целая рациональная функция является частным случаем дробно-рациональной функции, когда $Q(x)$ — постоянная. Дробно-рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ определена для всех значений x , за исключением тех, для которых знаменатель $Q(x)$ обращается в нуль.

Примеры дробно-рациональных функций:

$$y = \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + 2x^2 - 5}; \quad y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \quad y = \frac{x^3 + 5x^2 + 3}{x + 7}; \quad y = \frac{1}{x}.$$

8. Функции четные и нечетные. Периодические функции

При исследовании функций важную роль играют некоторые их свойства. В настоящем пункте мы рассмотрим свойства четности, нечетности и периодичности, которыми обладают некоторые элементарные функции.

О п р е д е л е н и е. *Функция $y = f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)$ для любого x , принадлежащего области определения этой функции.*

Например, функции $y = x^2$ и $y = \cos x$ являются четными, так как $(-x)^2 = x^2$ и $\cos(-x) = \cos x$. Четной будет также степенная функция с любым четным показателем $y = x^{2k}$, так как $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Из определения четной функции следует, что две точки графика этой функции $M_1(x; f(x))$ и $M_2(-x; f(-x))$ симметричны относительно оси ординат (рис. 27). А так как x может быть выбрано в области определения функции произвольно, то *график четной функции расположен симметрично относительно оси Oy* (см. графики функций $y = x^2$ и $y = \cos x$ на рис. 20 и 25).

О п р е д е л е н и е. *Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если $f(-x) = -f(x)$ для любого x , принадлежащего области определения этой функции.*

Например, функции $y=x^3$ и $y=\sin x$ будут нечетными, так как $(-x)^3=-x^3$, $\sin(-x)=-\sin x$.

Нечетной функцией будет также степенная функция с любым нечетным показателем: $y=x^{2k-1}$.

График нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат (рис. 28).

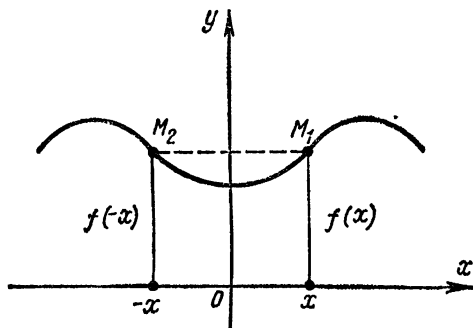


Рис. 27

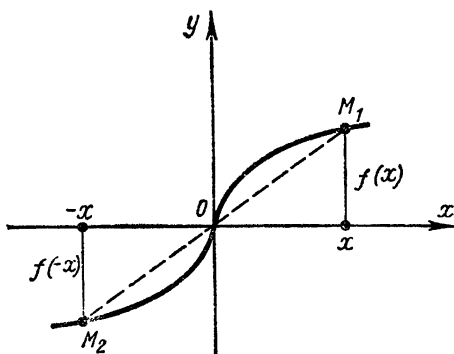


Рис. 28

Область определения как четной, так и нечетной функции, очевидно, симметрична относительно начала координат.

Следует иметь в виду, что далеко не всякая функция является четной или нечетной. Например, каждая из функций $y=x^2-x+1$, $y=x+\cos x$, $y=2^x$, $y=\lg x$ не является ни четной, ни нечетной.

Важное значение в приложениях математики имеют периодические функции.

О п р е д е л е н и е.
Функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что $f(x \pm T) = f(x)$ в области определения функции.

При этом наименьшее из положительных чисел

T , удовлетворяющих условию $f(x \pm T) = f(x)$, называется периодом функции $y=f(x)$ *. Из тригонометрии известно, что функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ являются периодическими функциями. Для первых двух из них период равен 2π , а две последние имеют период π .

При исследовании периодической функции с периодом T и построении ее графика достаточно знать значения этой функции на каком-либо сегменте длины T , например на сегменте $[0, T]$ (рис. 29).

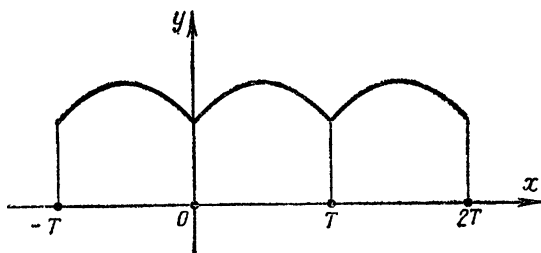


Рис. 29

* Иногда периодом функции $f(x)$ называют любое положительное число C , удовлетворяющее условию $f(x \pm C) = f(x)$.

Любое из остальных значений функции можно получить, пользуясь свойством периодичности этой функции. Например, зная значения функции $y = \sin x$ на сегменте $[0, 2\pi]$, легко получить значение этой функции для любого x (см. график функции $y = \sin x$ на рис. 25).

§ 5. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

1. Определение линии с помощью уравнения

Рассмотрим функцию, заданную формулой (уравнением)

$$y = x^2. \quad (11)$$

Этой функции, а следовательно, и уравнению (11) соответствует на плоскости вполне определенная линия, которая является графиком данной функции (см. рис. 20). Из определения графика функции следует, что эта линия состоит из тех и только тех точек плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют уравнению (11).

Пусть теперь

$$y = f(x). \quad (12)$$

Линия, являющаяся графиком этой функции, состоит из тех и только тех точек плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют уравнению (12). Это значит, что если точка $M(x; y)$ лежит на указанной линии, то ее координаты удовлетворяют уравнению (12). Если же точка не лежит на этой линии, то ее координаты уравнению (12) не удовлетворяют.

Уравнение (12) разрешено относительно y . Рассмотрим уравнение, содержащее x и y и не разрешенное относительно y , например уравнение

$$x^2 + y^2 - 4 = 0. \quad (13)$$

Покажем, что и этому уравнению в плоскости Oxy соответствует линия, а именно—окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 2. Перепишем уравнение в виде

$$x^2 + y^2 = 4. \quad (14)$$

Его левая часть $x^2 + y^2$ представляет собой квадрат расстояния точки $M(x, y)$ от начала координат (см. § 2, п. 2, формула 3). Из равенства (14) следует, что квадрат этого расстояния равен 4.

Это значит, что любая точка $M(x; y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (14), а значит и уравнению (13), находится от начала координат на расстоянии, равном 2.

Геометрическое место таких точек есть окружность с центром в начале координат и радиусом 2. Эта окружность и будет линией, соответствующей уравнению (13). Координаты любой ее точки, очевидно, удовлетворяют уравнению (13). Если же точка $M(x; y)$ не лежит на найденной нами окружности, то квадрат ее расстояния от начала координат $x^2 + y^2$ будет либо больше, либо меньше 4, а это значит, что координаты такой точки уравнению (13) не удовлетворяют.

Пусть теперь, в общем случае, дано уравнение

$$F(x, y) = 0, \quad (15)$$

в левой части которого стоит выражение, содержащее x и y .

Определение. *Линией, определяемой уравнением (15), называется геометрическое место точек плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют этому уравнению.*

Это значит, что если линия L определяется уравнением $F(x, y) = 0$, то координаты любой точки L удовлетворяют этому уравнению, а координаты всякой точки плоскости Oxy , лежащей вне L , уравнению (15) не удовлетворяют.

Уравнение (15) называется уравнением линии L .

Замечание. Не следует думать, что любое уравнение $F(x, y) = 0$ определяет какую-нибудь линию. Например, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не определяет никакой линии. В самом деле, при любых действительных значениях x и y левая часть данного уравнения положительна, а правая равна нулю, и следовательно, этому уравнению не могут удовлетворять координаты никакой точки плоскости Oxy .

Линия может определяться на плоскости не только уравнением, содержащим декартовы координаты, но и уравнением в полярных координатах. *Линией, определяемой уравнением $F(\varphi, r) = 0$ в полярных координатах, называется геометрическое место точек плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют этому уравнению.*

Пример 1. Построить спираль Архимеда* $r = a\varphi$ при $a = 2$.

Решение. Составим таблицу для некоторых значений полярного угла φ и соответствующих им значений полярного радиуса r .

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
r	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π

φ	$\frac{11\pi}{4}$	3π	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{15\pi}{4}$	4π	...	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$	...
r	$\frac{11\pi}{2}$	6π	$\frac{13\pi}{2}$	7π	$\frac{15\pi}{2}$	8π	...	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π	...

Строим в полярной системе координат точку $M_0(0; 0)$, которая, очевидно, совпадает с полюсом; затем, проведя ось l_1 под углом $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ к полярной оси, строим на этой оси точку M_1 с положи-

* Архимед (III в. до н. э.) — великий греческий математик и механик.

тельной координатой $r_1 = \frac{\pi}{2} \approx 1,6$; после этого аналогично строим точки $M_2, \dots$ с положительными значениями полярного угла и полярного радиуса (оси для этих точек на рис. 30 не указаны). Соединив между собой точки $M_0, M_1, M_2, \dots$, получим одну ветвь кривой, обозначенную на рис. 30 жирной линией. При изменении φ от 0 до $+\infty$ эта ветвь кривой состоит из бесконечного числа витков.

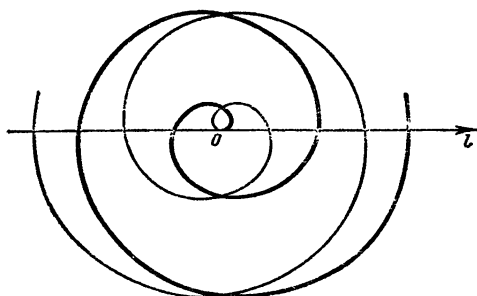


Рис. 30

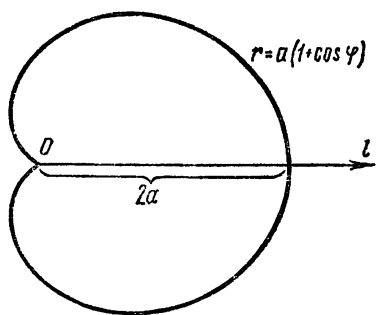


Рис. 31

Затем проводим ось $\bar{l}_1$ под углом $\bar{\varphi}_1 = -\frac{\pi}{4}$ к полярной оси и строим на оси $\bar{l}_1$ точку $\bar{M}_1$ с отрицательной координатой $\bar{r}_1 = -\frac{\pi}{2} \approx -1,6$. Аналогично строятся точки $\bar{M}_2, \dots$ (оси для этих точек на рис. 30 не указаны). Соединив точки $M_0, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots$, получим вторую ветвь кривой, которая при изменении φ от 0 до $-\infty$ также состоит из бесконечного числа витков; она обозначена на рис. 30 тонкой линией.

Таким образом, искомая кривая линия состоит из двух ветвей.

Пример 2. На рис. 31 изображена кардиоида, уравнение которой имеет вид $r = a(1 + \cos \varphi)$.

2. Нахождение уравнения линии по ее геометрическим свойствам

В рассмотренных примерах мы, исходя из уравнения, находили линию, определяемую этим уравнением. Возможна и обратная задача. Пусть линия L на плоскости задана некоторым характерным геометрическим свойством, которым обладает всякая точка этой линии и не обладают точки плоскости, лежащие вне линии L ; требуется найти в заданной системе координат уравнение, определяющее эту линию, т. е. такое уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки линии L и не удовлетворяют координаты точек плоскости, лежащих вне L . Это уравнение, как мы знаем, называется уравнением данной линии L . Координаты произвольной точки линии L называются *текущими координатами* этой линии. Они зависят

от выбранной системы координат и могут быть не только декартовыми, а, например, и полярными. Вид уравнения линии тоже зависит от выбора системы координат.

Рассмотрим примеры нахождения (вывода) уравнений некоторых линий в декартовых или полярных координатах.

Пример 1. Найти уравнение (в декартовой системе координат) окружности с центром в точке $O_1(a; b)$ и радиусом R .

Решение. Окружность определяется как геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от данной точки этой плоскости — центра окружности. Из определения окружности следует, что любая точка окружности $M(x; y)$ с текущими координатами x и y находится на расстоянии R от центра окружности $O_1(a; b)$.

По формуле (2) получим

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R,$$

откуда

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (16)$$

Уравнение (16) является искомым уравнением окружности. Ему, очевидно, удовлетворяют координаты любой точки данной окружности и не удовлетворяют координаты всякой точки плоскости Oxy , не лежащей на этой окружности.

В частном случае, если центр окружности находится в начале координат, то $a=b=0$, и уравнение (16) примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (16')$$

В дальнейшем под радиусом окружности мы будем понимать как отрезок, соединяющий центр окружности с некоторой ее точкой, так и его длину.

Пример 2. В полярной системе координат найти уравнение окружности с центром в точке $O_1(0; a)$ и радиусом равным a (рис. 32).

Решение. По условию центр окружности O_1 имеет полярный угол $\varphi=0$ и полярный радиус r , равный радиусу a искомой окружности. Следовательно, эта окружность проходит через полюс O , и один из ее диаметров лежит на полярной оси. Обозначим буквой A вторую точку пересечения этого диаметра с полярной осью. Для точки A $\varphi=0$, $r=2a$. Пусть $M(\varphi; r)$ — любая точка данной окружности. Из прямоугольного треугольника OAM имеем:

$$r = OA \cdot \cos \varphi,$$

или

$$r = 2a \cos \varphi. \quad (17)$$

Уравнению (17) удовлетворяют полярные координаты любой точки данной окружности. Легко видеть, что если точка не лежит на этой окружности, то ее координаты уравнению (17) не удовлетворяют. А это значит, что уравнение (17) — искомое.

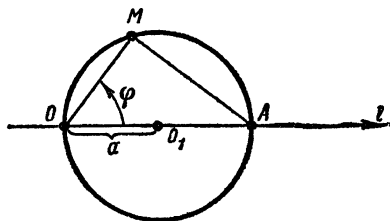


Рис. 32

1. Параллельный перенос осей координат

Выше уже говорилось о том, что в некоторых случаях приходится одновременно рассматривать две системы координат на плоскости и решать следующую задачу: даны координаты точки в одной системе координат, требуется найти ее координаты в другой системе. Формулы, выражающие координаты точки в одной системе через ее координаты в другой системе, называются *формулами преобразования координат*.

В § 3, п. 3 были получены формулы преобразования для декартовых и полярных координат. В этом пункте мы будем предполагать, что обе системы — декартовы (прямоугольные), причем одноименные оси этих систем параллельны и одинаково направлены. На рис. 33 изображены две такие системы Oxy и $O_1X_1Y_1$. Система $O_1X_1Y_1$ может быть получена параллельным переносом осей Ox и Oy . Условимся называть координаты точек в системе Oxy *старыми*, а в системе $O_1X_1Y_1$ — *новыми*. Пусть x_0 и y_0 — координаты нового начала O_1 в старой системе. Предположим, что произвольно

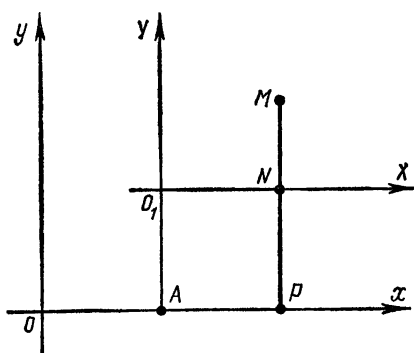


Рис. 33

выбранная точка M на плоскости имеет старые координаты x и y и новые координаты X и Y . Выведем формулы, выражающие старые координаты точки M через новые. Проектируя новое начало O_1 и точку M на ось Ox , а также точку M на ось O_1X_1 , получим соответственно точки A , P и N . Очевидно, $O_1N = AP$. Но $O_1N = |X|$, а $AP = |x - x_0|$, так что

$$|X| = |x - x_0|,$$

т. е. новая абсцисса X и разность $x - x_0$ равны по модулю. Нетрудно заметить, что и знаки этих величин одинаковы. В самом деле, если N лежит правее O_1 , то P расположено правее A , и обе величины X и $x - x_0$ положительны. Если же N находится левее O_1 , то P — левее A и, следовательно, X и $x - x_0$ отрицательны. В обоих случаях

$$X = x - x_0,$$

откуда

$$x = X + x_0.$$

Аналогично получается формула для старой ординаты y . Таким образом, мы получили следующие формулы преобразования координат (*параллельного переноса осей*):

$$\left. \begin{aligned} x &= X + x_0, \\ y &= Y + y_0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Пример. Дана точка $M(2; -1)$ в системе Oxy . Найти ее новые координаты X и Y при параллельном переносе осей, если новое начало в старой системе имеет координаты -1 и 3 .

Решение. По формулам (18) получим

$$\begin{cases} 2 = X - 1, \\ -1 = Y + 3, \end{cases}$$

откуда $X = 3$, $Y = -4$.

2. Поворот осей координат

Пусть на плоскости заданы две системы координат, имеющие общее начало O : система Oxy (старая) и система OXY (новая), которая получена поворотом старой системы на угол α . Это значит, что угол $(Ox, \widehat{OX}) = \alpha$ (рис. 34) и, следовательно, угол $(Oy, \widehat{OY}) = \alpha$. Найдем формулы, выражающие старые координаты x и y произвольной точки M плоскости через ее новые координаты X и Y .

Введем полярные координаты: старые—с полярной осью, совпадающей с осью Ox , и новые—с полярной осью, совпадающей с осью OX . Пусть точка M в новой полярной системе имеет полярный угол φ и полярный радиус r . В старой

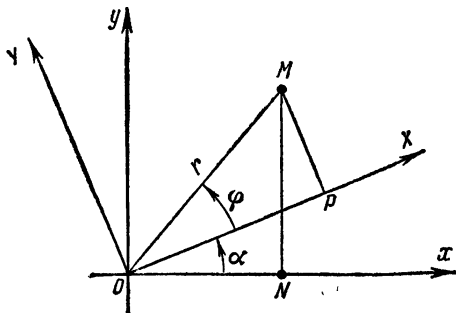


Рис. 34

полярной системе полярный угол точки M будет равен $\alpha + \varphi$, а полярный радиус будет таким же, как и в новой системе.

Поэтому по формулам (7) будем иметь:

$$x = r \cos(\alpha + \varphi),$$

$$y = r \sin(\alpha + \varphi).$$

Используя тригонометрические тождества для косинуса и синуса суммы двух углов, получим:

$$x = r(\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) = (r \cos \varphi) \cos \alpha - (r \sin \varphi) \sin \alpha;$$

$$y = r(\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) = (r \cos \varphi) \sin \alpha + (r \sin \varphi) \cos \alpha.$$

Но $r \cos \varphi = X$ и $r \sin \varphi = Y$, поэтому

$$\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha. \end{cases} \quad (19)$$

Формулы (19) называются *формулами поворота осей*.

Пример. Выразить старые координаты точки x и y через ее новые координаты X и Y при повороте осей на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Так как $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то по формулам (19) получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= X \frac{\sqrt{2}}{2} - Y \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y &= X \frac{\sqrt{2}}{2} + Y \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2} (X - Y), \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2} (X + Y). \end{aligned} \right\}$$

ГЛАВА II

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. ПРЯМАЯ

1. Угол между двумя прямыми

Рассмотрим две прямые L_1 и L_2 , лежащие в плоскости Oxy . Углом между двумя пересекающимися в точке M прямыми L_1 и L_2 называется наименьший угол, на который надо повернуть относительно точки M против часовой стрелки прямую L_1 , для того чтобы она совпала с прямой L_2 (рис. 35)*. Предполагается, что поворот совершается в плоскости прямых L_1 и L_2 .

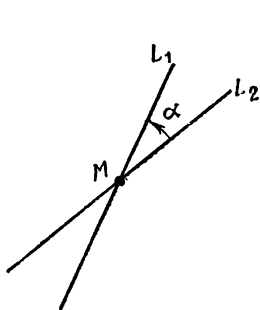


Рис. 35

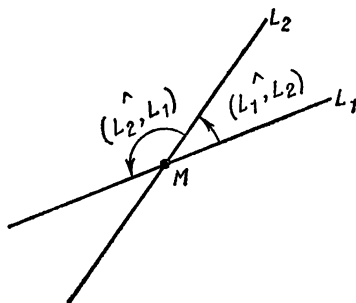


Рис. 36

Существенным является порядок, в котором рассматриваются прямые. Если угол между прямыми L_1 и L_2 обозначить символом (L_1, L_2) , то $(L_2, L_1) = \pi - (L_1, L_2)$ (рис. 36). Если прямые параллельны (или совпадают), то угол между ними считается равным нулю.

Определение угла между двумя прямыми остается в силе, если одна из прямых является осью, например осью Ox .

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

В этом пункте мы выведем уравнение прямой линии в декартовой системе координат. Это значит (см. гл. I, § 5, п. 2), что мы найдем такое уравнение, связывающее x и y , которому будут удовлетворять координаты любой точки данной прямой и не будут удовлетворять координаты точек, лежащих вне этой прямой.

Пусть прямая не параллельна ни одной из координатных осей. Положение такой прямой вполне определяется ординатой b точки

* Сравните с определением угла между двумя осями (гл. I, § 3, п. 1).

$B(0; b)$ ее пересечения с осью ординат и углом α между осью Ox и прямой, т. е. наименьшим углом, на который нужно повернуть против часовой стрелки ось Ox до ее совпадения с прямой (рис. 37). Пусть $M(x; y)$ — произвольно выбранная точка нашей прямой, не совпадающая с точкой $B(0; b)$. Проведем через точку B ось Bx_1 , параллельную оси Ox и одинаково с ней направленную. Угол между

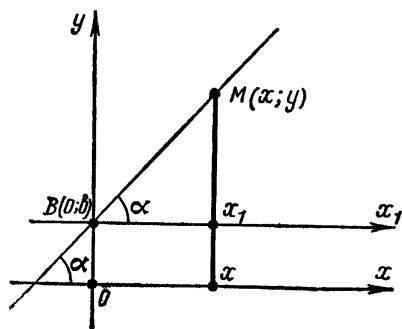


Рис. 37

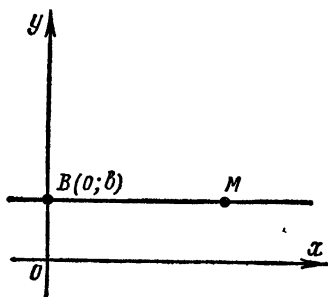


Рис. 38

осью Bx_1 и данной прямой, очевидно, также равен α . В системе Bx_1y точка M имеет координаты x_1 и y_1 , причем $x_1 = x$, $y_1 = y - b$.

Из определения тангенса угла следует

$$\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{tg} \alpha,$$

или

$$y_1 = \operatorname{tg} \alpha \cdot x_1.$$

Заменяя в этом уравнении x_1 и y_1 их выражениями через x , y и b , получим

$$y - b = \operatorname{tg} \alpha \cdot x,$$

или

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b. \quad (1)$$

Введем обозначение $\operatorname{tg} \alpha = k$. Тогда уравнение (1) примет следующий вид:

$$y = kx + b. \quad (2)$$

Это уравнение является уравнением данной прямой. В самом деле, из предыдущих рассуждений следует, что ему удовлетворяют координаты любой точки $M(x; y)$ прямой, не совпадающей с точкой $B(0; b)$. Легко проверить непосредственно, что координаты точки $B(0; b)$ ему также удовлетворяют. С другой стороны, можно убедиться, что координаты любой точки $N(x; y)$, лежащей вне данной прямой, уравнению (2) не удовлетворяют.

Число $k = \operatorname{tg} \alpha$ называется *угловым коэффициентом* прямой, ордината b — *отрезком, отсекаемым прямой на оси Oy*, а уравнение (2) — *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Пусть теперь прямая параллельна оси Ox или, может быть, совпадает с ней (рис. 38). В этом случае $\alpha = 0$.

Для определенности предположим, что прямая пересекает ось ординат в точке $B(0; b)$. Тогда любая точка M этой прямой имеет ординату, равную ординате точки B :

$$y = b. \quad (3)$$

Очевидно, координаты точки, не лежащей на данной прямой уравнению (3) не удовлетворяют. Поэтому уравнение (3) является уравнением данной прямой, т. е. прямой, параллельной оси Ox (при $b=0$ прямая совпадает с осью абсцисс). Легко видеть, что уравнение (3) является частным случаем уравнения (2) при $\alpha=0$.

Второй частный случай уравнения (2) получим, если отрезок b , отсекаемый прямой по оси ординат, равен нулю:

$$y = kx. \quad (4)$$

Прямая в этом случае проходит через начало координат.

Отрезок b , отсекаемый прямой на оси ординат, и угловой коэффициент прямой $k = \operatorname{tg} \alpha$ вполне определяют положение этой прямой, так как любому значению $\operatorname{tg} \alpha$ соответствует вполне определенное значение угла α (см. п. 1).

Пример 1. Найти уравнение биссектрисы I и III координатных углов.

Решение. Биссектриса I и III координатных углов есть прямая, проходящая через начало координат. Ее уравнение мы ищем в форме (4): $y = kx$. При этом ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Поэтому искомое уравнение имеет следующий вид:

$$y = x. \quad (5)$$

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $B(0; 2)$ и образующей с осью абсцисс угол $\alpha = 135^\circ$.

Решение. Найдем угловой коэффициент искомой прямой: $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$. По условию, отрезок $b = 2$. На основании формулы (2) уравнение прямой с угловым коэффициентом будет иметь вид

$$y = (-1)x + 2,$$

или

$$y = -x + 2.$$

3. Уравнение прямой, параллельной оси ординат

Предположим теперь, что прямая параллельна оси ординат и проходит через точку $A(a; 0)$. (Если $a=0$, то прямая совпадает с осью ординат.) Читатель легко увидит, что уравнение этой прямой имеет следующий вид (рис. 39):

$$x = a. \quad (6)$$

Это уравнение не является частным случаем уравнения (2) прямой

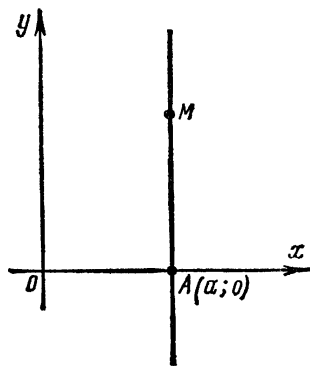


Рис. 39

с угловым коэффициентом, так как прямая, параллельная оси ординат, образует с осью абсцисс угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и для нее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ не существует.

4. Общее уравнение прямой и его частные случаи

Мы видели, что уравнение прямой имеет вид (2), если прямая не параллельна оси Oy , или (6), если прямая параллельна оси ординат. Каждое из этих уравнений есть уравнение первой степени относительно текущих координат. Поэтому можно считать доказанной следующую теорему.

Теорема. Уравнение прямой линии в декартовой системе координат есть уравнение первой степени.

Покажем, что имеет место обратная теорема.

Теорема. Любое уравнение первой степени относительно декартовых координат есть уравнение прямой линии.

Доказательство. Пусть дано уравнение первой степени относительно декартовых координат:

$$Ax + By + C = 0. \quad (7)$$

Возможны два случая.

1) $B \neq 0$. Тогда уравнение (7) равносильно уравнению

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \quad (8)$$

Рассмотрим прямую, отсекающую на оси Oy отрезок $b = -\frac{C}{B}$ и образующую с осью Ox такой угол α , для которого $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B}$. Для такой прямой уравнение (8) будет уравнением прямой с угловым коэффициентом. Это значит, что уравнение (8), а следовательно, и уравнение (7), является уравнением прямой.

2) Пусть теперь $B = 0$; тогда уравнение имеет вид

$$Ax + C = 0. \quad (9)$$

При этом $A \neq 0$ (так как иначе мы имели бы не уравнение, а тождество $C = 0$). Поэтому уравнение (9) равносильно уравнению

$$x = -\frac{C}{A}. \quad (10)$$

Но это уравнение есть уравнение прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$. Уравнение (9), равносильное (10), также является уравнением этой прямой.

Итак, теорема доказана.

Определение. Уравнение вида (7) называется общим уравнением прямой в декартовой системе координат.

Замечание. В дальнейшем, если будет сказано «дана прямая», или «найти прямую», то это будет означать, что дано или что требуется найти ее уравнение.

Рассмотрим некоторые частные случаи, когда один или несколько коэффициентов в общем уравнении прямой равны нулю.

1) $B=0$. Такой случай уже рассматривался. Уравнение прямой приводится к виду (10)

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Если при этом $C \neq 0$, то прямая параллельна оси ординат. Если же $C=0$, то уравнение имеет вид

$$x=0,$$

и прямая совпадает с осью ординат.

2) $A=0$. Уравнение прямой приводится к виду

$$y = -\frac{C}{B}.$$

Это есть уравнение прямой, параллельной оси абсцисс. В частности, при $C=0$, получаем уравнение оси абсцисс

$$y=0.$$

3) $C=0$. Уравнение прямой имеет вид

$$Ax + By = 0. \quad (11)$$

Легко проверить, что уравнению (11) удовлетворяют координаты начала $O(0; 0)$. Следовательно, прямая в этом случае проходит через начало координат.

5. Точка пересечения прямых. Построение прямой по ее уравнению

Пусть даны две прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и требуется найти их точку пересечения. Так как эта точка принадлежит каждой из двух данных прямых, то ее координаты должны удовлетворять как уравнению первой прямой, так и уравнению второй прямой.

Таким образом, для того чтобы найти координаты точки пересечения двух прямых, следует решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Пример 1. Найти точку пересечения прямых $2x + y - 1 = 0$ и $x + 2y + 1 = 0$.

Решение. Координаты искомой точки пересечения мы найдем, решив систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - 1 &= 0, \\ x + 2y + 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Точка пересечения M имеет координаты $x=1$ и $y=-1$.

Покажем, как построить прямую по ее уравнению. Для построения прямой достаточно знать две ее точки. Чтобы построить каждую из этих точек, мы задаемся произвольным значением одной из ее координат, а затем из уравнения находим соответствующее значение другой координаты.

Если в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ оба коэффициента при текущих координатах не равны нулю ($A \neq 0$ и $B \neq 0$), то для построения этой прямой лучше всего находить точки ее пересечения с осями координат.

Пример 2. Построить прямую $2x + 3y - 6 = 0$.

Решение. Находим точку $M(x_1; y_1)$ пересечения данной прямой с осью абсцисс. Для этого решаем совместно их уравнения:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

и получаем $x_1 = 3$, $y_1 = 0$. Таким образом, найдена точка $M(3; 0)$ пересечения данной прямой с осью абсцисс (рис. 40). Решая затем совместно уравнение данной прямой и уравнение оси ординат

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

мы находим точку $N(0; 2)$ пересечения прямой с осью ординат. Наконец, строим прямую по ее двум точкам M и N .

Пример 3. Построить прямую $2y + 5 = 0$.

Решение. В уравнении данной прямой коэффициент при x равен нулю, а свободный член отличен от нуля. Следовательно, прямая параллельна оси абсцисс. Ее уравнение можно записать в следующей форме:

$$y = -\frac{5}{2}.$$

Таким образом, ордината каждой точки прямой равна $-\frac{5}{2}$. Абсциссы двух точек, нужных для построения прямой, можно выбрать произвольно. Например, положим $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Тогда мы получим две точки прямой $M(0; -\frac{5}{2})$ и $N(1; -\frac{5}{2})$, по которым и построим прямую.

6. Вычисление угла между двумя прямыми.

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть две пересекающиеся в точке M прямые L_1 и L_2 определяются соответственно уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Найдем тангенс угла φ между этими прямыми (рис. 41). Мы должны

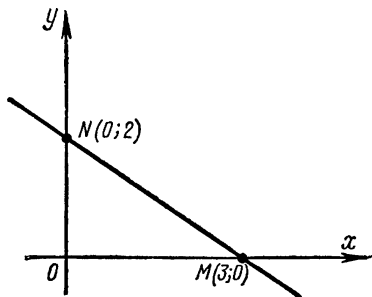


Рис. 40

предположить, что данные прямые не перпендикулярны друг другу, так как иначе $\operatorname{tg} \varphi$ не существовал бы. Пусть прямая L_1 образует с осью абсцисс угол α_1 , а прямая L_2 — угол α_2 . Проведя через точку M , в которой пересекаются прямые L_1 и L_2 , прямую, параллельную оси Ox , увидим, что

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$$

или

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Но $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, а $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$, поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (12)$$

Таким образом, если две пересекающиеся прямые L_1 и L_2 не перпендикулярны, то тангенс угла φ между ними находится по формуле (12). При этом угол φ отсчитывается в направлении от прямой L_1 к прямой L_2 .

Если прямые параллельны, или совпадают, то $\alpha_1 = \alpha_2$ и, следовательно, $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$, т. е.

$$k_2 = k_1. \quad (13)$$

Обратно, если $k_2 = k_1$, то $\alpha_1 = \alpha_2$ и, следовательно, прямые L_1 и L_2 параллельны или совпадают. Условившись совпадающие прямые считать параллельными, мы приходим к следующему признаку параллельности прямых.

Необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов.*

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то формула (12) теряет смысл. Однако в этом случае можно рассматривать котангенс угла между прямыми:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}.$$

В случае перпендикулярности прямых $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$. Следовательно, $\frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0$, откуда $1 + k_1 k_2 = 0$, или

$$k_1 k_2 = -1. \quad (14)$$

* Нетрудно проверить, что в случае параллельности прямых L_1 и L_2 формула (12) остается справедливой (напомним, что угол между двумя параллельными прямыми по условию равен нулю).

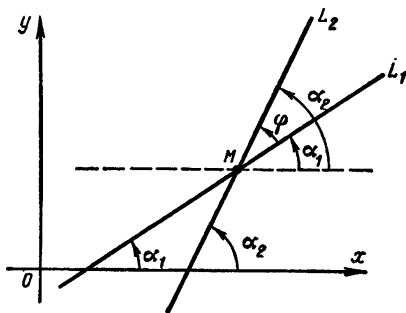


Рис. 41

Можно показать, что и обратно, если выполняется равенство (14), то прямые L_1 и L_2 перпендикулярны.

Таким образом, формула (14) выражает *необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых*.

Пример. Определить, какие углы образуют с прямой $3x + y - 6 = 0$ прямые $x + 2y + 1 = 0$, $6x + 2y - 1 = 0$ и $x - 3y + 2 = 0$.

Решение. Приведем уравнения данных прямых к форме уравнений с угловым коэффициентом. Для этого разрешим каждое из них относительно y :

$$y = -3x + 6; \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}; \quad y = -3x + \frac{1}{2}; \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Мы видим, что угловые коэффициенты этих прямых соответственно равны $k_1 = -3$; $k_2 = -\frac{1}{2}$; $k_3 = -3$ и $k_4 = \frac{1}{3}$. Найдем по формуле (12) тангенс угла φ между первой и второй прямыми:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-\frac{1}{2} + 3}{1 + (-3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1.$$

Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Третья прямая параллельна первой, так как угловые коэффициенты этих прямых равны: $k_1 = k_3 = -3$. Угол между двумя параллельными прямыми равен нулю.

Четвертая прямая перпендикулярна первой (угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$), так как угловые коэффициенты этих прямых удовлетворяют условию перпендикулярности прямых (14): $k_1 \cdot k_4 = (-3) \cdot \frac{1}{3} = -1$.

7. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении

Поставим задачу найти уравнение прямой, если известны ее угловой коэффициент k и точка $M_1(x_1; y_1)$, через которую эта прямая проходит (частный случай задачи мы решали в п. 2, когда точка M_1 лежала на оси ординат).

Напишем уравнение прямой с угловым коэффициентом (2)

$$y = kx + b.$$

Здесь неизвестен свободный член b . Но мы можем найти его, зная, что точка $M_1(x_1; y_1)$ лежит на искомой прямой и, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой:

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Отсюда

$$b = y_1 - kx_1.$$

Подставив найденное значение b уравнение (2), получим

$$y = kx + y_1 - kx_1$$

или

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (15)$$

Уравнение (15) есть искоемое. Оно называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку*.

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-1; 2)$ параллельно прямой $y = -3x + 1$.

Решение. Искомая прямая по условию параллельна данной прямой. Следовательно, угловой коэффициент искомой прямой k равен угловому коэффициенту данной прямой: $k = -3$. Пользуясь уравнением (15) прямой, проходящей через данную точку, и учитывая, что в этом уравнении следует положить $x_1 = -1$, $y_1 = 2$ и $k = -3$, получим

$$y - 2 = -3(x + 1),$$

или

$$3x + y + 1 = 0.$$

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-3; -1)$ перпендикулярно прямой $2x + y - 3 = 0$.

Решение. Уравнение данной прямой можно записать в форме $y = -2x + 3$, откуда следует, что ее угловой коэффициент $k_1 = -2$. Угловой коэффициент k_2 искомой прямой, перпендикулярной к данной, связан с коэффициентом k_1 условием $k_1 k_2 = -1$. Следовательно, $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{2}$. Теперь остается воспользоваться уравнением (15) прямой, проходящей через данную точку, положив в нем $x_1 = -3$, $y_1 = -1$ и $k = \frac{1}{2}$:

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x + 3).$$

После упрощений получим

$$x - 2y + 1 = 0.$$

8. Пучок прямых

Определение. Множество всех прямых на плоскости, проходящих через некоторую точку M этой плоскости, называется *пучком прямых*. Точка M при этом называется *центром пучка*.

Предположим, что в уравнении (15) координаты точки $M_1(x_1; y_1)$ остаются неизменными, а угловой коэффициент k принимает различные (произвольно выбираемые) значения. Тогда каждому численному значению k будет соответствовать прямая, проходящая через точку M_1 . Обратно, всякая прямая, проходящая через точку M_1 , за исключением прямой $x = x_1$, перпендикулярной оси абсцисс, имеет вполне определенный угловой коэффициент k и, следовательно, определяется уравнением вида (15).

Таким образом, уравнение (15), в котором k принимает всевозможные численные значения, определяет пучок прямых с центром в точке $M_1(x_1; y_1)$ за исключением прямой $x = x_1$.

9. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Требуется составить уравнение прямой, проходящей через эти точки.

Напишем уравнение (15) пучка прямых, проходящих через точку $M_1(x_1; y_1)$:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Из этого пучка нам следует выбрать прямую, проходящую через точку $M_2(x_2; y_2)$. Угловой коэффициент k этой прямой должен быть таким, чтобы координаты точки $M_2(x_2; y_2)$ удовлетворяли уравнению (15), т. е. чтобы имело место равенство

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Из этого условия мы находим угловой коэффициент искомой прямой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (16)$$

и подставляем его в уравнение (15):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Это уравнение обычно записывают в следующей симметричной форме:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (17)$$

Мы получили *уравнение прямой, проходящей через две данные точки*.

Предполагается, что в уравнении (17) $x_2 \neq x_1$ и $y_2 \neq y_1$, так как иначе это уравнение не имело бы смысла. Геометрически это означает, что прямая, проходящая через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, не параллельна ни одной из координатных осей.

Если $x_2 = x_1$, то прямая, проходящая через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, параллельна оси ординат. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$. Если же $y_2 = y_1$, то прямая M_1M_2 параллельна оси абсцисс, и ее уравнение может быть записано в виде $y = y_1$.

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1; 2)$ и $M_2(-2; 3)$.

Решение. Полагая в уравнении (17) $x_1 = 1$; $y_1 = 2$; $x_2 = -2$ и $y_2 = 3$, получим

$$\frac{y - 2}{3 - 2} = \frac{x - 1}{-2 - 1}$$

или, после упрощений,

$$x + 3y - 7 = 0.$$

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2; -1)$ и $M_2(-3; -1)$.

Решение. Имеем $y_1 = y_2 = -1$. Следовательно, искомая прямая параллельна оси Ox . Ее уравнение имеет вид $y = -1$.

10. Расстояние от точки до прямой

Сначала найдем расстояние от начала координат до прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Приведа данное уравнение к виду уравнения прямой с угловым коэффициентом

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

замечаем, что угловым коэффициент этой прямой $k_1 = -\frac{A}{B}$. Прямая, проходящая через начало координат перпендикулярно данной прямой, имеет угловым коэффициент $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{B}{A}$. Поэтому уравнение этой прямой имеет вид

$$y = \frac{B}{A}x.$$

Решая систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} Ax + By + C = 0, \\ y = \frac{B}{A}x, \end{array} \right\}$$

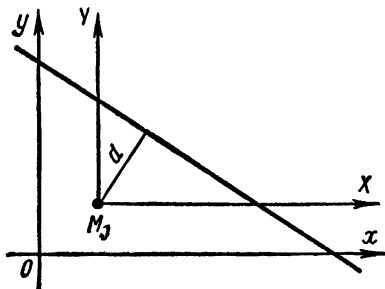


Рис. 42

мы найдем координаты точки $N(\bar{x}; \bar{y})$, являющейся точкой пересечения данной прямой и опущенного на нее из начала координат перпендикуляра:

$$\bar{x} = \frac{-AC}{A^2 + B^2}; \quad \bar{y} = \frac{-BC}{A^2 + B^2}.$$

Искомое расстояние d от начала координат до данной прямой равно расстоянию между началом координат $O(0; 0)$ и точкой $N(\bar{x}; \bar{y})$:

$$d = ON = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{A^2 C^2}{(A^2 + B^2)^2} + \frac{B^2 C^2}{(A^2 + B^2)^2}} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (18)$$

Найдем теперь расстояние d от произвольно заданной точки $M_0(x_0; y_0)$ до данной прямой $Ax + By + C = 0$ (рис. 42). Сделаем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку M_0 . Тогда (см. гл. I, § 6, п. 1)

$$\left. \begin{array}{l} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0, \end{array} \right\} \quad (19)$$

и уравнение данной прямой в новой системе координат примет следующий вид:

$$A(X + x_0) + B(Y + y_0) + C = 0,$$

или

$$AX + BY + Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

или, наконец,

$$AX + BY + C_0 = 0,$$

где

$$C_0 = Ax_0 + By_0 + C.$$

Так как в новой системе координат точка M_0 является началом координат, то расстояние d от этой точки до данной прямой найдется по формуле (18):

$$d = \frac{|C_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

или, так как $C_0 = Ax_0 + By_0 + C$, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (20)$$

Заметим, что в числителе правой части формулы (20) стоит абсолютная величина выражения, которое получится, если в левую часть уравнения данной прямой $Ax + By + C = 0$ вместо текущих координат подставить координаты данной точки $M_0(x_0; y_0)$.

Пример 1. Треугольник задан своими вершинами $A(1; 2)$, $B(-2; 1)$ и $C(2; 3)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины A .

Решение. Найдем уравнение прямой, проходящей через две точки $B(-2; 1)$ и $C(2; 3)$:

$$\frac{x-2}{-2-2} = \frac{y-3}{1-3},$$

или

$$x - 2y + 4 = 0.$$

Искомую длину высоты найдем по формуле (20) как расстояние от точки $A(1; 2)$ до прямой BC :

$$d = \frac{|1 - 2 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Пример 2. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $3x - 4y - 2 = 0$ и $5x + 12y - 1 = 0$.

Решение. Биссектриса угла есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от сторон этого угла. Пусть точка $M(\bar{x}; \bar{y})$ — любая точка биссектрисы угла между данными прямыми (рис. 43). Согласно формуле (20) ее расстояние от первой прямой

$$d_1 = \frac{|3\bar{x} - 4\bar{y} - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3\bar{x} - 4\bar{y} - 2|}{5}.$$

Точно так же расстояние точки $M(\bar{x}; \bar{y})$ от второй прямой

$$d_2 = \frac{|5\bar{x} + 12\bar{y} - 1|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5\bar{x} + 12\bar{y} - 1|}{13}.$$

По определению биссектрисы $d_1 = d_2$, т. е.

$$\frac{|3\bar{x} - 4\bar{y} - 2|}{5} = \frac{|5\bar{x} + 12\bar{y} - 1|}{13}.$$

Если равны модули двух величин, то эти величины либо равны, либо отличаются только знаком. Следовательно,

$$\frac{3\bar{x} - 4\bar{y} - 2}{5} = \frac{5\bar{x} + 12\bar{y} - 1}{13},$$

или

$$\frac{3\bar{x} - 4\bar{y} - 2}{5} = -\frac{5\bar{x} + 12\bar{y} - 1}{13}.$$

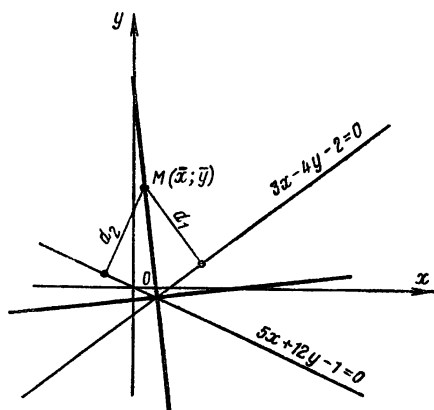


Рис. 43

Упрощая последние два уравнения, получим

$$2\bar{x} - 16\bar{y} - 3 = 0 \quad \text{или} \quad 64\bar{x} + 8\bar{y} - 31 = 0.$$

Переходя к обозначениям текущих координат x и y вместо $\bar{x}$ и $\bar{y}$, получим следующие уравнения биссектрис:

$$2x - 16y - 3 = 0 \quad \text{или} \quad 64x + 8y - 31 = 0.$$

§ 2. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Определение кривой второго порядка

Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат.

В общем случае это уравнение имеет следующий вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0^*, \quad (21)$$

где коэффициенты A , $2B$, C , $2D$, $2E$ и F — действительные числа и, кроме того, по крайней мере одно из чисел A , B или C отлично от нуля.

Ранее было выведено уравнение окружности (гл. I, § 5, п. 2):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (22)$$

Это уравнение второй степени относительно x и y . Следовательно, окружность есть кривая второго порядка. В следующих пунктах будут рассмотрены четыре кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

* Коэффициенты при xy , x и y обозначены соответственно через $2B$, $2D$ и $2E$ для удобства преобразований уравнения (21) в дальнейшем.

2. Окружность

Раскрыв скобки в уравнении (22) и выполнив некоторые тождественные преобразования, мы получим уравнение окружности в следующем виде:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \quad (23)$$

При сравнении этого уравнения с общим уравнением (21) кривой второго порядка легко заметить, что для уравнения окружности выполнены два условия: 1) отсутствует член с произведением координат xy ; 2) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой *.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть в общем уравнении кривой второго порядка отсутствует член с xy и равны коэффициенты при x^2 и y^2 :

$$A = C \text{ и } 2B = 0.$$

Будет ли это уравнение уравнением окружности? Прежде всего отметим, что, не ограничивая общности, можно считать, что в уравнении (21) $A = 1$ (а следовательно, и $C = 1$), так как если бы этого не было, то мы могли бы разделить на A обе части этого уравнения.

Таким образом, можно считать, что уравнение кривой второго порядка имеет следующий вид:

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (24)$$

Выделив в левой части этого уравнения две группы членов $x^2 + 2Dx$ и $y^2 + 2Ey$, дополним каждую из них до полного квадрата. Тогда уравнение примет следующий вид:

$$x^2 + 2Dx + D^2 + y^2 + 2Ey + E^2 - D^2 - E^2 + F = 0,$$

или

$$(x + D)^2 + (y + E)^2 = D^2 + E^2 - F. \quad (25)$$

Рассмотрим три возможных случая:

1) $D^2 + E^2 - F > 0$. В этом случае уравнение (25), а следовательно, и равносильное ему уравнение (24) определяют окружность с центром в точке $O_1(-D; -E)$ и радиусом $R = \sqrt{D^2 + E^2 - F}$;

2) $D^2 + E^2 - F = 0$. В этом случае уравнение (25) имеет вид

$$(x + D)^2 + (y + E)^2 = 0.$$

Последнему уравнению, а следовательно, и равносильному ему уравнению (24) удовлетворяют координаты единственной точки $O_1(-D; -E)$;

3) $D^2 + E^2 - F < 0$. Уравнение (25), а следовательно, и равносильное ему уравнение (24) не определяют при этом никакой линии, так как правая часть уравнения (25) отрицательна, а левая его часть как сумма квадратов отрицательной быть не может.

* То, что каждый из этих коэффициентов равен единице, несущественно, так как стоит лишь умножить обе части уравнения (23) на какое-нибудь число λ ($\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$), и коэффициенты при x^2 и y^2 в уравнении окружности уже не будут равны единице.

Пример 1. Показать, что уравнение $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ определяет окружность, и найти координаты ее центра и радиус.

Решение. Условия $A=C=1$ и $2B=0$ здесь выполняются. Преобразуем данное уравнение:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 1 - 4 - 11 = 0,$$

или

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16.$$

Мы получили уравнение окружности с центром $O_1(1; -2)$ и радиусом $R=4$.

Пример 2. Показать, что уравнение $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 22 = 0$ не определяет никакой линии.

Решение. Преобразуем это уравнение:

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 6y + 9) - 9 - 9 + 22 = 0,$$

или

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 = -4.$$

Теперь ясно, что данное уравнение не определяет никакой линии.

3. Эллипс

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина (при условии, что эта величина больше расстояния между фокусами).

Обозначим фокусы через F_1 и F_2 , расстояние между ними — через $2c$, а постоянную величину, равную сумме расстояний от каждой точки эллипса до фокусов, через $2a$ (по условию $2a > 2c$).

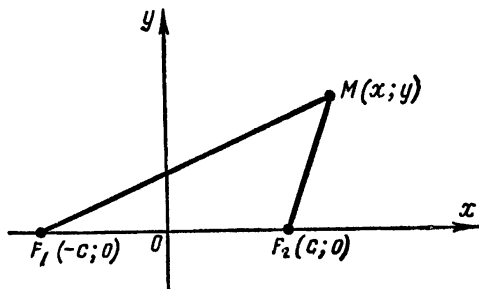


Рис. 44

Построим декартову систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 оказались на оси абсцисс, а начало координат совпало с серединой отрезка F_1F_2 (рис. 44). Тогда фокусы будут иметь следующие координаты: левый фокус $F_1(-c; 0)$ и правый фокус $F_2(c; 0)$. Выведем уравнение эллипса в выбранной нами системе координат. С этой целью рассмотрим произвольную точку $M(x; y)$ эллипса. По определению эллипса сумма расстояний от этой точки до фокусов F_1 и F_2 равна $2a$:

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Пользуясь формулой для расстояния между двумя точками, получим $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$; следовательно,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (26)$$

Для упрощения этого уравнения запишем его в форме

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возведя затем обе части уравнения в квадрат, получим

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

или, после очевидных упрощений:

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Теперь опять возводим обе части уравнения в квадрат, после чего будем иметь:

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2],$$

или, после тождественных преобразований:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (27)$$

Так как согласно условию в определении эллипса $2a > 2c$, то $a^2 - c^2$ — число положительное. Введем обозначение

$$a^2 - c^2 = b^2. \quad (28)$$

Тогда уравнение примет следующий вид:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (29)$$

По определению эллипса координаты любой его точки удовлетворяют уравнению (26). Но уравнение (29) является следствием уравнения (26). Следовательно, ему также удовлетворяют координаты любой точки эллипса.

Можно показать, что координаты точек, не лежащих на эллипсе, уравнению (29) не удовлетворяют. Таким образом, уравнение (29) есть уравнение эллипса. Оно называется *каноническим уравнением эллипса*.

Установим форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением.

Прежде всего обратим внимание на то, что это уравнение содержит только четные степени x и y . Это значит, что если какая-нибудь точка $M(x; y)$ принадлежит эллипсу, то ему принадлежат также точка $M'(x; -y)$, симметричная с точкой $M(x; y)$ относительно оси абсцисс, и точка $M''(-x; y)$, симметричная с точкой $M(x; y)$ относительно оси ординат. Таким образом, эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, которые в выбранной нами системе координат совпадают с координатными осями. Оси симметрии эллипса мы в дальнейшем будем называть *осями* эллипса, а точку их пересечения — *центром* эллипса. Та ось, на которой расположены фокусы эллипса (в данном случае ось абсцисс), называется *фокальной осью*.

Определим форму эллипса сначала в I четверти. Для этого раз-
решим уравнение (28) относительно y :

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Очевидно, что здесь $0 \leq x \leq a$, так как y при $x > a$ принимает
мнимые значения. При возрастании x от 0 до a y уменьшается от
 b до 0. Частью эллипса, лежащей в I четверти, будет дуга, огра-
ниченная точками $B(0; b)$ и $A(a; 0)$, лежащими на осях координат
(рис. 45). Воспользовавшись теперь
симметрией эллипса, приходим к за-
ключению, что эллипс имеет форму,
изображенную на рис. 45.

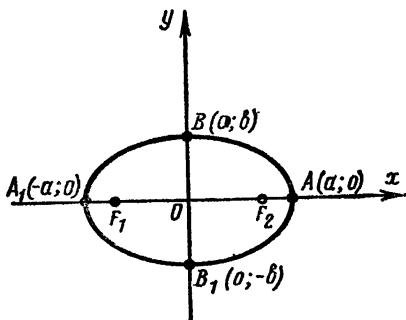


Рис. 45

Точки пересечения эллипса с
осями называются *вершинами* эллип-
са. Из симметрии эллипса следует,
что, кроме вершин $A(a; 0)$ и $B(0; b)$,
эллипс имеет еще две вершины
 $A_1(-a; 0)$ и $B_1(0; -b)$ (см. рис. 45).
Отрезки AA_1 и BB_1 , соединяющие
противоположные вершины эллипса,
а также их длины $2a$ и $2b$, назы-
ваются соответственно *большой* и *малой осями* эллипса. Числа a и b
называются соответственно *большой* и *малой полуосями* эллипса.
Отношение $\frac{c}{a}$ половины расстояния между фокусами к большой по-
луоси эллипса называется *эксцентриситетом* эллипса и обозна-
чается обычно буквой ϵ :

$$\epsilon = \frac{c}{a}. \quad (30)$$

Так как $c < a$, то эксцентриситет эллипса меньше единицы: $\epsilon < 1$.
Эксцентриситет характеризует форму эллипса. Действительно, из
формулы (28) следует, что $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 - \epsilon^2$. Отсюда видно,
что чем меньше эксцентриситет эллипса, тем меньше его малая
полуось b отличается от большой полуоси a , т. е. тем меньше вытя-
нут эллипс (вдоль фокальной оси).

В предельном случае при $b = a$ получится окружность радиуса a :
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, или $x^2 + y^2 = a^2$. При этом $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - a^2} = 0$,
и фокусы эллипса как бы сливаются в одной точке—центре окруж-
ности. Эксцентриситет окружности равен нулю:

$$\epsilon = \frac{0}{a} = 0.$$

Связь между эллипсом и окружностью может быть установлена
и с другой точки зрения. Покажем, что эллипс с полуосями a и b
можно рассматривать как проекцию окружности радиуса a .

Рассмотрим две плоскости P и Q , образующие между собой такой угол α , для которого $\cos \alpha = \frac{b}{a}$ (рис. 46). Построим в плоскости P систему координат OXY , а в плоскости Q — систему Oxy с общим началом координат O и общей осью абсцисс, совпадающей с линией пересечения плоскостей. Рассмотрим в плоскости P окружность

$$X^2 + Y^2 = a^2 \quad (31)$$

с центром в начале координат и радиусом равным a . Пусть $M(X; Y)$ — произвольно выбранная точка окружности, $N(x; y)$ — ее проекция на плоскость Q и $K(x; 0)$ — проекция точки M на ось Ox . Покажем, что точка $N(x; y)$ лежит на эллипсе с полуосями a и b .

В самом деле, по построению $X = x$. Кроме того, из треугольника KMN имеем:

$$y = KN = KM \cos \alpha = Y \cdot \frac{b}{a}, \text{ откуда}$$

$$Y = \frac{ay}{b}.$$

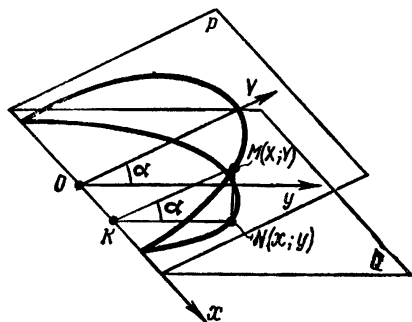


Рис. 46

Заменяя в уравнении (31) X и Y их выражениями через x и y , получим

$$x^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2 = a^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Мы видим, что координаты точки $N(x; y)$ удовлетворяют уравнению эллипса с полуосями a и b . Это значит, что проекция любой точки $M(X; Y)$ окружности (31) принадлежит эллипсу. Легко видеть, что и обратно, любая точка $N(x; y)$ эллипса есть проекция некоторой точки $M(X; Y)$ окружности. Итак, эллипс есть проекция окружности.

Пример 1. Найти каноническое уравнение эллипса, зная его большую полуось $a = 5$ и эксцентриситет $e = 0,6$.

Решение. По условию $e = \frac{c}{a} = 0,6$. Следовательно, половина расстояния между фокусами $c = a \cdot 0,6 = 5 \cdot 0,6 = 3$. Но тогда квадрат малой полуоси эллипса $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$. Таким образом, искомое каноническое уравнение эллипса имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Пример 2. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M_1(2; -3)$ и имеющего большую полуось $a = 4$.

Решение. Каноническое уравнение эллипса при $a=4$ имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (32)$$

Этому уравнению должны удовлетворять координаты точки $M_1(2; -3)$. Следовательно,

$$\frac{2^2}{16} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1.$$

Найдя отсюда $b^2=12$ и подставив его в уравнение (32), получим искомое каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

4. Гипербола

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, при условии, что эта величина не равна нулю и меньше расстояния между фокусами.

Обозначим расстояние между фокусами F_1 и F_2 через $2c$, а постоянную величину, равную модулю разности расстояний от каждой точки гиперболы до фокусов, через $2a$ (по условию $0 < 2a < 2c$). Как и в случае эллипса, ось абсцисс проведем через фокусы, а за начало координат примем середину отрезка F_1F_2 (см. рис. 44). Фокусы в такой системе будут иметь координаты $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$. Выведем уравнение гиперболы в выбранной системе координат. По определению гиперболы для любой ее точки $M(x; y)$ имеем $|MF_1 - MF_2| = 2a$, или

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a.$$

Но $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Поэтому получим

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (33)$$

После упрощений, подобных тем, которые были сделаны при выводе уравнения эллипса, получим следующее уравнение:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2), \quad (34)$$

которое является следствием уравнения (33).

Нетрудно заметить, что это уравнение совпадает с уравнением (27), полученным для эллипса. Однако в уравнении (34) разность $a^2 - c^2 < 0$, так как для гиперболы $2a < 2c$. Поэтому положим

$$c^2 - a^2 = b^2. \quad (35)$$

Тогда уравнение (34) приводится к следующему виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (36)$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением гиперболы*. Уравнению (36), как следствию уравнения (33), удовлетворяют координаты любой точки гиперболы. Можно показать, что координаты точек, не лежащих на гиперболе, уравнению (36) не удовлетворяют.

Установим форму гиперболы, пользуясь ее каноническим уравнением. Это уравнение содержит лишь четные степени текущих координат. Следовательно, гипербола имеет две оси симметрии, в данном случае совпадающих с координатными осями. В дальнейшем оси симметрии гиперболы мы будем называть *осями гиперболы*, а точку их пересечения — *центром гиперболы*. Ось гиперболы, на которой расположены фокусы, называется *фокальной осью*. Исследуем форму гиперболы в I четверти, где

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (37)$$

Здесь $x \geq a$, так как иначе y принимал бы мнимые значения. При возрастании x от a до $+\infty$ y возрастает от 0 до $+\infty$. Частью гиперболы, лежащей в I четверти, будет дуга AM , изображенная на рис. 47.

Так как гипербола расположена симметрично относительно координатных осей, то эта кривая имеет вид, изображенный на рис. 47.

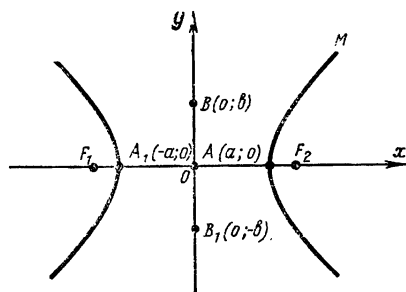


Рис. 47

Точки пересечения гиперболы с фокальной осью называются ее *вершинами*. Полагая $y=0$ в уравнении гиперболы, найдем абсциссы ее вершин: $x = \pm a$. Таким образом, гипербола имеет две вершины: $A(a; 0)$ и $A_1(-a; 0)$. С осью ординат гипербола не пересекается. В самом деле, положив в уравнении гиперболы $x=0$, получим для y мнимые значения: $y = \pm \sqrt{-b^2}$. Поэтому фокальная ось гиперболы называется *дей-*

ствительной осью, а ось симметрии, перпендикулярная фокальной оси, — *мнимой осью* гиперболы.

Действительной осью также называется отрезок, соединяющий вершины гиперболы, и его длина $2a$. Отрезок, соединяющий точки $B(0; b)$ и $B_1(0; -b)$ (см. рис. 47), а также его длина $2b$ называется *мнимой осью* гиперболы. Числа a и b соответственно называются *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы.

Рассмотрим теперь гиперболу, расположенную в I четверти и являющуюся графиком функции

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Покажем, что точки этого графика, расположенные на достаточно большом расстоянии от начала координат, сколь угодно близки к прямой

$$y = \frac{b}{a} x, \quad (38)$$

проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент $k = \frac{b}{a}$.

С этой целью рассмотрим две точки $M(x; y)$ и $N(x; Y)$, имеющие одну и ту же абсциссу x и лежащие соответственно на кривой (37) и прямой (38) (рис. 48), и составим разность между ординатами этих точек *:

$$\begin{aligned} Y - y &= \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \\ &= \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \\ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \\ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

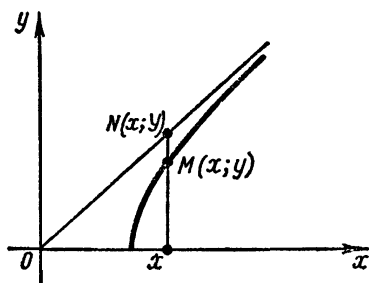


Рис. 48

Числитель этой дроби — величина постоянная, а знаменатель неограниченно возрастает при неограниченном возрастании x . Поэтому разность $Y - y$ стремится к нулю, т. е. точки M и N неограниченно сближаются при неограниченном возрастании абсциссы.

Из симметрии гиперболы относительно координатных осей следует, что имеется еще одна прямая $y = -\frac{b}{a}x$, к которой сколь угодно близки точки гиперболы при неограниченном удалении от начала координат. Прямые

$$y = \frac{b}{a}x$$

и

$$y = -\frac{b}{a}x \quad (39)$$

называются *асимптотами* гиперболы.

На рис. 49 указано взаимное расположение гиперболы и ее асимптот. На этом рисунке указано также, как построить асимп-

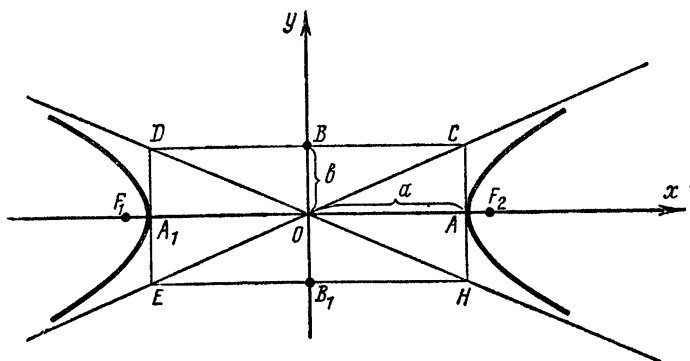


Рис. 49

* Ордината точки прямой обозначена через Y , для того чтобы отличить ее от ординаты y точки, лежащей на гиперболы.

тоты гиперболы. Для этого следует построить прямоугольник $CDEH$ с центром в начале координат и со сторонами, параллельными осям Ox и Oy и соответственно равными $2a$ и $2b$. Этот прямоугольник называется *основным*. Каждая из его диагоналей, неограниченно продолженная в обе стороны, является асимптотой гиперболы. Перед построением гиперболы рекомендуется строить ее асимптоты.

Отношение половины расстояния между фокусами к действительной полуоси гиперболы называется *эксцентриситетом* гиперболы и обозначается обычно буквой ε :

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (40)$$

Так как для гиперболы $c > a$, то эксцентриситет гиперболы больше единицы: $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет характеризует форму гиперболы. Действительно, из формулы (35) следует, что $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = \varepsilon^2 - 1$. Отсюда видно, что чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем меньше отношение $\frac{b}{a}$ ее полуосей. Но отношение $\frac{b}{a}$ определяет форму основного прямоугольника гиперболы, а следовательно, и форму самой гиперболы. Чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем более вытянут ее основной прямоугольник (в направлении фокальной оси).

Гипербола называется *равносторонней* (или *равнобочной*), если ее действительная полуось равна мнимой полуоси: $a = b$. Каноническое уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

или

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (41)$$

Асимптоты равносторонней гиперболы имеют уравнения

$$y = x \quad (42)$$

и

$$y = -x \quad (42')$$

и, следовательно, являются биссектрисами координатных углов.

Эксцентриситет равносторонней гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}.$$

Пример 1. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная что расстояние между ее фокусами равно 26, а эксцентриситет равен $\frac{13}{12}$.

Решение. По условию $2c = 26$ и $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$. Следовательно, большая полуось гиперболы $a = \frac{12}{13} \cdot c = \frac{12}{13} \cdot \frac{26}{2} = 12$. Согласно формуле (35) малая полуось гиперболы $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

Уравнение гиперболы имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Пример 2. Гипербола, оси которой совпадают с осями координат, проходит через точки $M_1(-3; \frac{\sqrt{2}}{2})$ и $M_2(4; -2)$. Найти ее каноническое уравнение.

Решение. Напишем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты точек $M_1(-3; \frac{\sqrt{2}}{2})$ и $M_2(4; -2)$. Следовательно,

$$\frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \text{ и } \frac{4^2}{a^2} - \frac{(-2)^2}{b^2} = 1,$$

или

$$\frac{9}{a^2} - \frac{1}{2b^2} = 1 \text{ и } \frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1.$$

Отсюда находим $a^2 = 8$ и $b^2 = 4$ и подставляем их в каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

5. Парабола

Определение. *Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки F , называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.* (Предполагается, что фокус не лежит на директрисе.)

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы через p . Эта величина называется *параметром* параболы.

Выведем уравнение параболы. Расположим ось абсцисс так, чтобы она проходила через фокус перпендикулярно директрисе и имела положительное направление от директрисы к фокусу (рис. 50). За начало координат выберем середину перпендикуляра FR , опущенного из фокуса на директрису. В выбранной таким образом системе координат фокус будет иметь координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. Уравнение директрисы будет иметь следующий вид:

$$x = -\frac{p}{2}. \quad (43)$$

Пусть $M(x; y)$ — точка параболы. По определению параболы, расстояние MN точки $M(x; y)$ от директрисы равно ее расстоянию MF от фокуса: $MN = MF$.

Из рис. 50 ясно, что $MN = NQ + QM = \frac{p}{2} + x$, а $MF =$
 $= \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2}$. Следовательно,

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2,$$

или, после упрощений

$$y^2 = 2px. \quad (44)$$

Уравнение (44) называется *каноническим уравнением параболы*. Ему, очевидно, удовлетворяют координаты любой точки параболы. Можно показать, что координаты точек, не лежащих на параболы, уравнению (44) не удовлетворяют.

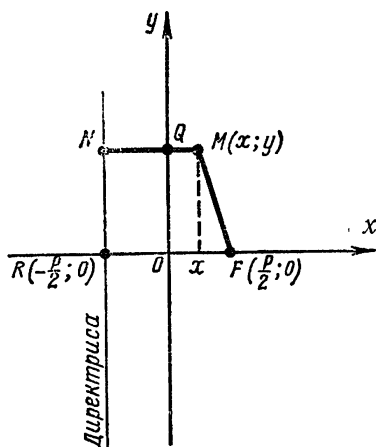


Рис. 50

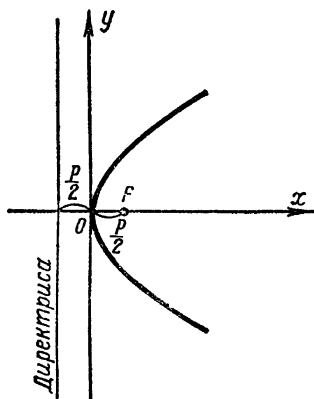


Рис. 51

Исследуем форму параболы по ее каноническому уравнению. Так как в это уравнение y входит лишь в четной степени (в квадрате), то ось абсцисс является *осью симметрии* параболы. Вся кривая расположена справа от оси ординат, так как левая часть уравнения (44) неотрицательна, и, следовательно, x , стоящий в правой части этого уравнения, не может быть отрицательным. При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат. При неограниченном возрастании x абсолютная величина y также неограниченно возрастает. Парабола, определяемая уравнением (44), имеет вид, изображенный на рис. 51.

Ось симметрии параболы называется *фокальной осью*. Точка пересечения параболы с осью симметрии называется ее *вершиной*. В данном случае вершина параболы совпадает с началом координат.

Пример. Дана парабола $y^2 = 6x$. Составить уравнение ее директрисы и найти ее фокус.

Решение. Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы (44), видим, что $2p=6$, $p=3$. Так как директриса параболы имеет уравнение $x=-\frac{p}{2}$, а фокус—координаты $\frac{p}{2}$ и 0, то уравнение директрисы $x=-\frac{3}{2}$, а фокус $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

Замечание. Если фокальную ось параболы принять за ось ординат, то уравнение параболы примет вид

$$x^2 = 2py. \quad (45)$$

6. Окружность, эллипс, гипербола и парабола как конические сечения

Круговым конусом называется поверхность, которая получится при вращении прямой вокруг другой прямой (оси вращения), пересекающей данную прямую. При этом вращающаяся прямая в любом своем положении называется *образующей* конуса, а точка пересечения прямой с осью вращения называется *вершиной* конуса. Конус имеет две полости, отделяемые друг от друга его вершиной.

Окружность, эллипс, гипербола и парабола могут быть получены сечениями кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину. (Доказательство этого мы опускаем.) Поэтому эти кривые называются *коническими сечениями*.

Если плоскость перпендикулярна оси конуса, то в сечении получится окружность.

Если плоскость не перпендикулярна оси, пересекает лишь одну полость конуса и не параллельна ни одной из его образующих, то в сечении получится эллипс.

Если плоскость пересекает одну полость конуса параллельно какой-нибудь одной его образующей, то в сечении получится парабола.

Наконец, если плоскость пересекает обе полости конуса, то в сечении получится гипербола (рис. 52).

Кривые второго порядка имеют большое применение в различных областях науки и техники. Приведем некоторые примеры.

1. Известно, что планеты солнечной системы движутся по эллипсам, имеющим общий фокус, в котором расположено солнце.

2. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то снаряд, выпущенный под углом к горизонту, описывает параболу.

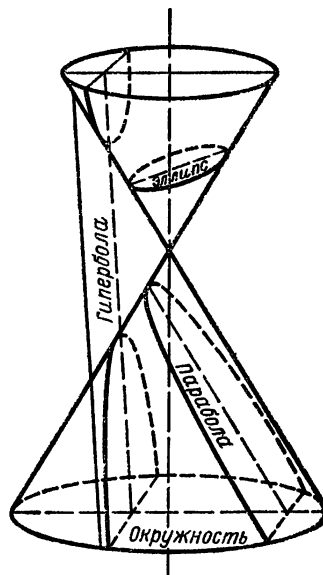


Рис. 52

3. Если в фокусе параболы поместить источник света, то лучи, отразившись от параболы, пойдут параллельно ее оси. На этом свойстве основано устройство прожектора.

4. Как доказывается в механике, ракета, запущенная с поверхности земли под некоторым углом к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 11,2$ км/сек (вторая космическая скорость), будет двигаться по параболе, неограниченно удаляясь от поверхности земли. При начальной скорости $v_0 > 11,2$ км/сек ракета также будет неограниченно удаляться от поверхности земли, двигаясь уже по гиперболе. Наконец, при начальной скорости $v_0 < 11,2$ км/сек ракета, двигаясь по эллипсу, либо упадет снова на землю, либо станет искусственным спутником Земли.

7. Упрощение уравнения кривой второго порядка. График квадратного трехчлена

Вид уравнения кривой зависит от выбора системы координат. В различных системах координат для одной и той же кривой мы можем получить уравнения различной сложности. Поэтому часто ставится следующая задача. Дано уравнение кривой второго порядка в некоторой декартовой системе координат Oxy , не являющееся простейшим. Требуется с помощью преобразования координат (см. гл. I, § 6) получить простейшее уравнение данной кривой и по виду этого уравнения определить тип кривой, т. е. выяснить, является ли кривая эллипсом, гиперболой и т. д.

Пусть, например, дано уравнение

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (46)$$

в правой части которого стоит квадратный трехчлен. Для того чтобы получить простейшее уравнение данной кривой, воспользуемся формулами параллельного переноса осей (см. гл. I, § 6, п. 1):

$$\left. \begin{aligned} x &= X + x_0, \\ y &= Y + y_0, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

в которых x_0 и y_0 — координаты нового начала O_1 . Подставив в уравнение (46) вместо старых координат x и y их выражения через новые координаты X и Y , получим

$$Y + y_0 = a(X + x_0)^2 + b(X + x_0) + c,$$

или, после упрощений,

$$Y = aX^2 + (2ax_0 + b)X + ax_0^2 + bx_0 + c - y_0. \quad (48)$$

Выберем координаты нового начала x_0 и y_0 так, чтобы в правой части уравнения (48) коэффициент при X в первой степени и свободный член обратились в нуль, т. е. чтобы были выполнены условия

$$\left. \begin{aligned} 2ax_0 + b &= 0, \\ ax_0^2 + bx_0 + c - y_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Решая эту систему уравнений относительно неизвестных x_0 и y_0 , получим:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}. *$$

При таком выборе координат начала O_1 новой системы уравнение (48) примет вид

$$Y = aX^2,$$

т. е. будет простейшим уравнением параболы, для которой ось O_1Y является осью симметрии.

Таким образом, график квадратного трехчлена

$$y = ax^2 + bx + c$$

есть парабола с осью симметрии, параллельной оси ординат, и с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Аналогично можно показать, что кривая $x = ay^2 + by + c$ есть парабола с осью симметрии, параллельной оси абсцисс, и с вершиной в точке $\left(\frac{4ac - b^2}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$.

Пример. Привести уравнение параболы $y = 2x^2 - 8x + 11$ к простейшему виду и найти координаты вершины.

Решение. Заменяя в данном уравнении x и y их выражениями через X и Y по формулам (47), получим

$$Y + y_0 = 2(X + x_0)^2 - 8(X + x_0) + 11,$$

или

$$Y = 2X^2 + (4x_0 - 8)X + 2x_0^2 - 8x_0 + 11 - y_0.$$

Полагая

$$4x_0 - 8 = 0, \quad 2x_0^2 - 8x_0 + 11 - y_0 = 0,$$

получим координаты нового начала — вершины параболы: $x_0 = 2$; $y_0 = 3$. При этом уравнение параболы будет иметь вид $Y = 2X^2$.

8. Уравнение равносторонней гиперболы, асимптоты которой приняты за оси координат

Покажем, что графиком функции

$$y = \frac{k}{x} \tag{50}$$

является равносторонняя гипербола с асимптотами, совпадающими с координатными осями.

Для этого, повернув оси координат на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (рис. 53), получим новую систему координат OXY , причем $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$ (см. гл. I, § 6, п. 2, пример).

* Из второго уравнения (49) видно, что $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

Подставляя эти выражения для x и y в уравнение (50), получим

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) = \frac{k}{\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)},$$

или, после упрощений,

$$X^2 - Y^2 = 2k.$$

Это уравнение равносторонней гиперболы. Ее действительная ось при $k > 0$ совпадает с осью OX , а при $k < 0$ — с осью OY (на рис. 53

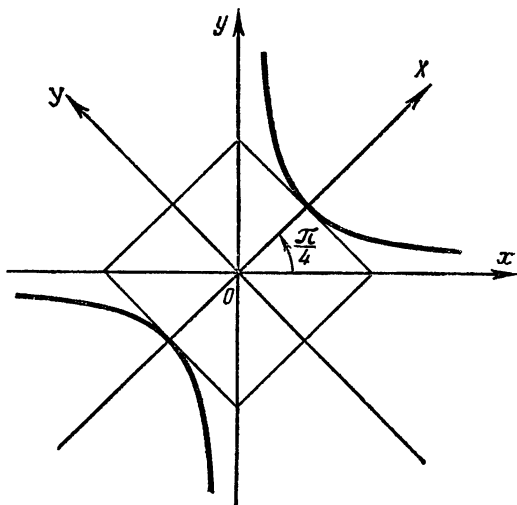


Рис. 53

предполагается $k > 0$). При этом старые оси Ox и Oy служат биссектрисами координатных углов новой системы OXY и, следовательно, являются асимптотами равносторонней гиперболы. Действительная полуось гиперболы $a = \sqrt{2 \cdot |k|}$. Таким образом, графиком функции $y = \frac{k}{x}$ является равносторонняя гипербола, для которой асимптотами служат оси координат Ox и Oy .

9. График дробно-линейной функции

Дробно-линейной называется функция вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (51)$$

где a , b , c и d — постоянные, причем $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$. Покажем, что графиком этой функции является равносторонняя гипербола с асимптотами, параллельными осям координат.

Разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части уравнения (51), на c и введем обозначения $\frac{a}{c} = \alpha$; $\frac{b}{c} = \beta$; $\frac{d}{c} = \gamma$.

Тогда получим

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma}.$$

Правую часть этого уравнения преобразуем следующим образом:

$$\frac{\alpha x + \beta}{x + \gamma} = \frac{\alpha x + \alpha \gamma + \beta - \alpha \gamma}{x + \gamma} = \frac{\alpha(x + \gamma) + \beta - \alpha \gamma}{x + \gamma} = \alpha + \frac{\beta - \alpha \gamma}{x + \gamma}.$$

Таким образом,

$$y = \alpha + \frac{\beta - \alpha \gamma}{x + \gamma},$$

или

$$y - \alpha = \frac{\beta - \alpha \gamma}{x + \gamma}.$$

Положим $x + \gamma = X$ и $y - \alpha = Y$, т. е. сделаем преобразование параллельного переноса осей $x = X - \gamma$ и $y = Y + \alpha$ с новым началом $O_1(-\gamma; \alpha)$. Тогда получим

$$Y = \frac{\beta - \alpha \gamma}{X}.$$

Согласно п. 8, это уравнение равно-
сторонней гиперболы с асимптотами O_1X и O_1Y , соответственно параллельными осями старой системы Ox и Oy (рис. 54).

Итак, графиком дробно-линейной функции (51) является равно-
сторонняя гипербола с асимптотами, параллельными координатным осям. Центр этой гиперболы нахо-

дится в точке $O_1(-\gamma; \alpha)$, где $\alpha = \frac{a}{c}$; $\gamma = \frac{d}{c}$.

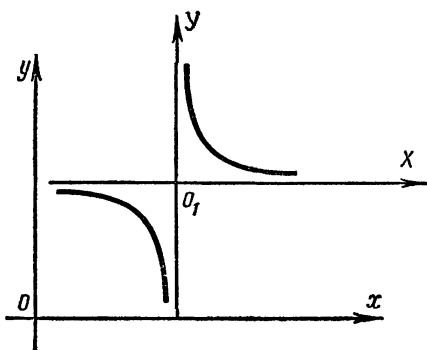


Рис. 54

10. Преобразование уравнения кривой второго порядка, не содержащего члена с произведением координат

Мы рассмотрели четыре кривые второго порядка: окружность, эллипс, гиперболу и параболу. Возникает вопрос: существуют ли иные линии, определяемые уравнением второй степени $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим примеры.

1) Уравнению второй степени относительно x и y $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ удовлетворяют координаты единственной точки $(x_0; y_0)$ (см. § 2, п. 2).

2) Уравнение $x^2 - y^2 = 0$ может быть записано в виде $(x - y) \times (x + y) = 0$, и тогда становится ясным, что ему удовлетворяют координаты любой точки прямой $x - y = 0$ и любой точки прямой $x + y = 0$ (и только координаты этих точек). Прямые $x - y = 0$ и $x + y = 0$ (биссектрисы координатных углов) пересекаются между

собой в начале координат. Уравнение $x^2 - y^2 = 0$ есть уравнение двух пересекающихся прямых.

3) Уравнению $y^2 = 4$, которое можно записать в форме $(y-2) \times (y+2) = 0$, удовлетворяют координаты точек параллельных прямых $y-2=0$ и $y+2=0$ (и только этих точек). Следовательно, уравнение $y^2 = 4$ есть уравнение двух параллельных прямых.

4) Уравнение $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ может быть переписано в виде $(x-y)^2 = 0$ и, следовательно, равносильно уравнению прямой $x-y=0$ (биссектрисы I и III координатных углов). Условно мы будем говорить, что уравнение $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ является уравнением двух слившихся прямых.

5) Наконец, может случиться, что уравнение второй степени относительно x и y не определяет никакой линии. Например, уравнению $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не удовлетворяют никакие действительные значения x и y , и, следовательно, оно не определяет никакого геометрического места точек.

Таким образом, в зависимости от значения коэффициентов уравнение второй степени (21)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

может определять окружность, эллипс, гиперболу, параболу, пару пересекающихся прямых, пару параллельных прямых, пару слившихся прямых, точку и, наконец, может не определять никакой линии.

Можно показать, что это уравнение не может определять никакой линии, отличной от перечисленных выше.

Для того чтобы определить, какую линию определяет уравнение (21) при заданных численных значениях коэффициентов, пользуются преобразованиями поворота и параллельного переноса осей координат. В гл. III будет показано, что с помощью преобразования поворота осей всегда можно от уравнения (21) перейти к уравнению второй степени, не содержащему члена с произведением координат. А далее, с помощью преобразования параллельного переноса осей всегда можно получить простейшее уравнение кривой второго порядка и по нему определить вид кривой. Покажем на примере, как это делается.

Пример. С помощью параллельного переноса осей получить простейшее уравнение кривой $x^2 - 2y^2 + 2x + 12y - 33 = 0$ и построить ее.

Решение. Для членов, содержащих x , и членов, содержащих y , выполним следующие преобразования с выделением полного квадрата:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1; \\ -2y^2 + 12y &= -2(y^2 - 6y) = -2(y^2 - 6y + 9 - 9) = -2(y-3)^2 + 18. \end{aligned}$$

Данное уравнение теперь можно переписать так:

$$(x+1)^2 - 2(y-3)^2 - 1 + 18 - 33 = 0,$$

откуда

$$(x+1)^2 - 2(y-3)^2 = 16,$$

или

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{8} = 1.$$

Выполним преобразование параллельного переноса осей с новым началом $O_1(-1; 3)$:

$$x = X - 1; \quad y = Y + 3.$$

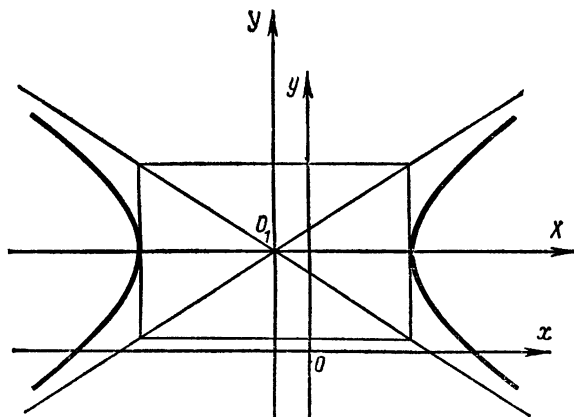


Рис. 55

Тогда уравнение кривой примет вид

$$\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{8} = 1.$$

Это уравнение гиперболы с полуосями $a=4$ и $b=2\sqrt{2}$. На рис. 55 эта кривая построена в системе координат O_1XY . Но можно отнести ее и к исходной системе координат Oxy , которая также имеется на рис. 55.

ГЛАВА III

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Определители второго порядка и их свойства

Пусть дана таблица (называемая *матрицей*), состоящая из четырех чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Матрица имеет две строки $a_{11}a_{12}$ и $a_{21}a_{22}$ и два столбца a_{11} и a_{12} a_{21} и a_{22} .

Числа, составляющие эту матрицу, обозначены буквой с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, а второй — номер столбца, в которых стоит данное число. Например, a_{12} означает число, стоящее в первой строке и втором столбце; a_{21} — число, стоящее во второй строке и первом столбце. Числа a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} будем называть *элементами* матрицы.

Определителем (или детерминантом) второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число, получаемое следующим образом: $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Определитель обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (2)$$

Числа a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} называются *элементами* определителя.

Пример. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 5 \cdot 3 = -23.$

Приведем свойства определителя второго порядка.

Свойство 1. *Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами, т. е.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Свойство 2. *При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную*

величину, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Свойство 3. *Определитель с двумя одинаковыми строками (или столбцами) равен нулю.*

Свойство 4. *Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно выносить за знак определителя:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Свойство 5. *Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.*

Свойство 6. *Если к какой-либо строке (или столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины, т. е.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Все свойства определителя второго порядка доказываются простой проверкой, основанной на правиле вычисления определителей (формула 2).

Докажем, например, свойство (6). Для этого вычислим определитель, стоящий в левой части равенства (6):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} &= (a_{11} + \lambda a_{12}) a_{22} - (a_{21} + \lambda a_{22}) a_{12} = \\ &= a_{11} a_{22} + \lambda a_{12} a_{22} - a_{21} a_{12} - \lambda a_{22} a_{12} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

2. Определитель третьего порядка

Рассмотрим таблицу (матрицу), состоящую из девяти чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Определителем (или детерминантом) третьего порядка, соответствующим данной матрице, называют число, получаемое следующим образом:

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Определитель третьего порядка обозначают символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ называют его элементами. Определитель третьего порядка имеет три строки и три столбца. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Формула (8) дает разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки $a_{11}a_{12}a_{13}$ и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

Назовем *минором*, соответствующим данному элементу определителя третьего порядка, определитель второго порядка, полученный из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Миноры будем обозначать заглавными буквами M с двумя индексами. Так, например, минором M_{12} , соответствующим элементу a_{12} , будет определитель $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$. Он получается, если вычеркнуть из определителя третьего порядка первую строку и второй столбец.

Формула (8) показывает, что определитель третьего порядка равен алгебраической сумме попарных произведений элементов первой строки на соответствующие им миноры; при этом минор, соответствующий элементу a_{12} , берется со знаком минус.

Применяя правило вычисления определителей второго порядка, соотношение (8) перепишем в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}. \quad (9)$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = \\ = 2 \cdot 18 - 3 \cdot (-41) - 4 \cdot (-48) = 351.$$

Все свойства определителей второго порядка (см. п. 1) остаются справедливыми для определителей третьего порядка. Доказательства этих свойств для определителей третьего порядка ничем не отличаются от доказательств аналогичных свойств для определителей второго порядка и основаны на вычислении определителя третьего порядка по формуле (8). Рекомендуем читателю эти свойства доказать самостоятельно.

Аналогично формуле (8), дающей разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки, можно получить разложение определителя по элементам любой строки или столбца.

Например, разложение определителя по элементам второй строки можно получить следующим образом. По второму свойству (см. п. 1), имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (*)$$

Разложим определитель, стоящий справа, по элементам первой строки. Согласно правилу вычисления определителя,

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Принимая во внимание равенство (*), получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

По определители $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ суть миноры элементов a_{21} , a_{22} , a_{23} в данном определителе. Формула (10) дает разложение определителя по элементам второй строки.

Поменяв местами первую строку с третьей, докажем аналогично, что

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{22}a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{21}a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Формула (11) дает разложение определителя по элементам третьей строки.

Обозначая данный определитель третьего порядка через Δ , запишем формулы (8), (10) и (11) в виде:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}, \\ \Delta &= -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}, \\ \Delta &= a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33}. \end{aligned} \quad (12)$$

Можно доказать, что аналогичные разложения будут иметь место при разложении по элементам столбцов:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}, \\ \Delta &= -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32}, \\ \Delta &= a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}. \end{aligned} \quad (13)$$

Введем еще одно понятие.

Назовем алгебраическим дополнением элемента определителя его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, в которых стоит элемент, четна, и со знаком минус, если эта сумма нечетна.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} обозначается через A_{ik} . Здесь i означает номер строки, а k — номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

Связь между алгебраическим дополнением элемента и его минором дается следующим равенством:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}. \quad (14)$$

Например: $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$, $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$, $A_{13} = M_{13}$ и т. д.

Легко видеть, что формулы (12) и (13) для вычисления определителей можно переписать теперь следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \\ \Delta &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \\ \Delta &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{aligned} \quad (15)$$

для разложения определителя по элементам строк и

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, \\ \Delta &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \\ \Delta &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \end{aligned} \quad (16)$$

для разложения определителя по элементам столбцов.

Этот результат можно сформулировать следующим образом. *Определитель третьего порядка равен сумме попарных произведений элементов какой-либо его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.*

Укажем еще одно важное свойство определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или столбца) равна нулю.

Например,

$$\text{для строк} \quad a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0; \quad (17)$$

$$\text{для столбцов:} \quad a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0. \quad (18)$$

Проверим, например, равенство (17). Используя равенство (14) и определение минора элемента определителя, можем написать:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} &= a_{11}(-M_{21}) + a_{12}M_{22} + a_{13}(-M_{23}) = \\ &= -a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = \\ &= -a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{11}a_{33} - a_{12}a_{13}a_{31} - \\ &\quad - a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{12}a_{31} = 0. \end{aligned}$$

Подобным же образом проверяются и остальные равенства.

3. Понятие об определителях высших порядков

Во многих задачах, кроме определителей второго и третьего порядка, встречаются также определители более высоких порядков. Например, определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

и, вообще, определитель n -го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель четвертого порядка вычисляется по формуле, аналогичной формуле (8):

$$\begin{aligned} \Delta = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \\ & - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Определители третьего порядка в правой части равенства называются минорами элементов a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{14} .

Обозначая, как и прежде, алгебраические дополнения элементов a_{ik} через A_{ik} , определитель четвертого порядка Δ можно представить в виде

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}.$$

Эта формула дает разложение определителя четвертого порядка по элементам первой строки.

Аналогично вычисляются определители более высоких порядков.

Все свойства определителей второго и третьего порядков остаются справедливыми для определителей любого порядка.

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \left\{ 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \right. \\
& - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \left. \right\} + 2 \left\{ 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \right. \\
& - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \left. \right\} = 3 [3(-2) - 2 + 4 \cdot 4] + \\
& + 2 [2(-2) - 3(-15) + 4(-20)] = 24 - 78 = -54.
\end{aligned}$$

§ 2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Применим изложенную выше теорию определителей к решению систем уравнений первой степени.

1. Система двух уравнений с двумя неизвестными

Рассмотрим систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными x и y :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2. \end{cases} \quad (19)$$

В обозначении коэффициента a_{ik} первый индекс означает номер уравнения, а второй индекс — номер неизвестного.

Решим эту систему. Для этого почленно умножим первое уравнение на a_{22} , второе на $(-a_{12})$ и сложим полученные уравнения:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = c_1a_{22} - c_2a_{12}. \quad (20)$$

Аналогично, почленно умножая первое уравнение на $(-a_{21})$, второе на a_{11} и складывая, получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = c_2a_{11} - c_1a_{21}. \quad (21)$$

Но на основании формулы (2) (см. § 1, п. 1) можно написать

$$\begin{aligned}
a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad c_1a_{22} - c_2a_{12} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \\
c_2a_{11} - c_1a_{21} &= \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Сокращенно эти определители будем обозначать так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Определитель Δ , составленный из коэффициентов при неизвестных системы (19), называется *определителем системы*. Определитель Δ_x (или Δ_y) получается из определителя системы Δ , если в нем коэффициенты a_{11} и a_{21} (или a_{12} и a_{22}) при неизвестном x (или y) заменить свободными членами c_1 и c_2 . Принимая во внимание (22),

равенства (20) и (21) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\Delta \cdot x &= \Delta_x, \\ \Delta \cdot y &= \Delta_y.\end{aligned}\tag{23}$$

Здесь возможны два случая.

I. Определитель системы $\Delta \neq 0$. Тогда поделив обе части каждого из уравнений (23) на Δ , найдем:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\tag{24}$$

или в развернутом виде

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.\tag{25}$$

Формулы (24) (или 25), называемые *формулами Крамера**, дают решение системы (19). (Рекомендуем это проверить.)

Итак, если определитель Δ системы (19) отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам (24) или (25).

II. Определитель системы $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$, т. е. $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$. В этом случае коэффициенты при неизвестных одного уравнения пропорциональны коэффициентам при неизвестных другого уравнения. Действительно, предположим, что один из них, например, $a_{11} \neq 0$ и обозначим $\frac{a_{21}}{a_{11}} = \lambda$, откуда $a_{21} = \lambda a_{11}$. Тогда из равенства $a_{11}a_{22} = a_{21}a_{12}$ найдем, что $a_{22} = \lambda a_{12}$. Учитывая это, систему (19) можно записать в виде

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = c_2. \end{cases}\tag{26}$$

Здесь возможны два подслучая.

1) Оба определителя Δ_x и Δ_y равны нулю: $\Delta_x = c_1a_{22} - c_2a_{12} = 0$, $\Delta_y = c_2a_{11} - c_1a_{21} = 0$. Отсюда находим, что $c_2 = \lambda c_1$ (так как $a_{22} = \lambda a_{12}$). В этом случае числа a_{21} , a_{22} , c_2 пропорциональны числам a_{11} , a_{12} , c_1 , и система (19) может быть записана в виде

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ \lambda(a_{11}x + a_{12}y) = c_1\lambda. \end{cases}\tag{27}$$

Таким образом, второе уравнение системы получается из первого уравнения умножением обеих его частей на λ , т. е. является следствием первого уравнения. В этом случае, очевидно, система (19) имеет *бесчисленное множество решений*. Задавая, например, произвольное значение y , получим соответствующее значение $x = \frac{c_1 - a_{12}y}{a_{11}}$.

* Крамер Г. (1704—1752) — швейцарский математик.

2) Хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y не равен нулю. Пусть, например, $\Delta_y = a_{11}c_2 - a_{21}c_1 \neq 0$. Тогда $a_{11}c_2 \neq a_{21}c_1$ и, следовательно, $c_2 \neq \lambda c_1$. В этом случае, как видно из (26), второе из уравнений $\lambda(a_{11}x + a_{12}y) = c_2$ противоречит первому уравнению $a_{11}x + a_{12}y = c_1$. Следовательно, система (19) не имеет решения (или, как говорят, несовместна).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - 5y = 2. \end{cases}$$

Решение. Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -22, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -41, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -24.$$

Так как определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам (24):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{41}{22}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{24}{22} = \frac{12}{11}.$$

Геометрически это означает, что прямые, заданные уравнениями $2x + 3y = 7$ и $4x - 5y = 2$, пересекаются в точке $M\left(\frac{41}{22}; \frac{12}{11}\right)$ (см. гл. II, § 1, п. 5).

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3, \\ 4x + 10y = 6. \end{cases}$$

Решение. Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Второе уравнение получается из первого умножением обеих частей первого уравнения на $\lambda = 2$. Поэтому система равносильна одному уравнению $2x + 5y = 3$ и имеет бесчисленное множество решений. Придавая произвольные значения неизвестному y , найдем $x = \frac{3-5y}{2}$.

Так, например, если $y = 0$, то $x = \frac{3}{2}$; если $y = 1$, то $x = -1$, и т. д. Геометрически это означает, что уравнениям $2x + 5y = 3$ и $4x + 10y = 6$ соответствует одна и та же прямая.

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} 5x + 3y = 7, \\ 10x + 6y = 2. \end{cases}$$

Решение. Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36 \neq 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = -60 \neq 0.$$

Следовательно, данная система несовместна, т. е. не имеет решений. В этом убеждаемся и непосредственно. Умножая почленно обе части

первого уравнения на (-2) и складывая со вторым уравнением, приходим к противоречивому равенству $0 = -12$. Геометрически это означает, что прямые $5x + 3y - 7$ и $10x + 6y = 2$ параллельны и, следовательно, не имеют общих точек.

2. Однородная система двух уравнений первой степени с тремя неизвестными

Однородная система двух уравнений с тремя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Решим эту систему. Предположим, что определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, и запишем систему (28) в виде

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z, \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z. \end{cases} \quad (29)$$

Тогда для любого значения z система (29) имеет единственное решение, определяемое по формулам (25) п. 1:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}z & a_{12} \\ -a_{23}z & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}z \\ a_{21} & -a_{23}z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Используя свойства определителей (см. § 1, п. 1), имеем

$$\begin{vmatrix} -a_{13}z & a_{12} \\ -a_{23}z & a_{22} \end{vmatrix} = -z \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}z \\ a_{21} & -a_{23}z \end{vmatrix} = -z \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \cdot z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \cdot (-z). \quad (30)$$

Обозначим

$$\frac{z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = k, \quad \text{тогда } z = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Подставляя выражение z в равенства (30), получим

$$x = k \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad y = -k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad z = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (31)$$

Итак, все решения системы (28) определяются по формулам (31). Определители в формулах (31) получаются из таблицы (матрицы)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad (32)$$

поочередным вычеркиванием соответствующего столбца. Придавая коэффициенту k различные числовые значения, получим различные тройки чисел x, y, z , являющиеся решениями системы (28).

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0, \\ 4x + 2y - 6z = 0. \end{cases}$$

Решение. Применяя формулы (31), получим:

$$x = k \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -28k, \quad y = -k \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 32k, \quad z = k \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8k.$$

Итак, все решения системы задаются равенствами $x = -28k$, $y = 32k$, $z = -8k$. Придавая k конкретные числовые значения, получим различные решения системы. Так, например, при $k = 1$ имеем: $x = -28$, $y = 32$, $z = -8$; при $k = -\frac{1}{4}$: $x = 7$, $y = -8$, $z = 2$ и т. д.

3. Система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

Рассмотрим систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3. \end{cases} \quad (33)$$

Определитель третьего порядка, составленный из коэффициентов при неизвестных,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*.

Решим систему (33). Для этого умножим почленно первое уравнение системы на алгебраическое дополнение A_{11} элемента a_{11} , второе уравнение на алгебраическое дополнение A_{21} элемента a_{21} и третье уравнение на алгебраическое дополнение A_{31} элемента a_{31} :

$$\begin{aligned} A_{11}a_{11}x + A_{11}a_{12}y + A_{11}a_{13}z &= A_{11}c_1, \\ A_{21}a_{21}x + A_{21}a_{22}y + A_{21}a_{23}z &= A_{21}c_2, \\ A_{31}a_{31}x + A_{31}a_{32}y + A_{31}a_{33}z &= A_{31}c_3. \end{aligned}$$

Сложим все эти уравнения:

$$(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31})x + (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32})y + (A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33})z = A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + A_{31}c_3. \quad (34)$$

По первой из формул (16), § 1, п. 2 имеем:

$$A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} = \Delta.$$

Коэффициенты при y и z по формулам (18) § 1, п. 2 равны нулю. Таким образом, равенство (34) примет вид

$$\Delta \cdot x = A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + A_{31}c_3. \quad (34')$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

получающийся из определителя системы Δ , если в нем коэффициенты при x (т. е. a_{11} , a_{21} , a_{31}) заменить свободными членами c_1 , c_2 , c_3 . Разложим этот определитель по элементам первого столбца. Замечая, что в этом определителе алгебраические дополнения элементов c_1 , c_2 , c_3 совпадают с соответствующими алгебраическими дополнениями элементов a_{11} , a_{21} , a_{31} определителя Δ , получим

$$A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + A_{31}c_3 = \Delta_x. \quad (35)$$

Сравнивая (35) и (34'), находим

$$\Delta \cdot x = \Delta_x. \quad (36)$$

Аналогично выводятся равенства

$$\Delta \cdot y = \Delta_y \text{ и } \Delta \cdot z = \Delta_z, \quad (37)$$

где

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}.$$

Определители Δ_y и Δ_z получаются из определителя системы Δ , если в нем заменить соответственно коэффициенты при y и z свободными членами.

Предполагая, что определитель системы $\Delta \neq 0$, из равенств (36) и (37) найдем

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \quad (38)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что значения x , y , z , найденные по формулам (38), являются решениями системы (33). Формулы (38), как и формулы (25), называются *формулами Крамера*.

Аналогичные формулы имеют место для систем уравнений первой степени с большим числом неизвестных.

Пример 1. Решить систему

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 2, \\ 2x - 3y + 2z &= 2, \\ 3x + y + z &= 8. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8,$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24.$$

По формулам (38) находим

$$x = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{-16}{-8} = 2, \quad z = \frac{-24}{-8} = 3.$$

Если определитель системы $\Delta = 0$ и по крайней мере один из определителей $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ не равен нулю, то система (33) не имеет решения (несовместна). Действительно, пусть для определенности $\Delta_x \neq 0$. Тогда равенство (36) невозможно, так как его левая часть $\Delta \cdot x = 0$ при любом x , а правая часть $\Delta_x \neq 0$.

Пример 2. Система уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 2, \\ x - 5y + 2z &= 3, \\ 4x + 6y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

не имеет решения, так как $\Delta = 0$, а $\Delta_x = -44 \neq 0$.

Наконец, отметим без доказательства, что если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система (33) либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений.

Проиллюстрируем это на примерах.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} x - y + 2z &= 2, \\ 2x - 2y + 4z &= 4, \\ 3x - 3y + 6z &= 3. \end{aligned} \right\}$$

Здесь $\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \Delta_z = 0$. Данная система не имеет решения, так как, например, первое и третье уравнения этой системы противоречивы. Действительно, умножая первое уравнение на 3 и вычитая третье уравнение, приходим к невозможному равенству $0 = 3$.

Пример 4. Для системы

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y - z &= 3, \\ 4x + 6y - 2z &= 6, \\ 3x - y + 2z &= -1 \end{aligned} \right\}$$

$\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0, \Delta_z = 0$. Так как второе уравнение получается умножением на 2 первого уравнения, то указанная система равносильна системе двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y - z &= 3, \\ 3x - y + 2z &= -1 \end{aligned} \right\}$$

и имеет бесчисленное множество решений. Задавая произвольные значения x , будем получать соответствующие значения y и z . Например, при $x=1$ получаем систему

$$\left. \begin{aligned} 3y - z &= 1, \\ -y + 2z &= -4, \end{aligned} \right\}$$

решая которую, найдем $y = -\frac{2}{5}$, $z = -\frac{11}{5}$; при $x=0$, найдем $y=1$, $z=0$ и т. д.

4. Однородная система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

Однородной системой трех уравнений первой степени с тремя неизвестными называют систему вида

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

В этом случае $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, так как каждый из определителей имеет столбец, все члены которого равны нулю.

Равенства (36) и (37) п.3 примут вид:

$$\Delta \cdot x = 0, \quad \Delta \cdot y = 0, \quad \Delta \cdot z = 0. \quad (40)$$

Если определитель системы (39) $\Delta \neq 0$, то система (39) имеет единственное решение $x = y = z = 0$.

Для того чтобы система (39) имела ненулевое решение, необходимо, чтобы $\Delta = 0$. Действительно, если, например, $x \neq 0$, то из первого уравнения (40) следует, что $\Delta = 0$.

Итак, если однородная система (39) имеет ненулевое решение, то ее определитель $\Delta = 0$.

Можно показать, что и наоборот, если $\Delta = 0$, то система (39) обязательно имеет ненулевое решение. Доказательства этого утверждения мы не приводим.

§ 3. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Скалярные и векторные величины

При изучении различных разделов физики, механики и технических наук нам встречаются величины, которые полностью определяются заданием их численных значений. Такие величины называются *скалярными*. Скалярными величинами, например, являются длина, площадь, объем, масса, температура тела и др. Помимо скалярных величин, в различных задачах встречаются величины, для определения которых, кроме численного значения, необходимо знать также их направление в пространстве. Такие величины называются *векторными*. Примерами таких величин являются сила, действующая

на тело, скорость и ускорение тела при его движении в пространстве, напряжение магнитного поля в данной точке пространства и т. д.

Векторные величины изображаются с помощью векторов. *Вектором называется направленный отрезок в пространстве, имеющий определенную длину*, т. е. отрезок определенной длины, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая за конец. Если A — начало вектора и B — его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Вектор будем также обозначать и одной буквой жирного шрифта $\mathbf{a}$, а в письме — одной буквой с черточкой наверху $\vec{a}$.

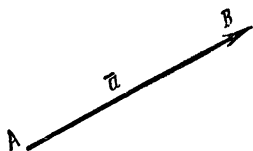


Рис. 56

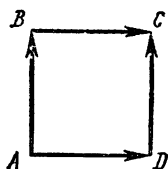


Рис. 57

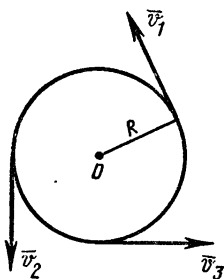


Рис. 58

На рисунке вектор изображается отрезком, снабженным у конца стрелкой (рис. 56).

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ называется его *модулем* и обозначается символом $|\overrightarrow{AB}|$, или AB . Если вектор обозначен через $\mathbf{a}$, то его модуль обозначается $|\mathbf{a}|$, или a .

Рассматривают также вектор, у которого конец совпадает с началом. Такой вектор-точку называют *нуль-вектором* и обозначают символом $\mathbf{0}$. Нуль-вектор не имеет определенного направления, модуль его равен нулю, т. е. $|\mathbf{0}| = 0$.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, расположенные на одной прямой или параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Дадим теперь определение равенства двух векторов.

Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *равными*, если они: 1) имеют равные модули; 2) коллинеарны; 3) направлены в одну сторону.

В этом случае пишут $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, помещая его начало в любую точку пространства.

Пример 1. Рассмотрим квадрат $ABCD$ (рис. 57). На основании определения равенства векторов можем написать

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ и } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \text{ но } \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DC}, \text{ хотя} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DC}|.$$

Пример 2. Рассмотрим материальную точку, движущуюся с угловой скоростью ω по окружности радиуса R (рис. 58). Скорость материальной точки в любой момент времени является вектором, ка-

сательным к траектории движения точки и имеющим длину, равную ωR . Так как направление вектора скорости в разных точках траектории различно, то $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{v}_3 \neq \dots$, хотя $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_3| = \dots$.

Для каждого вектора $\mathbf{a}$ (отличного от нуль-вектора) существует *противоположный* вектор, обозначаемый $-\mathbf{a}$. Вектор $-\mathbf{a}$ имеет модуль, равный модулю вектора $\mathbf{a}$, коллинеарен с ним, но направлен в противоположную сторону.

2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями называются операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число.

Сложение векторов. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ —два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$. После этого из точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$.

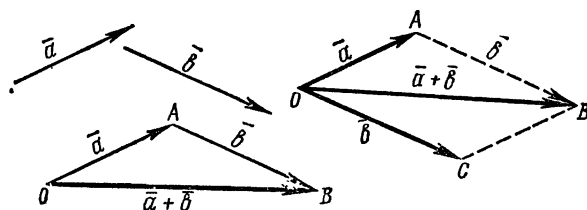


Рис. 59

Вектор $\overrightarrow{OB}$, соединяющий начало первого слагаемого вектора с концом второго, называется *суммой* этих векторов и обозначается $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (рис. 59).

Ту же самую сумму векторов можно получить иным способом. Отложим от точки O вектор $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и вектор $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b}$. Построим на этих векторах как на сторонах параллелограмма $OACB$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, являющийся диагональю параллелограмма, проведенной из вершины O , будет, очевидно, суммой векторов $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (см. рис. 59).

Из рис. 59 непосредственно следует, что сумма двух векторов обладает переместительным свойством:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Действительно, каждый из векторов $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} + \mathbf{a}$ равен одному и тому же вектору $\overrightarrow{OB}$.

Понятие суммы векторов, введенное для двух слагаемых векторов, можно обобщить на случай любого конечного числа слагаемых.

Пусть, например, даны три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Построим сначала сумму векторов $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, а затем к этой сумме прибавим вектор $\mathbf{c}$, получим вектор $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$. На рис. 60 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$ и $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$.

Из рис. 60 видно, что тот же вектор $\overline{OC}$ мы получим, если к вектору $\overline{OA} = \mathbf{a}$ прибавим вектор $\overline{AC} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Таким образом

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Поэтому сумму трех векторов записывают просто $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Как видно из рис. 60, ее можно получить следующим образом. Из произвольной точки O откладывается вектор, равный первому слагаемому вектору. К концу первого вектора присоединяется начало

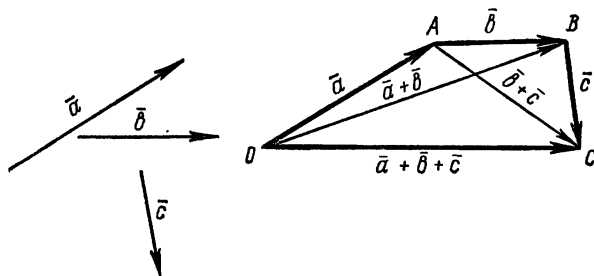


Рис. 60

второго, к концу второго — начало третьего. Вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, будет суммой данных векторов. Подобным же образом строится сумма любого конечного числа векторов.

Как было указано выше, сумма векторов обладает переместительным и сочетательным свойствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a}, \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \end{aligned} \quad (41)$$

Если при сложении нескольких векторов конец последнего слагаемого вектора совпадает с началом первого, то сумма векторов равна нуль-вектору.

Разность векторов. Разностью двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется третий вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, сумма которого с вычитаемым вектором $\mathbf{b}$ дает вектор $\mathbf{a}$.

Таким образом, если $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, то $\mathbf{c} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$. Из определения суммы двух векторов вытекает правило построения вектора-разности (рис. 61). Откладываем векторы $\overline{OA} = \mathbf{a}$ и $\overline{OB} = \mathbf{b}$ из общей точки O . Вектор $\overline{BA}$, соединяющий концы уменьшаемого вектора $\mathbf{a}$ и вычитаемого вектора $\mathbf{b}$ и направленный от вычитаемого к уменьшаемому, будет разностью $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Действительно, по правилу сложения векторов $\overline{OB} + \overline{BA} = \overline{OA}$ или $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$.

Если на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, отложенных из общей точки O , построить параллелограмм $OACB$, то вектор $\overline{OC}$, совпадающий с одной диагональю параллелограмма, равен сумме $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, а вектор $\overline{BA}$, совпадающий с другой диагональю, равен разности $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (рис. 62).

Пример. Как должны быть расположены векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, чтобы модуль их суммы $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ был равен модулю их разности $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$?

Решение. Очевидно, для этого длина диагонали $\overline{OC}$ параллелограмма должна равняться длине диагонали $\overline{BA}$ (рис. 62). Это может быть только в том случае, если параллелограмм $OACB$ является прямоугольником. Следовательно, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Умножение вектора на число. Пусть даны вектор $\mathbf{a}$ и число λ . Произведением вектора $\mathbf{a}$ на число λ называется новый вектор $\mathbf{c}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a}$, имеющий длину $|\mathbf{c}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$ и то же

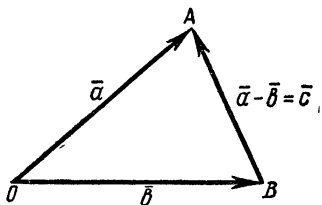


Рис. 61

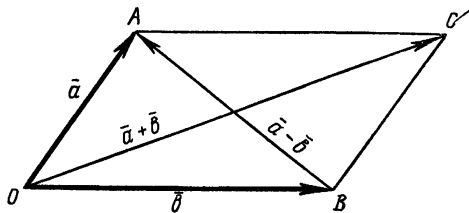


Рис. 62

направление, что и вектор $\mathbf{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Так, например, $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ есть вектор, направленный в ту же сторону, что и вектор $\mathbf{a}$, и имеющий длину, вдвое меньшую, чем вектор $\mathbf{a}$.

Противоположный вектор $-\mathbf{a}$ можно рассматривать как результат умножения вектора $\mathbf{a}$ на $\lambda = -1$:

$$-\mathbf{a} = (-1) \cdot \mathbf{a}.$$

Из определения умножения вектора на число следует, что если $\mathbf{b} = \lambda \cdot \mathbf{a}$, то векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны. Очевидно и обратно, из коллинеарности векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ следует, что $\mathbf{b} = \lambda \cdot \mathbf{a}$. Произведение вектора $\mathbf{a}$ на число λ можно записывать как в виде $\lambda \cdot \mathbf{a}$, так и в виде $\mathbf{a} \cdot \lambda$.

Легко убедиться, что умножение вектора на число обладает распределительным свойством

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda \cdot \mathbf{a} + \lambda \cdot \mathbf{b}, \\ (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \mathbf{a} &= \lambda_1 \cdot \mathbf{a} + \lambda_2 \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (42)$$

и сочетательным свойством

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \mathbf{a} = \lambda_1 (\lambda_2 \cdot \mathbf{a}). \quad (43)$$

Справедливость, например, первого свойства (42) для $\lambda > 0$ следует из того, что при изменении сторон параллелограмма в λ раз его диагонали также изменяются в λ раз (рис. 63).

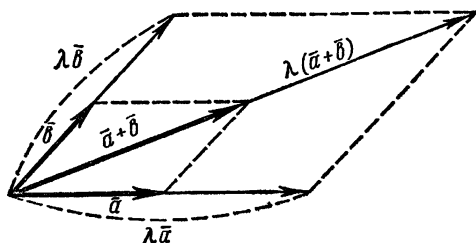


Рис. 63

Единичный вектор. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным*.

Пусть дан вектор $\mathbf{a}$. Рассмотрим вектор, коллинеарный вектору $\mathbf{a}$, одинаково с ним направленный, но имеющий длину, равную единице. Обозначим этот вектор через $\mathbf{a}^0$, тогда $|\mathbf{a}^0| = 1$.

Из определения умножения вектора на число следует

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a}^0. \quad (44)$$

Каждый вектор равен произведению его модуля на единичный вектор того же направления.

Равенство (44) будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

3. Угол между двумя векторами

Пусть в пространстве даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Углом между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется наименьший угол φ , на который надо повернуть один из векторов до его совпадения со вторым ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

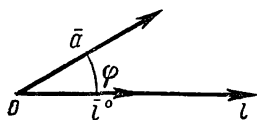


Рис. 64

Рассмотрим ось l , положительное направление которой совпадает с направлением единичного вектора $\mathbf{l}^0$, расположенного на оси. Под углом между вектором $\mathbf{a}$ и осью понимают угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{l}^0$ (рис. 64).

4. Проекция вектора на ось и составляющая вектора по оси

Пусть l — некоторая ось, а $\overline{AB}$ — вектор, произвольно расположенные в пространстве. Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала A и конца B этого вектора (рис. 65). Предположим, что A_1 имеет координату x_1 , а B_1 — координату x_2 на оси l .

Определение. Разность $x_2 - x_1$ между координатами проекций конца и начала вектора $\overline{AB}$ на ось l называется *проекцией вектора $\overline{AB}$ на эту ось*.

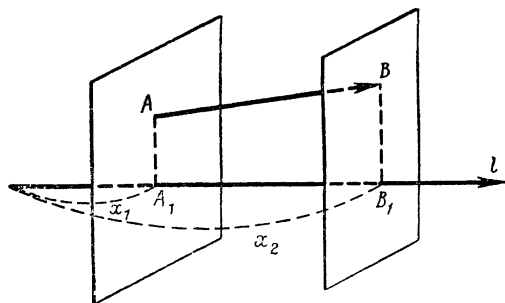


Рис. 65

Если вектор $\overline{AB}$ образует с осью l острый угол, то $x_2 > x_1$, и проекция $x_2 - x_1$ положительна; если угол

между осью l и вектором $\overline{AB}$ — тупой, то $x_2 < x_1$, и проекция $x_2 - x_1$ отрицательна. Наконец, если вектор $\overline{AB}$ перпендикулярен оси l , то $x_2 = x_1$, и проекция $x_2 - x_1$ равна нулю (рис. 66).

Проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось l будем обозначать следующим образом: $\text{пр}_l \overline{AB}$.

Рассмотрим некоторые основные теоремы о проекциях.

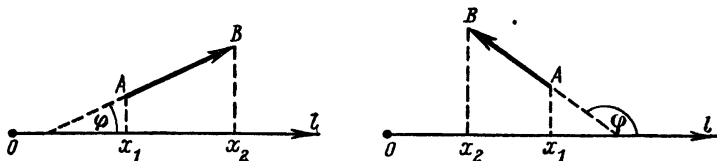


Рис. 66

Теорема 1. Проекция вектора $\mathbf{a}$ на ось l равна модулю вектора $\mathbf{a}$, умноженному на косинус угла φ между вектором и осью:

$$\text{пр}_l \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos \varphi. \quad (45)$$

Доказательство. Проекция вектора $x_2 - x_1$ не изменится при любом его переносе параллельно самому себе, так как при этом x_2 и x_1 изменяются на одно и то же число. Поэтому доста-

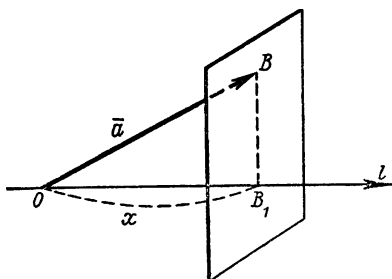


Рис. 67

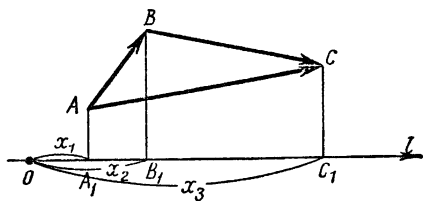


Рис. 68

точно рассмотреть случай, когда начало вектора совпадает с началом O оси l (рис. 67). Так как координата начала равна нулю, то

$$\text{пр}_l \mathbf{a} = x - 0 = x, \quad (46)$$

где x — координата проекции конца вектора. По определению косинуса $\cos \varphi = \frac{x}{|\mathbf{a}|}$, откуда

$$x = |\mathbf{a}| \cdot \cos \varphi,$$

или

$$\text{пр}_l \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos \varphi,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

Доказательство. Пусть $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ (рис. 68). Обозначим через x_1 , x_2 и x_3 координаты проекций A_1 , B_1 и C_1 на ось l точек

A, B и C . Тогда

$$\text{пр}_l \overline{AB} = x_2 - x_1; \quad \text{пр}_l \overline{BC} = x_3 - x_2; \quad \text{пр}_l \overline{AC} = x_3 - x_1.$$

Но $x_3 - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)$, т. е.

$$\text{пр}_l \overline{AC} = \text{пр}_l \overline{AB} + \text{пр}_l \overline{BC}. \quad (47)$$

Теорема доказана.

Замечание. Эту теорему можно обобщить на случай любого числа слагаемых.

Теорема 3. Если вектор a умножается на число λ , то его проекция на ось также умножается на это число:

$$\text{пр}_l (\lambda \cdot a) = \lambda \cdot \text{пр}_l a. \quad (48)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если вектор составляет с осью угол φ и число $\lambda > 0$, то вектор $\lambda \cdot a$ имеет то же направление, что и вектор a , и составляет с осью также угол φ . Если же $\lambda < 0$, то направление вектора $\lambda \cdot a$ противоположно направлению вектора a и вектор $\lambda \cdot a$ составляет с осью угол $\pi - \varphi$. На основании теоремы 1 имеем:

$$1) \lambda > 0; \quad \text{пр}_l (\lambda \cdot a) = |\lambda \cdot a| \cdot \cos \varphi = |\lambda| \cdot |a| \cdot \cos \varphi = \lambda \cdot |a| \cdot \cos \varphi = \\ = \lambda \cdot \text{пр}_l a;$$

$$2) \lambda < 0; \quad \text{пр}_l (\lambda \cdot a) = |\lambda \cdot a| \cdot \cos (\pi - \varphi) = |\lambda| \cdot |a| \cdot \cos (\pi - \varphi) = \\ = -\lambda \cdot |a| \cdot (-\cos \varphi) = \lambda \cdot |a| \cdot \cos \varphi = \lambda \cdot \text{пр}_l a.$$

Следствие. Проекция разности двух векторов на ось равна разности проекций этих векторов на ту же ось.

Доказательство предоставляем читателю.

Определение. Произведение проекции вектора на ось l на единичный вектор l^0 этой оси называется составляющей вектора a по оси l .

Обозначив эту составляющую символом $\text{сост}_l a$, по определению получим

$$\text{сост}_l a = \text{пр}_l a \cdot l^0, \quad (49)$$

или

$$\text{сост}_l a = (x_2 - x_1) \cdot l^0, \quad (50)$$

где x_1 и x_2 — координаты проекций A_1 и B_1 на ось l соответственно начала A и конца B вектора $a = \overline{AB}$.

Нетрудно заметить, что

$$\text{сост}_l a = \overline{A_1 B_1}. \quad (51)$$

В самом деле, модули обоих векторов равны расстоянию между точками A_1 и B_1 : $|x_2 - x_1| = |\overline{A_1 B_1}|$. Направлены эти векторы также одинаково, так как направление каждого из них либо совпадает с положительным направлением оси l (если $x_2 - x_1 > 0$), либо противоположно ему (если $x_2 - x_1 < 0$).

Таким образом, составляющая вектора по оси есть вектор, соединяющий проекцию начала вектора с проекцией его конца.

5. Разложение вектора на составляющие по осям координат

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$ (рис. 69). Отнесем к каждой из осей единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси. Так, оси Ox отнесем единичный вектор $\vec{i}$, оси Oy — единичный вектор $\vec{j}$ и оси Oz — единичный вектор $\vec{k}$: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Эти три взаимно перпендикулярных единичных вектора называются *ортами*.

Рассмотрим некоторый вектор $\vec{a}$ в пространстве. Перенесем его параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с началом координат O . Другими словами, отложим от начала O вектор $\overline{OM}$, равный $\vec{a}$: $\overline{OM} = \vec{a}$. Проводя через конец вектора $\overline{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям, получим параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$.

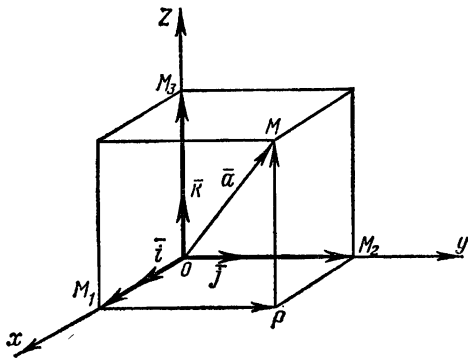


Рис. 69

Из рис. 69 и из определения суммы нескольких векторов находим:

$$\vec{a} = \overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{M_1P} + \overline{PM}.$$

Так как $\overline{M_1P} = \overline{OM_2}$ и $\overline{PM} = \overline{OM_3}$, то

$$\vec{a} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3}. \quad (52)$$

Векторы $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$, $\overline{OM_3}$ являются составляющими вектора $\vec{a} = \overline{OM}$ по осям Ox , Oy , Oz .

На основании (49) можем написать:

$$\overline{OM_1} = \text{пр}_{Ox} \overline{OM} \cdot \vec{i}, \quad \overline{OM_2} = \text{пр}_{Oy} \overline{OM} \cdot \vec{j}, \quad \overline{OM_3} = \text{пр}_{Oz} \overline{OM} \cdot \vec{k}. \quad (53)$$

Обозначая проекции вектора $\vec{a} = \overline{OM}$ на оси Ox , Oy , Oz соответственно через a_x , a_y , a_z , из (52) и (53) получаем

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (54)$$

Формула (54) дает разложение вектора $\vec{a}$ на составляющие по координатным осям.

Пусть точка M — конец вектора имеет координаты x, y, z . В таком случае по формуле (46) проекции вектора $\vec{a} = \overline{OM}$ по осям, очевидно, будут $a_x = x$, $a_y = y$, $a_z = z$, а составляющие по осям — $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$. Формула (54) разложения вектора на составляющие примет вид

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (55)$$

Если вектор $\mathbf{a}$ имеет проекции на оси координат соответственно a_x, a_y, a_z , то мы будем это записывать следующим образом:

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}. \quad (56)$$

Если известно разложение векторов по осям координат, то линейные операции над векторами можно заменить арифметическими действиями над их проекциями.

Пример. Даны векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Найти их сумму и разность.

Решение. Так как при сложении векторов их проекции складываются, а при вычитании вычитаются, то

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (2 + 3)\mathbf{i} + (3 - 2)\mathbf{j} + (5 + 5)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 10\mathbf{k}, \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} &= (2 - 3)\mathbf{i} + [3 - (-2)]\mathbf{j} + (5 - 5)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Зная проекции вектора $\mathbf{a}$, можно легко найти выражение для модуля вектора. Так как вектор $\mathbf{a} = \overline{OM}$ является диагональю параллелепипеда, то на основании известной теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать

$$\begin{aligned} |\overline{OM}|^2 &= |\overline{OM}_1|^2 + |\overline{OM}_2|^2 + |\overline{OM}_3|^2, \\ \text{по } |\overline{OM}_1| &= |a_x|, \quad |\overline{OM}_2| = |a_y|, \quad |\overline{OM}_3| = |a_z|. \quad \text{Поэтому} \\ |\overline{a}|^2 &= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \end{aligned}$$

откуда

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (57)$$

Модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.

Рассмотрим теперь вектор $\overline{AB}$, начало которого имеет координаты $A(x_1; y_1; z_1)$, а конец — $B(x_2; y_2; z_2)$. По определению проекции вектора на ось находим, что вектор $\overline{AB}$ будет иметь следующие проекции:

$$\text{пр}_{Ox} \overline{AB} = x_2 - x_1, \quad \text{пр}_{Oy} \overline{AB} = y_2 - y_1, \quad \text{пр}_{Oz} \overline{AB} = z_2 - z_1.$$

Поэтому на основании формулы (54) получаем следующее разложение вектора $\overline{AB}$ по осям координат:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

По формуле (57) находим модуль вектора

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (58)$$

Эта формула совпадает с выведенной ранее (гл. I, § 2, п. 5) формулой для расстояния между двумя точками A и B .

6. Направляющие косинусы вектора

Направление вектора в пространстве определяется углами, α , β , γ , которые вектор составляет с осями координат (рис. 70). Косинусы этих углов $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора.

С помощью выведенной ранее формулы (45) для проекции вектора легко получить выражения для направляющих косинусов.

Пусть дан вектор $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$. Тогда

$$a_x = \text{пр}_{Ox} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha,$$

$$a_y = \text{пр}_{Oy} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos \beta,$$

$$a_z = \text{пр}_{Oz} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos \gamma.$$

Отсюда находим выражения для направляющих косинусов:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}. \quad (59)$$

Так как по формуле (57) $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, то

Рис. 70

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \quad (60)$$

Возводя почленно каждое из равенств формул (60) в квадрат и складывая, найдем зависимость между направляющими косинусами вектора:

$$\cos^2 \alpha = \frac{a_x^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \cos^2 \beta = \frac{a_y^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \cos^2 \gamma = \frac{a_z^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

откуда

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

т. е. *сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице.*

Замечание. Легко видеть, что проекции любого единичного вектора $\mathbf{a}^0$ на оси координат соответственно совпадают с его направляющими косинусами и, следовательно, его разложение по осям координат имеет вид

$$\mathbf{a}^0 = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}. \quad (62)$$

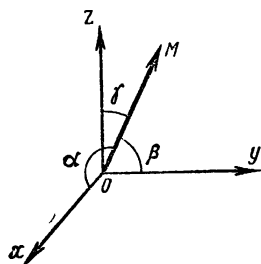
Пример. Найти косинусы углов, которые вектор $\overline{AB}$ составляет с осями координат, если $A(1, 2, 3)$ и $B(2, 4, 5)$.

Решение. Найдем проекции вектора $\overline{AB}$ на оси Ox , Oy , Oz :

$$\text{пр}_{Ox} \overline{AB} = 2 - 1 = 1, \quad \text{пр}_{Oy} \overline{AB} = 4 - 2 = 2, \quad \text{пр}_{Oz} \overline{AB} = 5 - 3 = 2.$$

По формуле (58) находим модуль вектора $|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$; по формулам (60) находим направляющие косинусы вектора:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$



7. Условие коллинеарности двух векторов

Пусть векторы $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ коллинеарны. В этом случае $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, где λ — некоторое число (см. п. 2). Так как при умножении вектора на число его проекции на оси также умножаются на это число (см. п. 4), получим

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z. \quad (63)$$

Обратно, если имеют место равенства (63), то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Действительно, если все проекции вектора $\mathbf{a}$ в λ раз отличаются от проекций вектора $\mathbf{b}$, то и сам вектор $\mathbf{a}$ получается из вектора $\mathbf{b}$ умножением на множитель λ , т. е. векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Равенства (63) показывают, что проекции векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ пропорциональны. Таким образом, для того чтобы два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их проекции были пропорциональны.

Равенства (63) часто записывают следующим образом:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (64)$$

8. Скалярное произведение

В п. 2 этого параграфа было рассмотрено умножение вектора на число. В различных задачах механики и физики мы встречаемся также с операцией умножения вектора на вектор. Однако в отличие от чисел, когда результат произведения всегда есть снова число, при умножении векторов результат может быть как числом, так и вектором.

Соответственно этому рассматривают два вида умножения векторов: скалярное и векторное.

Изучим сначала скалярное умножение.

Пусть даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, угол между которыми равен φ (рис. 71).

Определение. Скалярным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению модулей перемножаемых векторов на косинус угла φ между ними.

Скалярное произведение обозначается $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Таким образом, по определению

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (65)$$

Рассмотрим одну физическую задачу, решение которой приводит к скалярному произведению векторов. Пусть материальная точка M движется по прямой от точки A до точки B , проходя при этом путь l . Допустим, что на точку M действует сила $\mathbf{F}$, постоянная по величине и направлению и составляющая с направлением перемещения точки M угол α (рис. 72).

Из физики известно, что работа E , совершаемая при этом силой F на участке l , равна

$$E = Fl \cos \alpha$$

Если ввести вектор перемещения l , то по определению скалярного произведения получим

$$E = F \cdot l.$$

Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

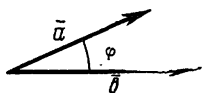


Рис. 71

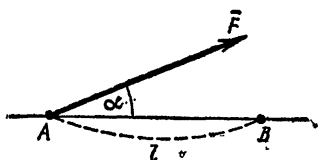


Рис. 72

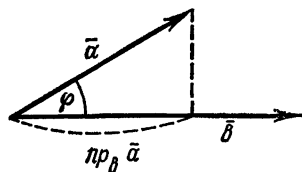


Рис. 73

Формуле (65), определяющей скалярное произведение, можно придать иной вид.

Так как произведение $|b| \cdot \cos \varphi$ есть проекция вектора b на ось, определяемую вектором a (обозначается $\text{пр}_a b$), и $|a| \cdot \cos \varphi$ — проекция вектора a на ось вектора b (рис. 73), то из равенства

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$$

следует, что

$$a \cdot b = |a| \cdot \text{пр}_a b = |b| \cdot \text{пр}_b a. \quad (66)$$

Скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из векторов, умноженному на проекцию на него другого вектора.

Из (66) находим выражение для проекции одного вектора на направление другого:

$$\text{пр}_a b = \frac{a \cdot b}{|a|}, \quad \text{пр}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|}. \quad (67)$$

В частном случае, если, например, вектор a единичный, т. е. $|a| = 1$, то

$$\text{пр}_a b = \frac{a \cdot b}{1} = a \cdot b. \quad (67')$$

Проекция вектора на направление единичного вектора равна скалярному произведению этих векторов.

Рассмотрим некоторые свойства скалярного произведения.

1. Скалярное произведение двух векторов обладает переместительным свойством:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Это свойство непосредственно следует из определения скалярного произведения:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi, \quad b \cdot a = |b| \cdot |a| \cdot \cos \varphi,$$

следовательно,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

2. Скалярное произведение двух векторов обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т. е.

$$\lambda \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}).$$

При доказательстве этого равенства ограничимся случаем $\lambda > 0$. Замечая, что при $\lambda > 0$ угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен углу между векторами $\lambda \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, получим

$$\begin{aligned}\lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \lambda \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi, \\ (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= |\lambda \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi = \lambda \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi.\end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$. Аналогично доказывается и равенство $\lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$.

3. Скалярное произведение двух векторов обладает распределительным свойством:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

Действительно, на основании формулы (66) и свойства проекций имеем

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= |\mathbf{c}| \cdot \text{пр}_c (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| (\text{пр}_c \mathbf{a} + \text{пр}_c \mathbf{b}) = \\ &= |\mathbf{c}| \cdot \text{пр}_c \mathbf{a} + |\mathbf{c}| \cdot \text{пр}_c \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.\end{aligned}$$

4. Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то равно нулю либо один из перемножаемых векторов, либо косинус угла между ними, т. е. векторы перпендикулярны.

Обратно, если векторы $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, то $\cos \varphi = 0$ и, следовательно, скалярное произведение векторов равно нулю.

Таким образом, для того чтобы два не равных нулю вектора были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

Рассмотрим теперь скалярное произведение вектора самого на себя. Такое произведение называется скалярным квадратом вектора.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos 0 = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2.$$

Скалярный квадрат вектора обозначается $\mathbf{a}^2$. Таким образом,

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2. \quad (68)$$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

Отметим любопытное свойство скалярного квадрата вектора, вытекающее из формулы (68). Если вектор $\mathbf{a}$ возвести скалярно в квадрат и затем извлечь корень, то получим, как это видно из (68), не первоначальный вектор, а его модуль $|\mathbf{a}|$. Таким образом, действия возведения в квадрат и последующее извлечение корня не аннулируют друг друга:

$$\sqrt{\mathbf{a}^2} \neq \mathbf{a}, \quad \sqrt{\mathbf{a}^2} = |\mathbf{a}|.$$

Пример. Дан вектор $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, причем $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$. Угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен 60° . Вычислить модуль вектора $\mathbf{c}$.

Решение. Используя формулу (68), получим $c^2 = |c|^2$, откуда

$$|c| = \sqrt{c^2} = \sqrt{(2a + 3b)^2} = \sqrt{4a^2 + 12a \cdot b + 9b^2}.$$

Так как

$$a^2 = |a|^2 = 4^2 = 16, \quad b^2 = |b|^2 = 5^2 = 25 \quad \text{и} \quad a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \varphi = \\ = 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 10,$$

то

$$|c| = \sqrt{4 \cdot 16 + 12 \cdot 10 + 9 \cdot 25} = \sqrt{409}.$$

9. Выражение скалярного произведения через проекции перемножаемых векторов

Пусть даны два вектора

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}.$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_z b_x \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + \\ &+ a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_z b_y \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + a_y b_z \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + a_z b_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}. \end{aligned}$$

При раскрытии скобок мы воспользовались распределительным свойством скалярного произведения.

Заметив теперь, что

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

как скалярные квадраты единичных векторов и что

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$$

как скалярные произведения взаимно перпендикулярных векторов, для скалярного произведения двух векторов получаем окончательную формулу:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (69)$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме парных произведений их одноименных проекций.

Выше мы имели условие, необходимое и достаточное для перпендикулярности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. На основании формулы (69) условие перпендикулярности двух векторов принимает вид

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (70)$$

Для того чтобы два вектора были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы сумма парных произведений их одноименных проекций равнялась нулю.

Пример. При каком значении m вектор $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + m \cdot \mathbf{k}$?

Решение. Из условия (70) перпендикулярности векторов имеем

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot m = 0,$$

откуда $m = -13$.

10. Косинус угла между двумя векторами

Из выражения для скалярного произведения векторов

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi$$

находим

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}. \quad (71)$$

Выражая скалярное произведение и модули векторов через их проекции по формулам (57) и (69), получим формулу для нахождения косинуса угла между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (72)$$

Пример. Вычислить косинус угла между векторами $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Решение. По формуле (72) находим

$$\cos \varphi = \frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{7}{3 \sqrt{11}}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению второго вида умножения двух векторов.

11. Векторное произведение

Определение. Векторным произведением вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ называется новый вектор $\mathbf{c}$, который определяется следующим образом:

1) модуль вектора $\mathbf{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ как на сторонах, т. е.

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}); \quad (73)$$

2) вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен к обоим перемножаемым векторам;

3) направление вектора $\mathbf{c}$ таково, что, смотря из его конца вдоль вектора, поворот по кратчайшему пути от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ мы будем видеть совершающимся против движения часовой стрелки (рис. 74).

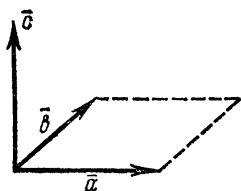


Рис. 74

Векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначается символом $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Рассмотрим физическую задачу, решение которой приводит к операции векторного произведения двух векторов.

Покажем, как вычисляется скорость точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 75). Допустим, что твердое тело вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси. Введем вектор угловой скорости ω . Этот вектор направлен по

оси вращения тела в ту сторону, из которой вращение тела видно против движения часовой стрелки.

Пусть M — произвольная точка тела. Скорость этой точки направлена по касательной к окружности, описываемой точкой при вращении тела. При этом плоскость окружности перпендикулярна оси вращения. Величина скорости точки M равна произведению модуля угловой скорости $|\omega|$ на расстояние d точки M до оси вращения, т. е.

$$|v| = |\omega| \cdot d. \quad (74)$$

Возьмем на оси вращения произвольную точку O и отложим из нее вектор $\overline{OA} = \omega$ и вектор $\overline{OM} = r$. Обозначим угол между векторами ω и r через γ . Тогда из треугольника OO_1M имеем $d = |r| \sin \gamma$ (см. рис. 75).

Подставляя это значение d в формулу (74), находим

$$|v| = |\omega| \cdot |r| \sin \gamma.$$

Скорость v точки M перпендикулярна векторам ω и r , и из конца вектора скорости v кратчайший поворот от вектора ω к вектору r виден совершающимся против движения часовой стрелки.

Поэтому на основании определения векторного произведения имеем:

$$v = \omega \times r^*. \quad (75)$$

Рассмотрим теперь основные свойства векторного произведения.

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет свой знак, сохраняя модуль. Таким образом, векторное произведение не обладает переместительным свойством.

Действительно, из определения векторного произведения следует, что векторы $a \times b$ и $b \times a$ имеют одинаковые модули, расположены на одной прямой, но направлены в противоположные стороны. Поэтому векторы $a \times b$ и $b \times a$ являются противоположными векторами и, следовательно,

$$a \times b = -b \times a.$$

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т. е.

$$\lambda \cdot (a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b).$$

* Точку O приложения векторов ω и r на оси вращения можно выбирать произвольно. При этом будут меняться r и γ , но произведение $|r| \sin \gamma = d$ будет оставаться постоянным.

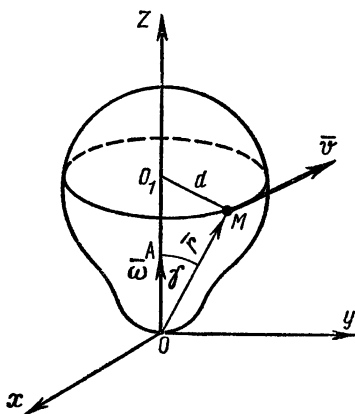


Рис. 75

Доказательство этого свойства непосредственно следует из определения векторного произведения. Докажем его, например, для случая $\lambda > 0$.

$$|\lambda \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = \lambda \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \lambda \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}});$$

$$|(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}| = |\lambda \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\widehat{\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \lambda \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}).$$

Вектор $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ перпендикулярен векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Вектор $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ также перпендикулярен векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, так как векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, $\lambda \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ лежат в одной плоскости. Следовательно, векторы $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ и $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ коллинеарны. Очевидно, что направления их также совпадают. Поэтому

$$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}.$$

Подобным же образом проводится доказательство и для случая $\lambda < 0$ *

3. Векторное произведение обладает распределительным свойством, т. е.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

Вывод этой формулы мы здесь приводить не будем.

4. Если векторное произведение двух векторов равно нуль-вектору, то либо равен нуль-вектору один из перемножаемых векторов, либо равен нулю синус угла между ними, т. е. векторы коллинеарны.

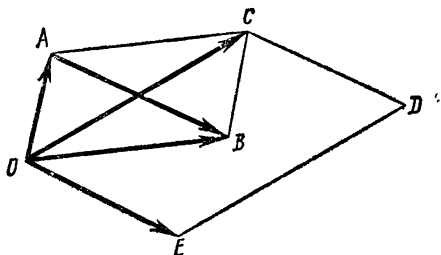


Рис. 76

Обратно, если два ненулевых вектора коллинеарны, то их векторное произведение равно нуль-вектору.

Таким образом, для того чтобы два ненулевых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нуль-вектору.

Отсюда, в частности, следует, что векторное произведение вектора на самого себя равно нуль-вектору:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Рассмотрим примеры на применение указанных свойств.

Пример 1. Найти $(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$.

Решение. Имеем:

$$(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \times \mathbf{a} + 3\mathbf{b} \times \mathbf{a} - 4\mathbf{a} \times \mathbf{b} - 6\mathbf{b} \times \mathbf{b}.$$

Так как $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, то получаем $(2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 7(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$.

Пример 2. На векторах $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ построен параллелограмм $OACB$. Вычислить площадь параллелограмма $OCDE$, стороны которого $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OC}$ равны соответствующим диагоналям первого параллелограмма $OABC$. При этом $|\overrightarrow{OA}| = 3$, $|\overrightarrow{OB}| = 4$ и $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{3}$ (рис. 76).

* При $\lambda = 0$ сочетательное свойство очевидно.

Решение. По определению векторного произведения

$$S_{OCDE} = |\overline{OE} \times \overline{OC}|.$$

Так как $\overline{OE} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ и $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$, то

$$S = |(\overline{OB} - \overline{OA}) \times (\overline{OB} + \overline{OA})| = |\overline{OB} \times \overline{OB} - \overline{OA} \times \overline{OB} + \overline{OB} \times \overline{OA} - \overline{OA} \times \overline{OA}| = |-\overline{OA} \times \overline{OB} + \overline{OB} \times \overline{OA}| = 2|\overline{OB} \times \overline{OA}| =$$

$$= 2|\overline{OB}| \cdot |\overline{OA}| \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \sqrt{3} \text{ кв. ед.}$$

12. Выражение векторного произведения через проекции перемножаемых векторов

Пусть даны два вектора:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}.$$

Найдем выражение векторного произведения $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ через проекции a_x, a_y, a_z и b_x, b_y, b_z . Предварительно найдем все парные векторные произведения единичных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Так как векторное произведение коллинеарных векторов равно нуль-вектору, то

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (76)$$

Рассмотрим теперь, например, произведение $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$. Модуль этого произведения

$$|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{j}| \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

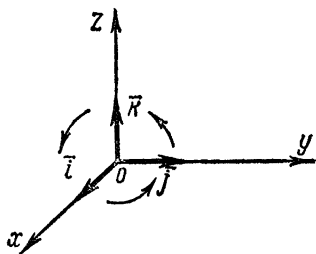


Рис. 77

Расположен вектор $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ на прямой, перпендикулярной плоскости векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, т. е. на оси Oz . Направлен этот вектор в сторону положительного направления оси Oz , так как при этом поворот вектора $\mathbf{i}$ к вектору $\mathbf{j}$ по кратчайшему пути будет виден из конца вектора $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ совершающимся против вращения часовой стрелки (рис. 77). Отсюда следует, что этот вектор совпадает с вектором $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}. \quad (77)$$

С помощью аналогичных рассуждений убедимся, что

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j}. \end{aligned} \quad (77')$$

Рассмотрим теперь произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Используя свойства 3 и 4 векторного произведения и равенства (76), (77) и (77'), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= a_x b_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_y b_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_z b_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + \\ &+ a_y b_y \mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_z b_y \mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_y b_z \mathbf{j} \times \mathbf{k} + \\ &+ a_z b_z \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \\ &= -a_y b_x \mathbf{k} + a_z b_x \mathbf{j} + a_x b_y \mathbf{k} - a_z b_y \mathbf{i} - a_x b_z \mathbf{j} + a_y b_z \mathbf{i} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

$$+ a_z b_z \mathbf{k} \times \mathbf{k} = a_y b_x (-\mathbf{k}) + a_z b_x \mathbf{j} + a_x b_y \mathbf{k} + \\ + a_z b_y (-\mathbf{i}) + a_x b_z (-\mathbf{j}) + a_y b_z \mathbf{i} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} - \\ - (a_x b_z - a_z b_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.$$

Разности, стоящие в скобках, представляют собой определители второго порядка (§ 1, п. 1). Поэтому

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_y a_z \\ b_y b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x a_z \\ b_x b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x a_y \\ b_x b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Полученное выражение на основании свойства о разложении определителя третьего порядка по элементам первой строки можно окончательно записать следующим образом:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (78)$$

Пример 1. Найти векторное произведение векторов

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k} \text{ и } \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Решение. По формуле (78) находим

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} = -13\mathbf{i} + \\ + 5\mathbf{j} - 11\mathbf{k}.$$

Пример 2. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(2; 3; 1)$, $B(5; 6; 3)$, $C(7; 1; 10)$.

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, совпадающие со сторонами треугольника

$$\overline{AB} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \overline{AC} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}.$$

Так как модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах, то площадь треугольника будет равна половине модуля векторного произведения $\overline{AB} \times \overline{AC}$:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|.$$

Находим сначала

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \\ = 31\mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 21\mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |31\mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 21\mathbf{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{31^2 + 17^2 + 21^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1691} \text{ кв. ед.}$$

13. Смешанное произведение трех векторов

Рассмотрим теперь произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, составленное следующим образом:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Здесь первые два вектора умножаются векторно и затем полученный вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ умножается скалярно на третий вектор $\mathbf{c}$. Такое произведение называется *векторно-скалярным*, или *смешанным* произведением *трех векторов*. Смешанное произведение представляет собой, очевидно, некоторое число.

Найдем выражение для смешанного произведения через проекции перемножаемых векторов.

Определим сначала $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Так как $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$, то используя формулу (69) для скалярного произведения, получим:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z.$$

Легко видеть, что полученное выражение является разложением определителя

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

по элементам третьей строки. Итак,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (79)$$

Смешанное произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ равно определителю третьего порядка, у которого в первой строке стоят проекции первого перемножаемого вектора, во второй строке — проекции второго вектора и в третьей строке — проекции третьего вектора.

Поэтому

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Аналогично можно получить следующие формулы:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}.$$

Для краткости смешанное произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ будем обозначать иногда (abc) . В этих обозначениях предыдущие формулы можно записать следующим образом:

$$(abc) = (bca) = (cab) = -(bac) = -(acb) = -(cba).$$

14. Геометрический смысл смешанного произведения

Отложим данные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ от общего начала и построим на этих векторах, как на ребрах, параллелепипед (предполагая, что векторы не лежат в одной плоскости). Построим также вектор $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, модуль которого равен площади Q параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (рис. 78). На основании определения смешанного произведения

$$(abc) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

По определению скалярного произведения

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos \varphi = \\ &= Q \cdot |\mathbf{c}| \cos \varphi, \end{aligned}$$

где φ угол между векторами $\mathbf{d}$ и $\mathbf{c}$.

Предполагая, что $\varphi < \frac{\pi}{2}$ и обозначая через h высоту параллелепипеда, находим

$$h = |\mathbf{c}| \cos \varphi.$$

Таким образом,

$$(abc) = Q \cdot h.$$

Но произведение $Q \cdot h$ равно объему V рассматриваемого параллелепипеда. Следовательно, $(abc) = V$.

Если же $\varphi > \frac{\pi}{2}$, то $\cos \varphi < 0$ и $|\mathbf{c}| \cos \varphi = -h$. Следовательно, $(abc) = -V$.

Объединяя оба эти случая, получаем окончательно

$$(abc) = \pm V, \tag{80}$$

или

$$V = |(abc)|. \tag{81}$$

Смешанное произведение трех векторов с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах.

15. Условие компланарности трех векторов

Определение. Три вектора, параллельные одной плоскости или лежащие в одной плоскости, называются компланарными.

Пусть три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны. Не ограничивая общности, можно считать, что эти векторы лежат в одной плоскости.

В этом случае вектор $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ будет перпендикулярен этой плоскости и, следовательно, перпендикулярен вектору $\mathbf{c}$, поэтому скалярное произведение

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0.$$

Следовательно, смешанное произведение компланарных векторов равно нулю.

Обратно, если смешанное произведение $(\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}) = 0$, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны.

Действительно, если бы эти векторы были бы не компланарны, то на них можно было бы построить параллелепипед с объемом $V \neq 0$. Но так как $V = |(\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c})|$, то отсюда следовало бы, вопреки предположению, что $(\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}) \neq 0$.

Итак, для того чтобы три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю, т. е.

$$(\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}) = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (82)$$

Рассмотрим теперь примеры на применение смешанного произведения векторов.

Пример 1. Показать, что векторы $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{c} = -3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ компланарны.

Решение. Составляем смешанное произведение этих векторов:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + \\ &+ 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = -(-18 + 48) - 3(12 - 12) + 2(24 - 9) = 0. \end{aligned}$$

Так как смешанное произведение оказалось равным нулю, то, следовательно, векторы компланарны.

Пример 2. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$.

Решение. Рассмотрим векторы

$$\overline{OA} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \overline{OB} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \quad \overline{OC} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Из элементарной геометрии известно, что объем пирамиды, построенной на ребрах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на тех же ребрах.

Поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |(\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC})|,$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 14 \text{ куб. см.}$$

(при вычислении определителя мы воспользовались разложением по элементам третьего столбца).

§ 4. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1. Понятие о матрице

При изучении определителей и систем уравнений (см. § 1) мы рассматривали таблицы, составленные из чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Эти таблицы мы называли матрицами, а числа $a_{11}, a_{12}, \dots$ — элементами матрицы.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то такую матрицу называют *квадратной*, причем число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. Так, например, в (83) первая матрица будет второго порядка, а последняя матрица — третьего порядка. Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной* (средняя матрица в (83)).

Рассмотрим также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец. Матрица $(a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$ называется матрицей-строкой, а матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

матрицей-столбцом.

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, называется определителем этой матрицы.

Матрицу для краткости будем обозначать одной буквой, например:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

а определитель этой матрицы — той же буквой в прямых черточках. Так, определитель матрицы A будет

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

определитель матрицы B

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Если определитель квадратной матрицы отличен от нуля, то матрица называется невырожденной. Если же определитель матрицы равен нулю, то матрица называется вырожденной.

Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

будет вырожденной, так как

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 0,$$

а матрица

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

невырожденной, так как

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2 \neq 0.$$

2. Равенство матриц. Действия над матрицами

Равенство матриц. Две матрицы A и B называются равными ($A=B$), если они имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов и их соответствующие элементы равны.

Так, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то $A=B$, если $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$.

Сложение матриц. Если даны две квадратные матрицы одного порядка, например

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

то их суммой называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Аналогично определяется сумма двух прямоугольных матриц, имеющих одинаковое число строк и одинаковое число столбцов.

Пример 1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+2 \\ 1+3 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$

Пример 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$

Легко проверить, что сложение матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, \\ (A + B) + C &= A + (B + C). \end{aligned}$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нуль-матрицей и обозначается (0), или просто 0.

Нуль-матрица при сложении матриц выполняет роль обычного нуля при сложении чисел:

$$A + 0 = A.$$

Например:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число. Произведением матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

на число μ называется матрица

$$A\mu = \mu A = \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \end{pmatrix}.$$

Мы рассмотрели правило умножения матрицы на число для случая квадратной матрицы второго порядка. Совершенно так же умножаются на число квадратные матрицы третьего порядка и прямоугольные матрицы.

При умножении матрицы на нуль получается нуль-матрица:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц. Рассмотрим правило перемножения двух квадратных матриц второго и третьего порядков.

Пусть даны две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

По определению, произведением матрицы A на матрицу B называется матрица $C = A \cdot B$, элементы которой составляют следующим образом:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Если даны матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

то матрица $C = A \cdot B$ составляется следующим образом:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}. \quad (86)$$

Как мы видим, элемент матрицы-произведения, находящийся на пересечении i -й строки и k -го столбца, представляет собой сумму парных произведений элементов i -й строки первой матрицы на элементы k -го столбца второй матрицы.

Например, элемент, стоящий во второй строке и первом столбце матрицы произведения $A \cdot B$, равен сумме произведений элементов второй строки матрицы A на элементы первого столбца матрицы B .

Эти правила сохраняются и для умножения прямоугольных матриц, в которых число столбцов матрицы-множимого равно числу строк матрицы-множителя.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

В результате перемножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько их имеет матрица-множимое, и столько столбцов, сколько их имеет матрица-множитель.

Рассмотрим еще примеры умножения матриц.

Пример 3.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эти примеры, показывают, что произведение двух матриц, вообще говоря, не подчиняется переместительному закону:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Можно проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному закону

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

и распределительному закону

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

При умножении матриц второго порядка особое значение имеет *квадратная матрица*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что при умножении любой квадратной матрицы A второго порядка на матрицу E снова получится матрица A :

$$A \cdot E = E \cdot A = A. \quad (87)$$

Матрица E называется *единичной матрицей*.

Единичная матрица третьего порядка имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что определитель единичной матрицы

$$|E| = 1. \quad (88)$$

Можно показать, что если A и B — две квадратные матрицы одного порядка с определителями $|A|$ и $|B|$, то определитель матрицы $C = A \cdot B$ будет равен произведению определителей перемножаемых матриц, т. е.

$$|C| = |A| \cdot |B|. \quad (89)$$

Пример 5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Как мы видели в примере 3,

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определители этих матриц таковы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad |C| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -10.$$

Итак, действительно,

$$|A| \cdot |B| = |C|.$$

Отметим следующий любопытный факт. Как известно, произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц подобное обстоятельство может и не иметь места, т. е. произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нуль-матрице.

Так, например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, то

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^*.$$

3. Обратная матрица

Рассмотрим теперь так называемую обратную матрицу, понятие которой вводится только для квадратной матрицы.

Если A — квадратная матрица, то обратной для нее матрицей называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию

$$A \cdot A^{-1} = E. \quad (90)$$

Можно доказать, что если выполняется равенство (90), то одновременно выполняется и равенство

$$A^{-1} \cdot A = E. \quad (91)$$

Приведем теперь следующую основную теорему.

Теорема. Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т. е. чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что для матрицы A существует обратная матрица A^{-1} . Покажем, что в этом случае матрица A должна быть невырожденной, т. е. ее определитель $|A| \neq 0$. Действительно, если бы $|A| = 0$, то определитель произведения

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 0.$$

Но это невозможно в силу равенства (91), из которого следует, что

$$|A \cdot A^{-1}| = |E| = 1.$$

Достаточность. Для простоты проведем доказательство для случая матрицы третьего порядка.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

невырожденная матрица, т. е. ее определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Покажем, что в этом случае существует обратная матрица.

* Подобным же свойством обладают, как известно, скалярное и векторное произведения (см. стр. 94 и 98).

В самом деле, пусть A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} . Матрица A^{-1} , обратная матрице A , получается следующим образом.

1) Составим матрицу B , заменяя в матрице A каждый ее элемент a_{ik} его алгебраическим дополнением A_{ik} , деленным на определитель $|A|$ матрицы A :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{13}}{|A|} \\ \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} \\ \frac{A_{31}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{bmatrix}.$$

2) Составим новую матрицу B^* , поменяв местами в матрице B ее строки и столбцы. (Матрица B^* называется *транспонированной* матрицей по отношению к матрице B .)

$$B^* = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{bmatrix}.$$

Покажем, что матрица B^* является обратной матрице A . Для этого составим произведение

$$A \cdot B^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}}{|A|} \\ \frac{a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33}}{|A|} \\ \frac{a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{|A|} \end{bmatrix}. \quad (92)$$

На основании формул (15) и (17) следует, что матрица, стоящая в правой части равенства (92), является единичной. Таким образом,

$$A \cdot B^* = E,$$

откуда следует, что $B^* = A^{-1}$. Итак,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{bmatrix}, \quad (93)$$

и, следовательно, обратная матрица существует.

Составим матрицу, обратную матрице второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, $A_{22} = a_{11}$.

В таком случае

$$B = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{12}}{|A|} \\ \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & -\frac{a_{21}}{|A|} \\ -\frac{a_{12}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{bmatrix}$$

и

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & -\frac{a_{21}}{|A|} \\ -\frac{a_{12}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{bmatrix}. \quad (93')$$

Пример. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Определитель этой матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9.$$

Так как $|A| \neq 0$, то матрица A — невырожденная, и, следовательно, существует обратная ей матрица.

Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Составляем матрицу

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{9} & \frac{6}{9} & -\frac{3}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

Меняя местами строки и столбцы в этой матрице, получим матрицу

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

Предоставляем читателю проверить, что действительно

$$A \cdot A^{-1} = E.$$

Докажем, что определители матрицы A и ее обратной матрицы A^{-1} обратны по величине:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}. \quad (94)$$

Действительно, из формулы (90) имеем

$$A \cdot A^{-1} = E.$$

Применяя формулы (88) и (89), получим:

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1,$$

откуда

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

4. Матричная запись и матричное решение системы уравнений первой степени

Применим рассмотренное в п. 2 этого параграфа правило умножения матриц к так называемому матричному способу записи уравнений. Пусть дана система уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3. \end{aligned} \right\}. \quad (95)$$

Рассмотрим матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Данную систему (95) можно записать, пользуясь определением равенства матриц (п. 2), следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

или, короче,

$$A \cdot X = C. \quad (96)$$

Равенство (96) называется *матричным уравнением*.

Если система (95) записана в форме матричного уравнения (96) и матрица A системы невырожденная, то решается это уравнение следующим образом. Умножим обе части уравнения (96) на матрицу A^{-1} , обратную матрице A :

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot C.$$

Используя сочетательный закон умножения матриц, можно написать

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot C.$$

Но так как $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то получаем решение матричного уравнения в виде

$$X = A^{-1} \cdot C. \quad (97)$$

Пример. Решить матричным способом систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 23, \\ x_2 + 2x_3 &= 13. \end{aligned} \right\}.$$

Решение. В матричной форме эта система запишется в виде $A \cdot X = C$. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} была найдена в п. 3 и имела вид

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

Решение системы записываем в виде (97): $X = A^{-1} \cdot C$, или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, на основании определения равенства матриц, следует:

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти значения неизвестных удовлетворяют данной системе.

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

1. Основные понятия

Пусть в плоскости Q задана прямоугольная система координат. Для упрощения записи и удобства преобразования координаты точек будем обозначать не через x и y , а через x_1 и x_2 или y_1 и y_2 и т. д., а основные орты вместо i и j через e_1 и e_2 .

Рассмотрим уравнения, связывающие переменные x_1 и x_2 с переменными y_1 и y_2 :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

где a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} — постоянные.

Каждой точке M плоскости Q с координатами x_1 и x_2 соответствует в этой же плоскости единственная точка M_1 , координаты которой y_1 и y_2 определяются соотношениями (98).

Точка M_1 называется *образом* точки M . Если точка M описывает в плоскости Q некоторую линию L , то ее образ описывает, вообще говоря, также некоторую линию L_1 . Как говорят, с помощью уравнений (98) устанавливается *отображение* или *преобразование* плоскости Q в себя. В связи с тем, что правые части уравнений (98) первой степени относительно x_1 и x_2 , это отображение называется *линейным*. В заданной системе координат Ox_1x_2 линейное отображение вполне характеризуется квадратной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

составленной из коэффициентов линейного отображения (98).

Если ввести матрицы-столбцы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, то систему уравнений (98) можно записать в следующей матричной форме (см. § 4, п. 4):

$$Y = AX. \quad (99)$$

Матрица A называется *матрицей линейного отображения*, а ее определитель $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ — *определителем линейного отображения*. Линейное отображение называется *невырожденным*, если его матрица невырожденная, т. е. если $|A| \neq 0$. Если же $|A| = 0$, то отображение называется *вырожденным*.

Если линейное отображение невырожденное, то система (98) однозначно разрешима относительно x_1 и x_2 . По формулам Крамера имеем:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{22}}{|A|} y_1 - \frac{a_{12}}{|A|} y_2,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{a_{21}}{|A|} y_1 + \frac{a_{11}}{|A|} y_2.$$

Итак,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{22}}{|A|} y_1 - \frac{a_{12}}{|A|} y_2, \\ x_2 &= -\frac{a_{21}}{|A|} y_1 + \frac{a_{11}}{|A|} y_2. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Уравнения (100) показывают, что, обратно, каждой точке $M_1(y_1, y_2)$ соответствует единственная точка $M(x_1, x_2)$, а именно та точка M , образом которой являлась точка M_1 . Таким образом, невырожденное линейное отображение определяет *взаимно однозначное* отображение плоскости Q в себя. Формулы (100) показывают, что обратное отображение также линейно, а его матрица есть матрица, обратная матрице A (см. § 4, п. 3):

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & -\frac{a_{12}}{|A|} \\ -\frac{a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{bmatrix}.$$

К уравнению (100) также можно прийти, если умножить обе части матричного уравнения (99) на матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot Y = A^{-1} \cdot A \cdot X.$$

Но так как $A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ и $E \cdot X = X$, то $A^{-1} \cdot Y = X$. Итак,

$$X = A^{-1} \cdot Y. \quad (101)$$

Очевидно, тождественному отображению

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_2 \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

соответствует единичная матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 1. Линейное отображение

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 3x_2, \\ y_2 &= 3x_1 + 5x_2 \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

невырожденно, так как его матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет определитель

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$, отличный от нуля. Обратное отображение получим, разрешая систему (103) относительно x_1 и x_2 :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 5y_1 - 3y_2, \\ x_2 &= -3y_1 + 2y_2 \end{aligned} \right\}. \quad (104)$$

Обратное отображение имеет матрицу $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Образом точки $M(1; 2)$ будет точка M_1 с координатами $y_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$, $y_2 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13$. Образом прямой $L: x_1 + 2x_2 - 2 = 0$ будет прямая L_1 , уравнение которой получим, если в уравнение $x_1 + 2x_2 - 2 = 0$ подставим выражения x_1 и x_2 через y_1 и y_2 по формулам (104):

$$(5y_1 - 3y_2) + 2(-3y_1 + 2y_2) - 2 = 0 \text{ или } -y_1 + y_2 - 2 = 0.$$

Пример 2. Линейное отображение

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 3x_2, \\ y_2 &= 4x_1 + 6x_2 \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

вырожденное, так как матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ имеет определитель

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$, равный нулю. Это отображение не имеет обратного и не устанавливает взаимно однозначного отображения плоскости в себя. Действительно, из соотношения (105) легко видеть, что любая точка M прямой $2x_1 + 3x_2 = 0$ имеет своим образом начало координат, так как $y_1 = 2x_1 + 3x_2 = 0$ и $y_2 = 4x_1 + 6x_2 = 2(2x_1 + 3x_2) = 2 \cdot 0 = 0$.

Пример 3. Линейное отображение

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= -x_2 \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

невырожденное и представляет собой отображение, при котором образом каждой точки $M(x_1, x_2)$ является точка M_1 , симметричная относительно оси Ox_1 (зеркальное отображение). Так, например, образом точки $M(1; 2)$ будет согласно уравнениям (106) точка $M_1(1; -2)$.

Рассмотрим радиус-вектор $\overline{OM}$ точки $M(x_1, x_2)$: $\overline{OM} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$. Отображение (98) ставит в соответствие этому радиус-вектору радиус-вектор $\overline{OM}_1$ точки M_1 , являющейся образом точки M : $\overline{OM}_1 = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2$; при этом проекции этих векторов x_1, x_2 и y_1, y_2 связаны формулами (98).

В заключение отметим, что в случае пространства $Ox_1x_2x_3$ линейное отображение определяется системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Если определитель этой матрицы не равен нулю, то отображение называется невырожденным.

Введя матрицы-столбцы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, для невырожден-

ного отображения получим следующие два матричных уравнения, аналогичные уравнениям (99) и (101):

$$Y = A \cdot X, \quad X = A^{-1} \cdot Y. \quad (108)$$

2. Преобразование координат

Рассмотрим в плоскости Q прямоугольную систему координат Ox_1x_2 с основными ортами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Наряду с системой координат Ox_1x_2 , которую будем называть старой, рассмотрим новую систему координат $Ox'_1x'_2$ с ортами $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Начало координат старой и новой систем совпадают (рис. 79).

Возьмем в плоскости Q произвольную точку M . Пусть ее координаты в старой системе координат суть x_1, x_2 , а в новой x'_1, x'_2 . Найдем связь между старыми и новыми координатами. Для этого разложим радиус-вектор $\overline{OM}$ точки M на составляющие по осям в новой и старой системах координат:

$$\overline{OM} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 \quad \text{и} \quad \overline{OM} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2.$$

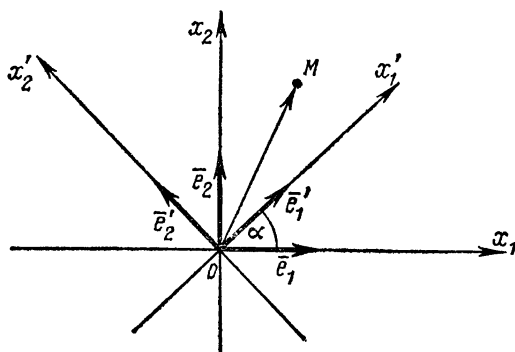


Рис. 79

Таким образом,

$$x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2. \quad (109)$$

Умножим обе части равенства (109) скалярно на $\mathbf{e}_1$. Принимая во внимание, что $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$ и $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, получим

$$x_1 = x'_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1) + x'_2 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2). \quad (110)$$

Умножая обе части равенства (109) скалярно на $\mathbf{e}_2$, получим аналогично

$$x_2 = x'_1 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1) + x'_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_2). \quad (111)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = |\mathbf{e}_1| |\mathbf{e}'_1| \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1}) = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1}), \\ \alpha_{12} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2}), \\ \alpha_{21} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1 = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_1}), \quad \alpha_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_2 = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2}). \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Тогда уравнения (110) и (111) запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2, \\ x_2 &= \alpha_{21} x'_1 + \alpha_{22} x'_2. \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Формулы (113) называются *формулами преобразования координат на плоскости*. Матрица

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \quad (114)$$

называется *матрицей преобразования*.

Рассмотрим матрицы-столбцы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$. Тогда преобразование координат (113) в матричной форме запишется в виде

$$X = LX'.$$

Установим некоторые свойства матрицы L . Прежде всего найдем разложение векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на составляющие по осям Ox'_1 и Ox'_2 . Так как $\text{пр}_{\mathbf{e}'_1} \mathbf{e}_1 = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1}) = \alpha_{11}$, $\text{пр}_{\mathbf{e}'_2} \mathbf{e}_1 = \alpha_{12}$, $\text{пр}_{\mathbf{e}'_1} \mathbf{e}_2 = \alpha_{21}$, $\text{пр}_{\mathbf{e}'_2} \mathbf{e}_2 = \alpha_{22}$, то

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \alpha_{11} \mathbf{e}'_1 + \alpha_{12} \mathbf{e}'_2, \\ \mathbf{e}_2 &= \alpha_{21} \mathbf{e}'_1 + \alpha_{22} \mathbf{e}'_2. \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Формулы (115) дают разложение векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ по векторам $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Аналогично получим разложение ортов $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ на составляющие по осям Ox_1 и Ox_2 :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11} \mathbf{e}_1 + \alpha_{21} \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_2 &= \alpha_{12} \mathbf{e}_1 + \alpha_{22} \mathbf{e}_2. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Так как $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$, то, принимая во внимание формулы (115), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 &= \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} = 0, \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 &= \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = 1.\end{aligned}\quad (117)$$

Аналогично, так как $\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = 1$, $\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = 0$, $\mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_2 = 1$, то из формул (116) получим

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = 1, \quad \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 = 1. \quad (118)$$

Иными словами, матрица L обладает следующими свойствами: сумма квадратов элементов строки (или столбца) равна единице, сумма парных произведений элементов строки (столбца) на соответствующие элементы другой строки (столбца) равна нулю. Матрица, обладающая этими свойствами, называется *ортогональной*.

Рассмотрим транспонированную матрицу $L^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, которая получается из матрицы L заменой строк столбцами. Составим произведение матриц L^*L . Принимая во внимание равенства (117) и (118), получим:

$$\begin{aligned}L^* \cdot L &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 & \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} \\ \alpha_{12}\alpha_{11} + \alpha_{22}\alpha_{21} & \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.\end{aligned}\quad (119)$$

Таким образом, матрица L^* является обратной по отношению к матрице L : $L^* = L^{-1}$.

Замечание. Если новая система координат получена из старой системы поворотом осей на угол α , то легко видеть, что формулы (113) аналогичны формулам поворота осей координат, рассмотренным в гл. I, § 6, п. 2.

Действительно, в этом случае (см. рис. 79)

$$\alpha_{11} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1}) = \cos \alpha, \quad \alpha_{12} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha,$$

$$\alpha_{21} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_1}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \alpha_{22} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2}) = \cos \alpha,$$

и, следовательно, формулы (113) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned}x_1 &= x'_1 \cos \alpha - x'_2 \sin \alpha, \\ x_2 &= x'_1 \sin \alpha + x'_2 \cos \alpha.\end{aligned} \right\}$$

Пусть в старой системе координат Ox_1x_2 задано линейное отображение (98) плоскости Q в себя:

$$\left. \begin{aligned}y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned} \right\}$$

с матрицей отображения $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Как мы знаем, это отобра-

жение можно записать в матричной форме (99)

$$Y = AX,$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, а $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Здесь (x_1, x_2) — координаты точки M , а (y_1, y_2) — координаты ее образа M_1 в старой системе координат. Пусть (x'_1, x'_2) — координаты точки M , а (y'_1, y'_2) — координаты ее образа M_1 в новой системе координат. Тогда по формулам (113) получим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2, \\ x_2 &= \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 \end{aligned} \right\}$$

и аналогично

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}y'_1 + \alpha_{12}y'_2, \\ y_2 &= \alpha_{21}y'_1 + \alpha_{22}y'_2 \end{aligned} \right\}.$$

Если ввести матрицы-столбцы $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ и $Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}$ и матрицу преобразования $L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, то формулы преобразования можно, как мы знаем, записать в следующей матричной форме:

$$X = LX', Y = LY'. \quad (120)$$

Найдем теперь зависимость между координатами точки M и ее образа M_1 в новой системе координат $Ox'_1x'_2$. Для этого подставим в уравнение (99) выражения X и Y по формулам (120):

$$LY' = ALX'. \quad (121)$$

Умножим обе части этого матричного равенства на матрицу L^{-1} , обратную матрице L . Замечая, что $L^{-1} \cdot L = E$, $EY' = Y'$, получим

$$Y' = L^{-1}ALX'. \quad (122)$$

Таким образом, координаты x'_1, x'_2 точки M и координаты y'_1, y'_2 ее образа в новой системе координат $Ox'_1x'_2$ связаны формулой (122), которая показывает, что в новой системе координат линейное отображение плоскости Q самой в себя имеет матрицу $A' = L^{-1}AL$.

Итак, в новой системе координат линейное отображение имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2, \\ y'_2 &= a'_{21}x'_1 + a'_{22}x'_2. \end{aligned} \right\}$$

Матрица этого отображения $A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$ связана со старой матрицей A соотношением $A' = L^{-1}AL$.

Все сказанное для случая плоскости легко переносится на случай пространства.

Пусть $Ox_1x_2x_3$ и $Ox'_1x'_2x'_3$ — две прямоугольные системы координат в пространстве с общим началом O и с основными осями соответственно e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3 .

Положим

$$\alpha_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j = \cos(\widehat{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j}) \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3).$$

Например, $\alpha_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = \cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1})$, $\alpha_{23} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_3 = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_3})$.

Тогда аналогично предыдущему получим формулы преобразования координат:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_{13}x'_3, \\ x_2 &= \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{23}x'_3, \\ x_3 &= \alpha_{31}x'_1 + \alpha_{32}x'_2 + \alpha_{33}x'_3 \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

с матрицей преобразования

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что матрица L ортогональна, а

$$L^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = L^{-1}.$$

Если в старой системе координат $Ox_1x_2x_3$ задано линейное отображение

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \right\}$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то в новой системе координат матрица линейного отображения определяется формулой $A' = L^{-1}AL$.

3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Квадратичной формой двух переменных x_1 и x_2 называется однородный многочлен второй степени относительно двух переменных x_1 и x_2 :

$$F(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \quad (124)$$

Покажем, как квадратичную форму можно записать в матричной форме. Прежде всего запишем квадратичную форму в виде

$$F(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)x_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)x_2,$$

полагая $a_{21} = a_{12}$.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (125)$$

называется матрицей квадратичной формы.

Введя матрицу-столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и матрицу-строку $X^* = (x_1, x_2)$, легко убедиться, что квадратичную форму (124) можно записать следующим образом в матричной форме:

$$F(x_1, x_2) = X^*AX. \quad (126)$$

Действительно, по правилу умножения матриц последовательно находим:

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}, \\ X^*AX &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \\ &= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = F(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Будем трактовать переменные x_1 и x_2 как координаты точек в прямоугольной системе координат Ox_1x_2 . Рассмотрим новую прямоугольную систему координат $Ox'_1x'_2$. Пусть координаты точек в старой и новой системах связаны между собой формулами преобразования (113)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2, \\ x_2 &= \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 \end{aligned} \right\}$$

с ортогональной матрицей преобразования $L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Формулы преобразования (113) можно записать в следующей матричной форме (см. п. 2):

$$X = LX'. \quad (127)$$

Здесь $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$.

Если вместо x_1 и x_2 в квадратичную форму (124) подставим их выражения (113) через x'_1 и x'_2 , то получим квадратичную форму переменных x'_1 и x'_2 : $F(x'_1, x'_2)$.

Поставим перед собой задачу: выбрать новую систему координат $Ox'_1x'_2$ так, чтобы в квадратичной форме $F(x'_1, x'_2)$ отсутствовал член с произведением координат, иными словами, чтобы она приняла следующий вид:

$$F(x'_1, x'_2) = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2, \quad (128)$$

который называется *каноническим*.

Для сокращения записи преобразования будем проводить в матричной форме.

Рассмотрим прежде всего матрицу-строку $X'^* = (x'_1, x'_2)$. Легко убедиться, что имеет место следующее равенство:

$$X'^* = X'^* \cdot L^{-1}. \quad (129)$$

Действительно, так как $L^{-1} = L^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, (см. п. 2), то

$$X'^* \cdot L^{-1} = (x'_1 x'_2) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = (\alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 \quad \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2).$$

Но так как на основании равенств (113) $\alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 = x_1$ и $\alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 = x_2$, то $X'^* L^{-1} = (x_1, x_2) = X^*$.

Подставим в правую часть равенства (126) для $F(x_1, x_2)$ выражения X^* и X из равенств (127) и (129):

$$F(x_1, x_2) = X^* A X = (X'^* L^{-1}) A (L X') = X'^* (L^{-1} A L) X' = F(x'_1, x'_2).$$

Итак, в новой системе координат матрица квадратичной формы

$$F(x'_1, x'_2) = X'^* (L^{-1} A L) X'$$

имеет следующий вид:

$$A' = L^{-1} A L.$$

Выберем теперь новую систему координат $Ox'_1 x'_2$ так, чтобы матрица A приняла следующую форму:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае говорят, что матрица *приведена к диагональному виду*. При этом квадратичная форма $F(x'_1, x'_2)$ запишется в виде (128).

Итак, новую систему координат надо выбрать таким образом, чтобы матрица L преобразования удовлетворяла соотношению

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = L^{-1} A L.$$

Умножим обе части этого равенства слева на матрицу L :

$$L \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = L L^{-1} A L = E A L = A L.$$

Итак, матрица L преобразования удовлетворяет условию

$$L \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = A L.$$

Так как

$$L \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\lambda_1 & \alpha_{12}\lambda_2 \\ \alpha_{21}\lambda_1 & \alpha_{22}\lambda_2 \end{pmatrix}$$

и

$$A L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} & a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} \\ a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} & a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\lambda_1 & \alpha_{12}\lambda_2 \\ \alpha_{21}\lambda_1 & \alpha_{22}\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} & a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} \\ a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} & a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда, на основании определения равенства матриц, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11}\lambda_1 &= a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21}, \\ \alpha_{21}\lambda_1 &= a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} \alpha_{12}\lambda_2 &= a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22}, \\ \alpha_{22}\lambda_2 &= a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} \end{aligned} \right\},$$

или

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11}(a_{11}-\lambda_1) + \alpha_{21}a_{12} &= 0, \\ \alpha_{11}a_{21} + \alpha_{21}(a_{22}-\lambda_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{12}(a_{11}-\lambda_2) + \alpha_{22}a_{12} &= 0, \\ \alpha_{12}a_{21} + \alpha_{22}(a_{22}-\lambda_2) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (131)$$

Таким образом, неизвестные коэффициенты преобразования α_{11} , α_{12} , α_{21} , α_{22} находятся из систем уравнений (130) и (131). Каждая из этих систем является однородной. Для того чтобы они имели отличные от нуля решения, необходимо и достаточно (см. § 2, п. 4), чтобы определитель каждой из этих систем был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, числа λ_1 и λ_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (132)$$

или

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (133)$$

Дискриминант D этого квадратного уравнения всегда неотрицателен. Действительно,

$$\begin{aligned} D &= (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22} + \\ &+ 4a_{12}a_{21} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2, \text{ так как } a_{12} = a_{21}. \end{aligned}$$

Итак, уравнение (132) всегда имеет действительные корни.

Уравнение (132) называется *характеристическим уравнением* матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Корни λ_1 и λ_2 этого уравнения называются *собственными значениями* матрицы A . Подставляя найденные из уравнения (132) значения λ_1 и λ_2 в системы (130), (131) и решая их, найдем коэффициенты преобразования координат α_{11} , α_{12} , α_{21} , α_{22} .

З а м е ч а н и е 1. Квадратичная форма трех переменных x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

Матрицей этой квадратичной формы называется матрица третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

в которой $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$. Матрица A в этом случае называется *симметрической*.

Квадратичную форму трех переменных можно привести к виду

$$F(x'_1, x'_2, x'_3) = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 + \lambda_3 x'^2_3,$$

где числа λ_1 , λ_2 и λ_3 всегда действительны и удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ квадратичной формы соответствует в системе координат Ox_1x_2 линейное отображение

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \right\}$$

При переходе к новой системе координат $Ox'_1x'_2$ с матрицей преобразования $L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ линейное отображение будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2, \\ y'_2 &= a'_{21}x'_1 + a'_{22}x'_2. \end{aligned} \right\}$$

Матрица нового отображения $A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$ связана с матрицей A соотношением $A' = L^{-1}AL$ (см. п. 2).

Если за новую систему координат выбрать ту, в которой квадратичная форма $F(x'_1, x'_2) = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2$, то в этой системе координат, как было показано выше, матрица A' имеет вид $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, и формулы линейного преобразования (98) в системе координат $Ox'_1x'_2$ запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= \lambda_1 \cdot x'_1 + 0 \cdot x'_2, \\ y'_2 &= 0 \cdot x'_1 + \lambda_2 \cdot x'_2 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= \lambda_1 x'_1, \\ y'_2 &= \lambda_2 x'_2. \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Рассмотрим в новой системе координат $Ox'_1x'_2$ точки $M_1(1; 0)$, $M_2(0, 1)$. Очевидно, что $\overline{OM}_1 = \mathbf{e}'_1$ и $\overline{OM}_2 = \mathbf{e}'_2$. В силу формул (134) образами точек M_1 и M_2 будут соответственно точки $Q_1(\lambda_1; 0)$ и $Q_2(0; \lambda_2)$. Вектор $\overline{OQ}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}'_1$ будет образом вектора $\overline{OM}_1 = \mathbf{e}'_1$, а вектор $\overline{OQ}_2 = \lambda_2 \mathbf{e}'_2$ — образом вектора $\overline{OM}_2 = \mathbf{e}'_2$.

Итак, при линейном отображении (134) векторы $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ преобразуются в соответственно коллинеарные векторы $\lambda_1 \mathbf{e}'_1$ и $\lambda_2 \mathbf{e}'_2$.

Если при некотором линейном отображении существует не равный нулю вектор $\mathbf{g}$, образом которого является коллинеарный ему вектор $\lambda \mathbf{g}$, то вектор $\mathbf{g}$ называется *собственным вектором* этого линейного отображения, а число λ — *собственным значением* отображения. Таким образом векторы $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ являются собственными векторами линейного отображения (134).

4. Упрощение общего уравнения кривой второго порядка

Покажем, как с помощью преобразований квадратичных форм можно упростить общее уравнение кривой второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (135)$$

Если это уравнение не содержит члена с произведением координат, т. е. коэффициент $2B \neq 0$, то, дополняя члены, содержащие x и y , до полных квадратов, мы можем привести уравнение (135) к каноническому виду (см. гл. II, § 2, п. 10).

Пусть теперь в уравнении (135) коэффициент $2B \neq 0$. В этом случае для приведения уравнения к виду, не содержащему члена с произведением координат, поступаем следующим образом.

Рассматривая квадратичную форму $F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, составленную из старших членов левой части уравнения (135), приводим ее методами, изложенными в предыдущем пункте, к сумме квадратов. При этом общее уравнение кривой второго порядка (135) преобразуется к виду, в котором будет отсутствовать член с произведением координат.

Пример. Привести к каноническому виду общее уравнение кривой второго порядка

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

Решение. Квадратичная форма, составленная из старших членов данного уравнения, имеет вид

$$F(x, y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2.$$

Здесь $a_{11} = 5$, $a_{12} = a_{21} = 4$, $a_{22} = 5$; матрица $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Составляем характеристическое уравнение (132):

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 1$. Квадратичная форма в новой системе координат $Ox'y'$ запишется, согласно формуле (128), в виде

$$F(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 9x'^2 + 1 \cdot y'^2.$$

Найдем матрицу $L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ перехода от старой системы координат Oxy к новой $Ox'y'$. Для этого составим системы уравнений (130), (131):

$$\left. \begin{aligned} (5-9)\alpha_{11} + 4\alpha_{21} &= 0, \\ 4\alpha_{11} + (5-9)\alpha_{21} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} (5-1)\alpha_{12} + 4\alpha_{22} &= 0, \\ 4\alpha_{12} + (5-1)\alpha_{22} &= 0 \end{aligned} \right\},$$

или

$$\left. \begin{aligned} -4\alpha_{11} + 4\alpha_{21} &= 0, \\ 4\alpha_{11} - 4\alpha_{21} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} 4\alpha_{12} + 4\alpha_{22} &= 0, \\ 4\alpha_{12} + 4\alpha_{22} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Каждая из этих систем сводится к одному уравнению. Первая система к уравнению $\alpha_{11} = \alpha_{21}$, а вторая — к уравнению $\alpha_{22} = -\alpha_{12}$.

Согласно п. 2, матрица L ортогональна. Поэтому должны иметь место равенства:

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = 1 \text{ и } \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = 1.$$

Так как в то же время $\alpha_{11} = \alpha_{21}$ и $\alpha_{22} = -\alpha_{12}$, находим

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = \frac{1}{\pm \sqrt{2}} \text{ и } \alpha_{12} = \frac{-1}{\pm \sqrt{2}}, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{\pm \sqrt{2}},$$

или, выбирая для определенности перед корнем знак «плюс», получим

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Итак, формулы преобразования координат в данном случае принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x' - y'), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x' + y'). \end{aligned} \right\}$$

Найдем теперь, какой вид в новой системе координат примут младшие члены общего уравнения кривой:

$$-18x - 18y + 9 = -\frac{18}{\sqrt{2}} (x' - y') - \frac{18}{\sqrt{2}} (x' + y') + 9 = -\frac{36}{\sqrt{2}} x' + 9.$$

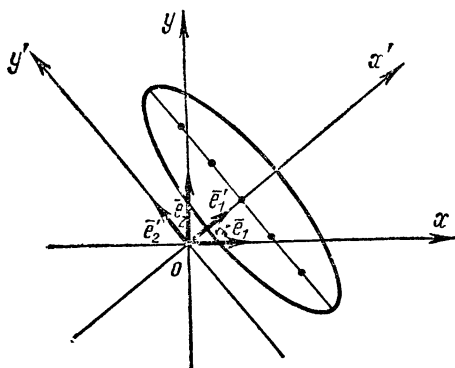


Рис. 80

Таким образом, в новой системе координат $Ox'y'$ уравнение линии запишется в виде

$$9x'^2 + y'^2 - \frac{36}{\sqrt{2}} x' + 9 = 0,$$

или

$$x'^2 + \frac{y'^2}{9} - \frac{4x'}{\sqrt{2}} + 1 = 0.$$

Выделяя в членах, содержащих x' , полный квадрат, получим

$$\frac{(x' - \sqrt{2})^2}{1} + \frac{y'^2}{9} = 1.$$

Таким образом, данная линия является эллипсом, центр которого в новой системе координат находится в точке $O_1(\sqrt{2}; 0)$. Для того чтобы установить расположение эллипса относительно старой системы координат, надо определить положение новых осей относительно старой системы. Для этого достаточно установить углы между осями e_1 и e_2 старой системы и e'_1 и e'_2 новой системы координат.

Согласно формулам (112)

$$\begin{aligned} \cos(\hat{e}_1, \hat{e}'_1) &= \alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(\hat{e}_1, \hat{e}'_2) = \alpha_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos(\hat{e}_2, \hat{e}'_1) &= \alpha_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(\hat{e}_2, \hat{e}'_2) = \alpha_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, углы, которые оси новой системы образуют с осями старой, таковы:

$$\hat{e}_1, \hat{e}'_1 = 45^\circ, \quad \hat{e}_1, \hat{e}'_2 = 135^\circ, \quad \hat{e}_2, \hat{e}'_1 = 45^\circ, \quad \hat{e}_2, \hat{e}'_2 = 45^\circ.$$

Расположение осей и эллипса приведено на рис. 80.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ПЛОСКОСТЬ

1. Уравнение поверхности

Как мы видели в гл. I, § 5, уравнение $F(x, y) = 0$, вообще говоря, определяет на плоскости некоторую линию, т. е. геометрическое место точек плоскости Oxy , координаты которых x и y удовлетворяют этому уравнению. Подобно этому уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

вообще говоря, определяет в пространстве $Oxyz$ некоторую *поверхность*, т. е. *геометрическое место точек*, координаты которых x, y, z удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$. Уравнение (1) называется уравнением этой поверхности, а x, y и z — текущими координатами.

Часто, однако, поверхность задается не уравнением, а как геометрическое место точек, обладающих тем или иным свойством. В этом случае требуется найти уравнение поверхности, исходя из ее геометрических свойств.

Пример. Найти уравнение шаровой поверхности (сферы) радиуса R с центром в точке $O_1(x_1; y_1; z_1)$.

Решение. Согласно определению сферы, расстояние любой ее точки $M(x; y; z)$ от центра $O_1(x_1; y_1; z_1)$ равно радиусу R : $O_1M = R$. Но

$$O_1M = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

(см. гл. I, формула (6)).

Следовательно,

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} = R,$$

или

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = R^2. \quad (2)$$

Мы получили искомое уравнение сферы, так как ему удовлетворяют координаты любой ее точки и, очевидно, не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на данной сфере.

В частности, если центр сферы совпадает с началом координат, то уравнение сферы (2) примет следующий вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (3)$$

2. Нормальный вектор плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку

Рассмотрим в пространстве плоскость Q . Положение ее вполне определяется заданием вектора N , перпендикулярного этой плоскости, и некоторой фиксированной точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, лежащей в плоскости Q . Вектор N , перпендикулярный плоскости Q , называется *нормальным вектором этой плоскости*. Если обозначить через A, B и C проекции нормального вектора N , то

$$N = Ai + Bj + Ck.$$

Выведем уравнение плоскости Q , проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и имеющей данный нормальный вектор $N = Ai + Bj + Ck$. Для этого рассмотрим вектор $\overline{M_1M}$, соединяющий точку M_1 с произвольной точкой $M(x; y; z)$ плоскости Q (рис. 81).

При любом положении точки M на плоскости Q вектор $\overline{M_1M}$ перпендикулярен нормальному вектору N плоскости Q . Поэтому скалярное

произведение $\overline{M_1M} \cdot N = 0$. Запишем скалярное произведение $\overline{M_1M} \cdot N$ через проекции. Так как $\overline{M_1M} = (x - x_1)i + (y - y_1)j + (z - z_1)k$, а вектор $N = Ai + Bj + Ck$, то

$$\overline{M_1M} \cdot N = A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1)$$

и, следовательно,

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \quad (4)$$

Мы показали, что координаты любой точки $M(x; y; z)$ плоскости Q удовлетворяют уравнению (4). Нетрудно заметить, что координаты точек, не лежащих на плоскости Q , этому уравнению не удовлетворяют (в последнем случае $\overline{MM_1} \cdot N \neq 0$). Следовательно, нами получено искомое уравнение плоскости Q . Уравнение (4) называется *уравнением плоскости, проходящей через данную точку*. Оно первой степени относительно текущих координат x, y и z .

Итак, мы показали, что *всякой плоскости соответствует уравнение первой степени относительно текущих координат*.

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ перпендикулярно вектору $N = 2i + 4k$.

Решение. Здесь $A = 2, B = 0, C = 4$. На основании формулы (4) получим

$$2(x - 1) + 0(y + 2) + 4(z - 3) = 0,$$

или, после упрощения, $x + 2z - 7 = 0$.

Придавая коэффициентам A , B и C уравнения (4) различные значения, мы можем получить уравнение любой плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$. Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется *связкой плоскостей*. Уравнение (4), в котором коэффициенты A , B и C могут принимать любые значения, называются *уравнением связки плоскостей*.

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1; -1; 0)$, $M_2(2; 1; -3)$ и $M_3(-1; 0; 1)$ (рис. 82).

Решение. Напишем уравнение связки плоскостей, проходящих через точку M_1 :

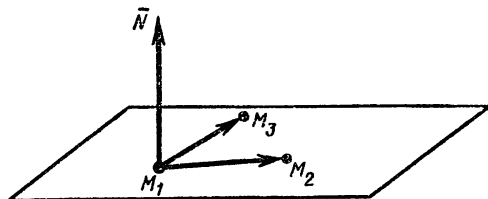


Рис. 82

$$A(x-1) + B(y+1) + Cz = 0.$$

Так как векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ лежат в искомой плоскости, то вектор, равный их векторному произведению и, следовательно, перпендикулярный этой плоскости, можно принять за ее нормальный вектор:

$$\mathbf{N} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

Таким образом, $A=5$; $B=5$; $C=5$, и искомое уравнение примет следующий вид:

$$5(x-1) + 5(y+1) + 5z = 0,$$

или

$$x + y + z = 0.$$

3. Общее уравнение плоскости и его частные случаи

В п. 2 мы показали, что *всякой плоскости соответствует уравнение первой степени относительно текущих координат*.

Рассмотрим теперь общее уравнение первой степени с тремя переменными x , y и z .

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (5)$$

По крайней мере один из коэффициентов A , B или C не равен нулю, так как иначе мы имели бы не уравнение, а тождество $D=0$. Предполагая для определенности, что $C \neq 0$, представим уравнение (5) в виде

$$A(x-0) + B(y-0) + C\left(z + \frac{D}{C}\right) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) равносильно уравнению (5). Сравнивая уравнение (6) с уравнением (4), мы видим, что оно, а следовательно, и равносильное ему уравнение (5) являются уравнением плоскости

с нормальным вектором $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, проходящей через точку $M_1(0; 0; -\frac{D}{C})$. Итак, мы показали, что имеет место предложение, обратное доказанному в п. 2, а именно: *всякое уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ первой степени относительно текущих декартовых координат x, y и z представляет собой уравнение некоторой плоскости*. При этом коэффициенты A, B, C являются проекциями нормального вектора плоскости на координатные оси.

Уравнение (5) называется *общим уравнением плоскости*.

Пример. Выяснить, лежат ли точки $M_1(1; 2; -3)$ и $M_2(4; 2; 1)$ в плоскости $2x + 3y - 5z - 23 = 0$.

Решение. Точка тогда и только тогда лежит в плоскости, когда ее координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости. Поэтому для решения задачи нужно проверить, удовлетворяют ли координаты точек M_1 и M_2 уравнению плоскости. Подставляя координаты точки $M_1(1; 2; -3)$ в уравнение плоскости, получим $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5(-3) - 23 = 0$, т. е. точка M_1 лежит в плоскости. Для точки $M_2(4; 2; 1)$ имеем: $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - 23 = -14 \neq 0$. Так как координаты точки M_2 не удовлетворяют уравнению плоскости, точка M_2 не лежит в этой плоскости.

Рассмотрим частные случаи общего уравнения плоскости (5)

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Выясним, какие особенности будет иметь расположение плоскости относительно системы координат, если один или несколько коэффициентов уравнения (5) обращаются в нуль.

1. Свободный член равен нулю. Пусть $D = 0$. В этом случае уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz = 0$. Плоскость проходит через начало координат $O(0; 0; 0)$, так как числа $x = 0, y = 0, z = 0$ удовлетворяют ее уравнению. Итак, *если свободный член уравнения плоскости равен нулю, то плоскость проходит через начало координат*.

2. Один из коэффициентов при текущих координатах равен нулю. Пусть, например, $C = 0$. В этом случае уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + D = 0$. Нормальный вектор плоскости $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ перпендикулярен оси Oz (так как его третья проекция равна нулю). Следовательно, сама плоскость параллельна оси Oz . Если уравнение $Ax + By + D = 0$ рассматривать в плоскости Oxy , то оно будет уравнением прямой, по которой наша плоскость пересекает координатную плоскость Oxy . Рекомендуем читателю установить, что плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy , а плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox . Итак, мы приходим к следующему выводу: *если в уравнении плоскости отсутствует член, содержащий координату z или y , или x , то плоскость параллельна соответственно оси Oz или Oy , или Ox* .

3. Коэффициент при текущей координате и свободный член равны нулю. Например, $C = D = 0$. В этом случае уравнению $Ax + By = 0$ соответствует плоскость, проходящая через начало координат (согласно п. 1). Так как, кроме того, нормальный вектор плоскости

$N = Ai + Bj$ перпендикулярен оси Oz , то сама плоскость $Ax + By = 0$ проходит через ось Oz . Аналогично, уравнениям $By + Cz = 0$ и $Ax + Cz = 0$ отвечают плоскости, проходящие соответственно через оси Ox и Oy .

4. Два коэффициента при текущих координатах равны нулю. Пусть, например, $A = B = 0$. Тогда плоскость $Cz + D = 0$ в силу предыдущего будет параллельна оси Ox и оси Oy , а следовательно, параллельна координатной плоскости Oxy . К этому же выводу можно прийти, если записать уравнение $Cz + D = 0$ в виде $z = -\frac{D}{C}$. Уравнение $z = -\frac{D}{C}$ показывает, что любая точка плоскости имеет одну

и ту же аппликату, т. е. что плоскость параллельна координатной плоскости Oxy . Аналогично, уравнениям $Ax + D = 0$ и $By + D = 0$ отвечают плоскости, соответственно параллельные координатным плоскостям Oyz и Oxz .

5. Два коэффициента при текущих координатах и свободный член равны нулю. Пусть, например, $A = B = D = 0$. Тогда уравнение плоскости примет вид $Cz = 0$, или $z = 0$. Эта плоскость проходит через начало координат (отсутствует свободный член), а ее нормальный вектор $N = k$. Следовательно, $z = 0$ — уравнение плоскости Oxy . Аналогично можно убедиться, что $y = 0$ — уравнение плоскости Oxz , а $x = 0$ — уравнение плоскости Oyz .

4. Построение плоскости по ее уравнению

Зная уравнение плоскости, легко построить саму плоскость. Для этого достаточно найти три какие-либо ее точки, не лежащие на одной прямой. Для того чтобы найти какую-либо точку на плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, достаточно задать произвольно значения двух координат, а третью найти из уравнения плоскости. Проще всего определять точки пересечения плоскости с осями координат.

Пример 1. Построить плоскость $2x + 3y + 6z - 6 = 0$.

Решение. Найдем точки пересечения плоскости с осями координат. Для того чтобы найти точку пересечения плоскости с осью Ox , надо в уравнении плоскости принять $y = 0$ и $z = 0$ (так как для любой точки оси Ox $y = z = 0$). Имеем: $2x + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 6 = 0$, откуда $x = 3$. Аналогично, полагая $x = 0$, $y = 0$, находим аппликату точки пересечения плоскости с осью Oz : $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 6z - 6 = 0$, откуда $z = 1$. Наконец, при $x = z = 0$ находим $y = 2$. Итак, данная плоскость $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ проходит через точки $M_1(3; 0; 0)$, $M_2(0; 0; 1)$, $M_3(0; 2; 0)$ (рис. 83).

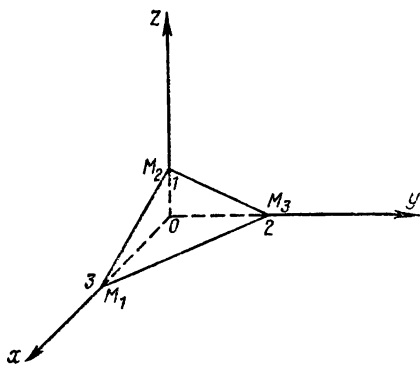


Рис. 83

Пример 2. Построить плоскость $2x + 5y - 10 = 0$.

Решение. Эта плоскость параллельна оси Oz . Для ее построения достаточно найти точки пересечения с осями Ox и Oy . Полагая $x=0$, найдем $y=2$; полагая $y=0$, найдем $x=5$. Следовательно, плоскость проходит через точки $M_1(0; 2; 0)$, $M_2(5; 0; 0)$ (рис. 84).

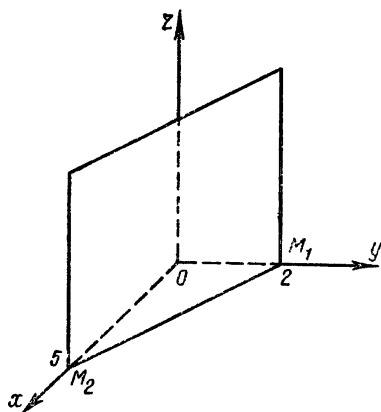


Рис. 84

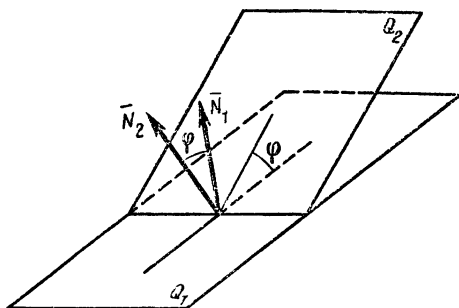


Рис. 85

5. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Рассмотрим две плоскости Q_1 и Q_2 , заданные соответственно уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ (плоскость } Q_1)$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \text{ (плоскость } Q_2).$$

Под углом между двумя плоскостями мы понимаем один из двугранных углов, образованных этими плоскостями (рис. 85). Угол φ между нормальными векторами N_1 и N_2 плоскостей Q_1 и Q_2 очевидно равен одному из указанных смежных двугранных углов (рис. 85). Поэтому

$$\cos \varphi = \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1| \cdot |N_2|}$$

(см. гл. III, формула (71)).

Но так как

$$N_1 = A_1i + B_1j + C_1k, \quad N_2 = A_2i + B_2j + C_2k,$$

то

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (7)$$

Пример 1. Определить угол между плоскостями $x + 2y - 3z + 4 = 0$ и $2x + 3y + z + 8 = 0$.

Решение. Применяя формулу (7), получим

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{5}{14}.$$

Из таблицы находим, что $\varphi \approx 69^\circ 05'$. Итак, один из смежных двугранных углов приближенно равен $69^\circ 05'$.

Рассмотрим теперь условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

Условие параллельности двух плоскостей. Две плоскости Q_1 и Q_2 тогда и только тогда параллельны друг другу, когда их нормальные векторы $\mathbf{N}_1 = A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k}$ и $\mathbf{N}_2 = A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + C_2\mathbf{k}$ параллельны между собой. Поэтому из условия параллельности двух векторов (см. гл. III, формула (64)) получим

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (8)$$

Это и есть условие параллельности двух плоскостей. Итак, *две плоскости параллельны друг другу тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих текущих координатах пропорциональны.*

Условие перпендикулярности. Две плоскости перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ взаимно перпендикулярны. Поэтому, воспользовавшись условием перпендикулярности двух векторов (см. гл. III, формула (69)), получим

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (9)$$

Равенство (9) дает условие перпендикулярности двух плоскостей. Итак, *две плоскости перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда сумма парных произведений одноименных коэффициентов при текущих координатах равна нулю.*

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-2; 1; 4)$ параллельно плоскости $3x + 2y - 7z + 8 = 0$.

Решение. Напишем уравнение связки плоскостей, проходящих через точку $M_1(-2; 1; 4)$ (см. формулу (4)):

$$A(x + 2) + B(y - 1) + C(z - 4) = 0.$$

Из плоскостей связки нам нужно выделить ту, которая параллельна на плоскости $3x + 2y - 7z + 8 = 0$. Для этого воспользуемся условием (8) параллельности плоскостей: $\frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \frac{C}{-7}$. Итак, искомые коэффициенты A , B и C должны быть пропорциональны числам 3, 2 и -7 . Поэтому можно положить $A = 3$, $B = 2$ и $C = -7$. Подставляя найденные значения коэффициентов A , B и C в уравнение

$$A(x + 2) + B(y - 1) + C(z - 4) = 0,$$

получим

$$3(x + 2) + 2(y - 1) + (-7)(z - 4) = 0$$

или, после упрощений,

$$3x + 2y - 7z + 32 = 0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.

Пример 3. Через точку $M_1(-2; 3; 6)$ провести плоскость перпендикулярно плоскостям $2x + 3y - 2z - 4 = 0$ и $3x + 5y + z = 0$.

Решение. Запишем уравнение связки плоскостей, проходящих через точку M_1 :

$$A(x+2) + B(y-3) + C(z-6) = 0.$$

Неизвестные коэффициенты A , B и C найдем из условия (9) перпендикулярности плоскостей:

искомая плоскость должна быть перпендикулярна плоскости $2x + 3y - 2z - 4 = 0$, значит $2A + 3B + (-2) \cdot C = 0$;

искомая плоскость должна быть перпендикулярна плоскости $3x + 5y + z = 0$, значит $3A + 5B + 1 \cdot C = 0$.

Итак, для нахождения неизвестных коэффициентов A , B и C получаем однородную систему из двух уравнений первой степени с тремя неизвестными*:

$$\begin{cases} 2A + 3B - 2C = 0, \\ 3A + 5B + C = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем

$$A = k \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 13k, \quad B = -k \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8k, \quad C = k \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = k.$$

В частности, при $k=1$ найдем: $A=13$, $B=-8$, $C=1$.

Подставляя найденные значения A , B и C в уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 , получим

$$13(x+2) - 8(y-3) + 1 \cdot (z-6) = 0, \text{ или } 13x - 8y + z + 44 = 0.$$

6. Точка пересечения трех плоскостей

Пусть даны три плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$. Чтобы найти точку пересечения этих плоскостей, нужно, очевидно, решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

Если определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система имеет единственное решение**, т. е. три плоскости пересекаются в одной точке.

* См. гл. III, § 2, формулу (31).

** См. гл. III, § 2, п. 3.

Пример. Найти точку пересечения плоскостей:

$$x + y - 2z + 3 = 0, \quad 2x - 2y + 3z - 7 = 0; \quad x + 3y - z - 4 = 0.$$

Решение. Решая систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x + y - 2z + 3 &= 0, \\ 2x - 2y + 3z - 7 &= 0, \\ x + 3y - z - 4 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

найдем координаты точки пересечения плоскостей: $x = 1, y = 2; z = 3$.

§ 2. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Уравнения линии в пространстве

Линию в пространстве мы будем рассматривать как геометрическое место точек, принадлежащих каждой из двух пересекающихся поверхностей. Если эти поверхности определяются уравнениями $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$, то линия их пересечения определяется системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ \Phi(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Например, окружность, получающаяся при пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ плоскостью $z = 3$, определяется системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 25, \\ z &= 3. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Текущие координаты любой точки $M(x; y; z)$ указанной окружности удовлетворяют каждому из уравнений этой системы.

2. Общие уравнения прямой

Рассмотрим систему двух уравнений первой степени

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Каждое из уравнений этой системы изображает плоскость. Если коэффициенты при текущих координатах в этих уравнениях не пропорциональны (т. е. если плоскости не параллельны), то система уравнений (12) определяет прямую L , как линию пересечения двух плоскостей, т. е. как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы (12).

Уравнения (12) называют *общими уравнениями прямой*.

Пример. Построить прямую, заданную общими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z - 3 &= 0, \\ x - 3y - z + 5 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Для того чтобы построить прямую, достаточно знать две ее точки. Проще всего выбрать точки пересечения прямой с координатными плоскостями. Точка пересечения прямой с координатной плоскостью называется *следом* прямой. Координаты следа M_1 заданной прямой на плоскости Oxy получим из уравнений прямой, полагая $z=0$. Это дает: $y=2$, $x=1$. Итак, координаты точки M_1 таковы: $x=1$, $y=2$, $z=0$. Аналогично, полагая в уравнениях прямой $x=0$, получим координаты следа M_2 прямой на плоскости Oyz : $M_2(0; 1; 2)$. Имея точки M_1 и M_2 , строим проходящую через них прямую.

3. Векторное уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой

Положение прямой в пространстве вполне определяется заданием какой-либо ее фиксированной точки M_1 и вектора s , параллельного этой прямой. Вектор s , параллельный прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой,

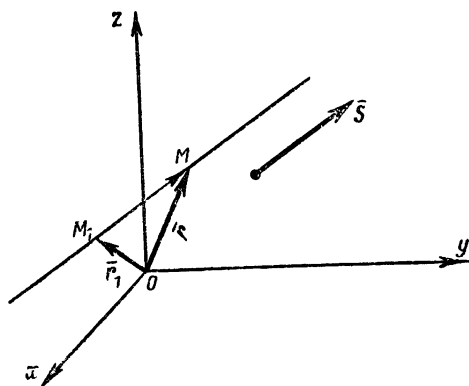


Рис. 86

а его проекции на координатные оси — *направляющими коэффициентами* прямой.

Пусть прямая L задана ее точкой $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и направляющим вектором $s = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$, имеющим направляющие коэффициенты m , n и p .

Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$ на прямой. Из рис. 86 непосредственно получаем

$$\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{M_1M}. \quad (13)$$

Вектор $\overline{M_1M}$, лежащий на прямой L , параллелен направляющему вектору s , поэтому (см. гл. III, § 3, п. 2)

$$\overline{M_1M} = ts, \quad (14)$$

где скалярный множитель t , называемый *параметром*, может принимать любое значение в зависимости от положения точки M на прямой. Обозначая радиус-векторы* точек M_1 и M соответственно через $\mathbf{r}_1 = \overline{OM_1}$, $\mathbf{r} = \overline{OM}$ и принимая во внимание формулу (14), запишем уравнение (13) в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + ts. \quad (15)$$

Уравнение (15) называется *векторным уравнением прямой*. Оно показывает, что каждому значению параметра t соответствует радиус-вектор некоторой точки M , лежащей на прямой.

* Радиусом-вектором точки называется вектор, соединяющий начало координат с этой точкой.

Представим уравнение (15) в координатной форме. Замечая, что

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_1 = \overline{OM}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} \text{ и} \\ ts = tmi + tnj + tpk,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + tm, \\ y &= y_1 + tn, \\ z &= z_1 + tp. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Уравнения (16) называются *параметрическими уравнениями прямой*. При изменении параметра t изменяются координаты x , y и z , и точка $M(x, y, z)$ перемещается по прямой.

4. Канонические уравнения прямой

Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — точка, лежащая на прямой L , и $\mathbf{s} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ — направляющий вектор прямой. Вектор $\overline{M_1M}$, соединяющий точку M_1 с переменной точкой $M(x, y, z)$ прямой L , параллелен вектору $\mathbf{s}$ (см. рис. 86). Поэтому проекции векторов $\overline{M_1M}$ и $\mathbf{s}$ пропорциональны. Так как $\overline{M_1M} = (x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + (z - z_1)\mathbf{k}$, то

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \quad (17)$$

Итак, координаты любой точки прямой должны удовлетворять уравнениям (17), которые называются *уравнениями прямой, проходящей через данную точку, или каноническими уравнениями прямой*.

В частном случае, когда направляющий вектор $\mathbf{s}$ — единичный, $\mathbf{s} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma$ (см. гл. III, формула (62)), уравнения (17) имеют следующий вид:

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}. \quad (18)$$

Направляющими коэффициентами здесь являются направляющие косинусы вектора $\mathbf{s}$.

Уравнения (17) равносильны системе двух уравнений первой степени, например:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}, \quad \frac{x - x_1}{m} = \frac{z - z_1}{p}. \quad (19)$$

Третье уравнение $\frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ является следствием уравнений (19).

В уравнении $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}$ отсутствует координата z . Следовательно, оно определяет плоскость P , параллельную оси Oz (рис. 87).

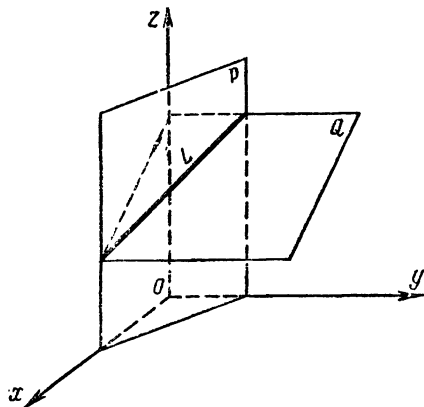


Рис. 87

Эта плоскость, очевидно, проецирует прямую L на плоскость Oxy . Точно так же плоскость Q , уравнение которой $\frac{x-x_1}{m} = \frac{z-z_1}{p}$, проецирует прямую L на координатную плоскость Oxz . Система уравнений (19) определяет прямую L как пересечение плоскостей, проектирующих эту прямую на координатные плоскости Oxy и Oxz . Вместо системы (19) можно рассматривать систему

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n}, \quad \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$$

или систему

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{z-z_1}{p}, \quad \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p},$$

каждая из которых определяет ту же прямую L .

З а м е ч а н и е 1. Уравнения (17) можно было бы получить сразу из параметрических уравнений прямой (16) исключением параметра t . Действительно, из уравнений 16 находим

$$\frac{x-x_1}{m} = t, \quad \frac{y-y_1}{n} = t, \quad \frac{z-z_1}{p} = t,$$

или

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}.$$

З а м е ч а н и е 2. Пусть прямая перпендикулярна одной из координатных осей, например оси Ox . Тогда $m=0$ и параметрические уравнения (17) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 + nt, \\ z &= z_1 + pt. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Исключая из уравнений (20) параметр t , получим уравнения прямой в виде:

$$\left. \begin{aligned} x-x_1 &= 0, \\ \frac{y-y_1}{n} &= \frac{z-z_1}{p}. \end{aligned} \right\}$$

Однако и в этом случае условимся формально записывать уравнения прямой в каноническом виде

$$\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p},$$

помня, что если в равных отношениях один из знаменателей равен нулю, то и числитель соответствующей дроби равен нулю.

Аналогично, каноническим уравнениям прямой

$$\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{0} = \frac{z-z_1}{p}$$

соответствует прямая, заданная уравнениями $x = x_1$, $y = y_1$. Эта прямая параллельна оси Oz . В частности, $\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ суть канонические уравнения оси Oz .

В заключение этого пункта рассмотрим вопрос о том, как перейти от общих уравнений прямой к ее каноническим уравнениям. Для этого нужно найти какую-либо точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ на прямой и направляющий вектор s прямой.

Пусть прямая L задана общими уравнениями (12)

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \right\}.$$

Координаты точки M_1 на прямой L получим из системы уравнений (12), придав одной из координат произвольное значение. Так как прямая перпендикулярна нормальным векторам $N_1 = A_1i + B_1j + C_1k$ и $N_2 = A_2i + B_2j + C_2k$ (рис. 88), то за направляющий вектор s прямой L можно принять векторное произведение $N_1 \times N_2$:

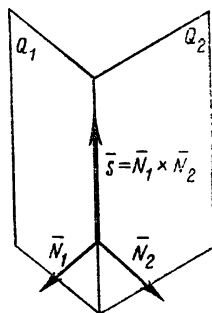


Рис. 88

$$s = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим конкретный пример.

Пример. Привести общие уравнения прямой

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y - z + 8 &= 0, \\ x - 3y + 2z + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

к каноническому виду.

Решение. Уравнения прямой в канонической форме имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Так как $N_1 = 2i + 3j - k$, $N_2 = i - 3j + 2k$, то

$$s = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3i - 5j - 9k,$$

и поэтому $m = 3$, $n = -5$, $p = -9$. Точку M_1 на прямой найдем, положив в общих уравнениях прямой, например, $z = 0$:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y + 8 &= 0, \\ x - 3y + 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Тогда, решая эту систему уравнений, получим $x = -3$, $y = \frac{-2}{3}$.

Итак, $M_1\left(-3; -\frac{2}{3}; 0\right)$. Следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+\frac{2}{3}}{-5} = \frac{z-0}{-9}.$$

5. Уравнения прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Составим канонические уравнения этой прямой. С этой целью найдем направляющий вектор s прямой, за который принимаем вектор, соединяющий точки M_1 и M_2 :

$$s = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

Следовательно, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$, и поэтому из уравнений (17) имеем

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (21)$$

Уравнения (21) называются *уравнениями прямой, проходящей через две точки*.

Пример. Найти уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1; 3; -5)$ и $M_2(1; 4; 2)$.

Решение. Пользуясь уравнениями (21), найдем:

$$\frac{x-1}{1-1} = \frac{y-3}{4-3} = \frac{z+5}{2+5},$$

или

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{7}.$$

Так как $m=0$, то данная прямая перпендикулярна оси Ox и уравнения прямой можно записать в виде $x=1$, $\frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{7}$, или

$$\left. \begin{aligned} x-1 &= 0, \\ 7y-z-26 &= 0^*. \end{aligned} \right\}$$

6. Угол между двумя прямыми.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть в пространстве даны две прямые:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad (\text{прямая } L_1)$$

и

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}. \quad (\text{прямая } L_2).$$

Как известно, за угол между двумя прямыми принимают один из двух смежных углов, которые образуют прямые, проведенные

* См. замечание 2, п. 4.

параллельно данным через какую-нибудь точку пространства. Один из этих смежных углов равен углу φ между направляющими векторами s_1 и s_2 данных прямых. Так как $s_1 = m_1 i + n_1 j + p_1 k$, $s_2 = m_2 i + n_2 j + p_2 k$, то по известной формуле для косинуса угла между векторами получим

$$\cos \varphi = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1| \cdot |s_2|},$$

или

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (22)$$

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых равносильны условиям параллельности и перпендикулярности их направляющих векторов s_1 и s_2 .

Условие параллельности. Две прямые параллельны друг другу тогда и только тогда, когда их соответствующие направляющие коэффициенты пропорциональны, т. е.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (23)$$

Условие перпендикулярности. Две прямые перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда сумма парных произведений одноименных направляющих коэффициентов равна нулю, т. е.

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (24)$$

Пример 1. Найти угол между прямыми

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-2}, \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{5}.$$

Решение. Применяя формулу (22), получим

$$\cos \varphi = \frac{5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 5}{\sqrt{25 + 9 + 4} \cdot \sqrt{9 + 4 + 25}} = \frac{11}{38} \approx 0,2895;$$

из таблицы находим $\varphi \approx 73^\circ 10'$.

Пример 2. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1; 2; 3)$ параллельно прямой

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y + 5z - 7 &= 0, \\ 3x - 4y + z - 8 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Запишем уравнения искомой прямой в каноническом виде

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y-2}{n} = \frac{z-3}{p}. \quad (*)$$

Направляющий вектор искомой прямой s получим как векторное произведение нормальных векторов $N_1 = 2i + 3j + 5k$ и $N_2 = 3i - 4j + k$ (см. п. 4):

$$s = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 23i + 13j - 17k.$$

Следовательно $m = 23$, $n = 13$, $p = -17$. Подставляя эти значения направляющих коэффициентов в уравнения (*), получим

$$\frac{x-1}{23} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{-17}.$$

Пример 3. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(-4; 0; 2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$ и $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{2}$.

Решение. Запишем уравнения прямой, проходящей через данную точку:

$$\frac{x+4}{m} = \frac{y-0}{n} = \frac{z-2}{p}.$$

Пользуясь условием перпендикулярности прямых, получим

$$\left. \begin{aligned} 2m + 3n + 4p &= 0, \\ 3m + 2n + 2p &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, найдем:

$$m = k \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2k, \quad n = -k \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8k, \quad p = k \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5k.$$

Полагая $k = 1$, получим $m = -2$, $n = 8$, $p = -5$.

Подставляя найденные значения m , n и p в канонические уравнения, получим

$$\frac{x+4}{-2} = \frac{y}{8} = \frac{z-2}{-5}$$

Пример 3 можно решить иначе, учитывая, что за направляющий вектор искомой прямой $\mathbf{s} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ можно принять любой вектор, перпендикулярный направляющим векторам $\mathbf{s}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{s}_2 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ данных прямых. В частности, вектор $\mathbf{s}$ можно положить равным векторному произведению векторов $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

Отсюда $m = -2$, $n = 8$, $p = -5$.

§ 3. Прямая и плоскость в пространстве

1. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть даны прямая и плоскость:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}, \quad (\text{прямая } L),$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (\text{плоскость } Q).$$

Условие перпендикулярности. Прямая и плоскость перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой s и нормальный вектор N плоскости параллельны, т. е. когда

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (25)$$

Условие параллельности. Прямая и плоскость параллельны друг другу тогда и только тогда, когда векторы s и N взаимно перпендикулярны, т. е. когда

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (26)$$

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2; -3; 4)$ параллельно прямой

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{8} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+5}{2}.$$

Решение. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 :

$$A(x-2) + B(y+3) + C(z-4) = 0.$$

Направляющие коэффициенты A , B и C находим из условия (26) параллельности плоскости и прямой:

$$\left. \begin{aligned} 1A + 2B + 8C &= 0, \\ 4A + 2C &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему уравнений, находим $A=2$, $B=15$, $C=-4$, и, следовательно,

$$2(x-2) + 15(y+3) - 4(z-4) = 0, \quad \text{или} \quad 2x + 15y - 4z + 57 = 0.$$

2. Точка пересечения прямой с плоскостью

Пусть требуется найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p} \quad (27)$$

с плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (28)$$

Для этого нужно совместно решить систему уравнений (27) и (28). Проще всего это сделать с помощью параметрических уравнений прямой:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + mt, \\ y &= y_1 + nt, \\ z &= z_1 + pt. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Каждому значению параметра t соответствует точка прямой. Нужно выбрать такое значение t , при котором точка прямой будет лежать на плоскости (28). Подставляя x , y и z из уравнений (29) в уравнение плоскости (28), получим уравнение, из которого найдем

значение параметра t :

$$A(x_1 + mt) + B(y_1 + nt) + C(z_1 + pt) + D = 0,$$

или

$$t(Am + Bn + Cp) = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D). \quad (30)$$

Если прямая и плоскость не параллельны друг другу, т. е. если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то из равенства (30) найдем значение t :

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Am + Bn + Cp}. \quad (31)$$

Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

Рассмотрим теперь случай, когда $Am + Bn + Cp = 0$. Как мы знаем, это условие означает, что нормальный вектор $N = Ai + Bj + Ck$ плоскости и направляющий вектор $s = mi + nj + pk$ прямой перпендикулярны друг другу. Здесь возможны два случая:

а) $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0$. Это значит, что точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ прямой не лежит в плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Так как, кроме того, $Am + Bn + Cp = 0$, то прямая и плоскость параллельны друг другу и, следовательно, не имеют ни одной общей точки. Этот же результат непосредственно следует из соотношения (30), которое, очевидно, не выполняется ни при каком значении параметра t .

б) $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Это значит, что точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ прямой лежит в плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Так как, кроме того, векторы N и s перпендикулярны ($Am + Bn + Cp = 0$), то отсюда заключаем, что прямая лежит в данной плоскости. Этот же результат можно получить и из соотношения (30), которое при условиях $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ примет вид $0 \cdot t = 0$ и удовлетворяется при любом значении t .

Таким образом, одновременное выполнение равенств

$$\left. \begin{aligned} Am + Bn + Cp &= 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

даст условие того, что прямая $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ лежит в плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Пример. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{2}$ с плоскостью $2x + 3y - 2z + 2 = 0$.

Решение. Запишем уравнения данной прямой в параметрическом виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2t + 1, \\ y &= 3t - 1, \\ z &= 2t + 5. \end{aligned} \right\}$$

Подставим эти выражения для x , y и z в уравнение плоскости:

$$2(2t + 1) + 3(3t - 1) - 2(2t + 5) + 2 = 0.$$

Отсюда $t = 1$. Подставляя в параметрические уравнения прямой $t = 1$, получаем: $x = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$, $z = 2 \cdot 1 + 5 = 7$. Итак, точкой пересечения прямой с плоскостью будет точка $M(3; 2; 7)$.

3. Расстояние от точки до плоскости

Пусть даны точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и плоскость Q , имеющая уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (33)$$

Расстояние d между ними, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на плоскость Q , определяется по следующей формуле:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (34)$$

вывод которой аналогичен выводу формулы расстояния от точки до прямой на плоскости.

Пример. Найти расстояние от точки $M_1(1; 0; -2)$ до плоскости

$$2x - y + 2z - 4 = 0.$$

Решение. По формуле (34) получим

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

4. Пучок плоскостей

Совокупность всех плоскостей, проходящих через заданную прямую L , называется пучком плоскостей, а прямая L — осью пучка.

Пусть ось пучка задана уравнениями

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Почленно умножим второе уравнение системы (35) на постоянную λ и сложим с первым уравнением:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (36)$$

Уравнение (36) — первой степени относительно x , y и z и, следовательно, при любом численном значении λ определяет некоторую плоскость. Так как уравнение (36) есть следствие уравнений (35), то координаты точки, удовлетворяющие уравнениям (35), будут удовлетворять и уравнению (36). Следовательно, при любом численном значении λ уравнение (36) есть уравнение плоскости, проходящей через прямую (35).

Покажем, что всякая плоскость пучка плоскостей с осью, заданной уравнениями (35), кроме плоскости $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, может быть представлена в виде (36). Действительно, любая плоскость пучка определяется ее точкой $M_1(x_1; y_1; z_1)$, не лежащей на

оси пучка. Чтобы найти уравнение этой плоскости, подставим в уравнение (36) координаты точки M_1 :

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 + \lambda(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) = 0. \quad (37)$$

Из уравнения (37) найдем значение λ , если $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2 \neq 0$, т. е. если точка M_1 не лежит во второй из данных плоскостей (35). Подставляя найденное значение λ в уравнение (36), получим уравнение плоскости пучка, проходящей через точку M_1 .

Итак, уравнение (36) при различных значениях λ дает уравнение любой плоскости пучка, ось которого задана уравнениями (35), кроме плоскости $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Поэтому уравнение (36) называется *уравнением пучка плоскостей*.

Уравнение пучка плоскостей используют при решении задач, в которых требуется найти плоскость, проходящую через заданную прямую, причем значение множителя λ обычно находят из какого-либо дополнительного условия, которое определяет положение искомой плоскости.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z + 1 = 0, \\ 3x - y + z + 28 = 0 \end{cases}$$

и точку $M_1(1; -2; 3)$.

Решение. Запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую:

$$2x + 3y - 5z + 1 + \lambda(3x - y + z + 28) = 0.$$

Подставим в уравнение пучка координаты точки M_1 :

$$2 \cdot 1 + 3(-2) - 5 \cdot 3 + 1 + \lambda[3 \cdot 1 - 1(-2) + 3 + 28] = 0.$$

Следовательно, $\lambda = \frac{1}{2}$. Подставляя найденное значение λ в уравнение пучка, найдем уравнение искомой плоскости:

$$2x + 3y - 5z + 1 + \frac{1}{2}(3x - y + z + 28) = 0, \text{ или } 7x + 5y - 9z + 30 = 0.$$

Пример 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ перпендикулярно плоскости $3x + 3y - z + 1 = 0$.

Решение. Представим данную прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ как пересечение ее проектирующих плоскостей:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3}, \quad \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \text{ или } 3x - 2y - 5 = 0, \quad y - 3z + 1 = 0.$$

Составляем уравнение пучка плоскостей:

$$3x - 2y - 5 + \lambda(y - 3z + 1) = 0, \quad (*)$$

или

$$3x + (\lambda - 2)y - 3\lambda z - 5 + \lambda = 0. \quad (**)$$

Записываем условие перпендикулярности плоскости (***) и данной плоскости $3x + 3y - z + 1 = 0$:

$$3 \cdot 3 + 3(\lambda - 2) + (-1) \cdot (-3\lambda) = 0.$$

Решая это уравнение, находим $\lambda = -\frac{1}{2}$. Подставляя найденное значение λ в уравнение пучка (*), получим

$$3x - 2y - 5 + \left(-\frac{1}{2}\right)(y - 3z + 1) = 0,$$

или

$$6x - 5y + 3z - 11 = 0.$$

§ 4. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Сфера

В § 1 п. 1 было выведено уравнение сферы (2)

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$$

с центром в точке $O_1(x_1; y_1; z_1)$ и радиусом R .

Раскрыв скобки и перенеся все члены в левую часть уравнения получим

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_1x - 2y_1y - 2z_1z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0.$$

Это уравнение второй степени относительно текущих координат x , y и z . В нем отсутствуют члены с произведениями координат, а коэффициенты при x^2 , y^2 и z^2 равны между собой. Любое уравнение второй степени относительно x , y и z , в котором коэффициенты при x^2 , y^2 и z^2 равны между собой, а член с произведением координат отсутствует, есть, вообще говоря, уравнение сферы. Точнее, такое уравнение с помощью выделения полных квадратов всегда может быть приведено к виду

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = k. \quad (38)$$

Если при этом $k > 0$, то уравнение (38) является уравнением сферы с центром в точке $O_1(x_1; y_1; z_1)$ и радиусом $R = \sqrt{k}$. При $k = 0$ уравнению удовлетворяют координаты лишь одной точки $O_1(x_1; y_1; z_1)$. Если же $k < 0$, то уравнение не определяет никакой поверхности.

Пример. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 2 = 0$ является уравнением сферы и найти центр и радиус этой сферы.

Решение. Преобразуя левую часть данного уравнения, получим

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 + 6z + 9) - 14 - 2 = 0,$$

или

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 16.$$

Мы получили уравнение сферы с центром в точке $O_1(1; -2; -3)$ и радиусом $R = 4$.

2. Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию L и параллельных данной прямой l . При этом линия L называется направляющей цилиндрической поверхности, а каждая из прямых, составляющих эту поверхность и параллельных прямой l — образующей (рис. 89). В дальнейшем мы будем рассматривать только такие цилиндрические поверхности, направляющие которых лежат в одной из координатных плоскостей, а образующие параллельны координатной оси, перпендикулярной этой плоскости.

Рассмотрим в плоскости Oxy некоторую линию L , имеющую в системе координат Oxy уравнение

$$F(x, y) = 0. \quad (39)$$

Построим цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz и направляющей L (рис. 90). Покажем, что уравнением этой поверхности будет уравнение (39), если его отнести к системе координат в пространстве $Oxyz$. Пусть $M(x; y; z)$ — любая фиксированная точка построенной цилиндрической поверхности. Обозначим

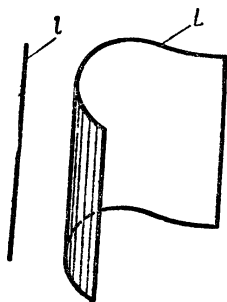


Рис. 89

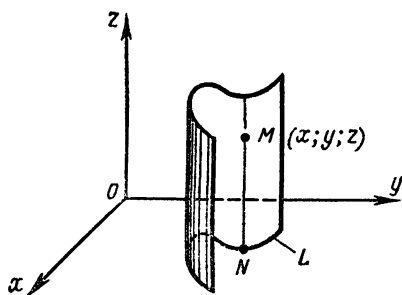


Рис. 90

через N точку пересечения направляющей L и образующей, проходящей через точку M . Точка N , очевидно, будет проекцией точки M на плоскость Oxy . Поэтому точки M и N имеют одну и ту же абсциссу x и одну и ту же ординату y . Но точка N лежит на кривой L , и ее координаты x и y удовлетворяют уравнению (39) этой кривой. Следовательно, этому уравнению удовлетворяют и координаты точки $M(x; y; z)$, так как оно не содержит z . Таким образом, координаты любой точки $M(x; y; z)$ данной цилиндрической поверхности удовлетворяют уравнению (39). Координаты же точек, не лежащих на этой поверхности, уравнению (39) не удовлетворяют, так как эти точки проектируются на плоскость Oxy вне кривой L .

Таким образом, не содержащее z уравнение $F(x, y) = 0$, если его отнести к системе координат в пространстве $Oxyz$, является уравнением цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz , и направляющей L , которая в плоскости Oxy задается тем же уравнением $F(x, y) = 0$.

В пространстве $Oxyz$ направляющая L определяется системой двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= 0; \\ z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Аналогично можно показать, что уравнение $F(x, z) = 0$, не содержащее y , и уравнение $F(y, z) = 0$, не содержащее x , определяют в пространстве $Oxyz$ цилиндрические поверхности с образующими, параллельными соответственно осям Oy и Ox .

Рассмотрим примеры цилиндрических поверхностей.

1. Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (41)$$

является цилиндрической и называется *эллиптическим цилиндром* (рис. 91). Ее образующие параллельны оси Oz , а направляющей является эллипс с полуосями a и b , лежащий в плоскости Oxy . В частности, если $a = b$, то направляющей является окружность, а поверхность является *прямым круговым цилиндром*. Его уравнение

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (41')$$

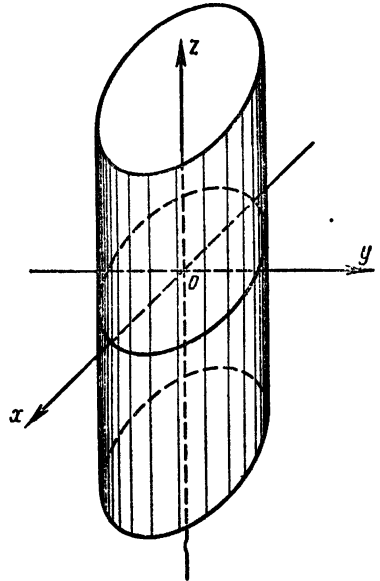


Рис. 91

2. Цилиндрическая поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (42)$$

называется *гиперболическим цилиндром* (рис. 92). Образующие этой поверхности параллельны оси Oy , а направляющей служит расположенная в плоскости Oxz гипербола с действительной полуосью a и мнимой полуосью b .

3. Цилиндрическая поверхность, определяемая уравнением

$$y^2 = 2pz, \quad (43)$$

называется *параболическим цилиндром* (рис. 93). Ее направляющей является парабола, лежащая в плоскости Oyz , а образующие параллельны оси Ox .

Замечание. Как известно, прямая в пространстве может быть задана уравнениями различных пар плоскостей, пересекающихся по этой прямой. Подобно этому кривая в пространстве может быть задана с помощью уравнений различных поверхностей, пересекающихся по этой кривой. Например, окружность C , получающаяся в сечении плоскостью $z = 3$ сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ (см. § 2, п. 1),

может быть задана системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} z &= 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 25. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

С другой стороны, эта окружность может быть получена как пересечение плоскости $z = 3$ и прямого кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 16$, т. е. задана системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} z &= 3, \\ x^2 + y^2 &= 16. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

равносильной системе уравнений (44).

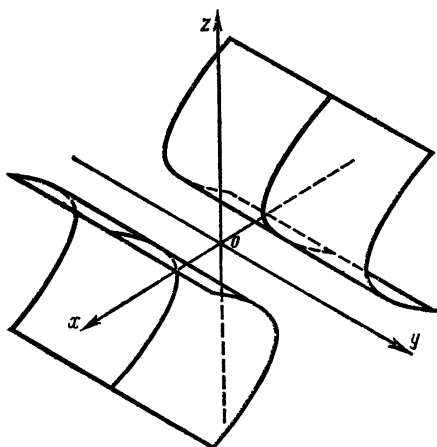


Рис. 92

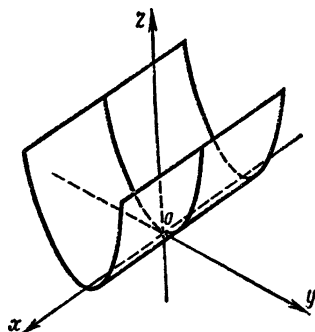


Рис. 93

В дальнейшем, исследуя форму той или иной поверхности с помощью сечений, параллельных координатным плоскостям, мы не раз будем пользоваться цилиндрическими поверхностями, проектирующими эти сечения на координатные плоскости. Это позволит так же, как в рассмотренном примере, судить о размерах и форме указанных сечений, а тем самым и о форме исследуемых поверхностей.

3. Конические поверхности

Конической поверхностью называется поверхность, составленная всеми прямыми, пересекающими данную линию L и проходящими через данную точку P . При этом линия L называется направляющей конической поверхности, точка P —ее вершиной, а каждая из прямых, составляющих коническую поверхность,—образующей.

В качестве примера рассмотрим коническую поверхность с вершиной в начале координат, для которой направляющей является эллипс

$$\left. \begin{aligned} Z &= c, \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

с полуосями a и b , лежащий в плоскости $Z=c^*$. Эта поверхность называется *конусом второго порядка*. Выведем ее уравнение.

Рассмотрим произвольно выбранную точку $M(x, y, z)$ конической поверхности и проведем через нее образующую OM , пересекающуюся с направляющей в точке $N(X; Y; c)$ (рис. 94). Составим уравнение прямой OM , проходящей через точки $O(0; 0; 0)$ и $N(X; Y; c)$ (см. § 2, п. 5):

$$\frac{x-0}{X-0} = \frac{y-0}{Y-0} = \frac{z-0}{c-0},$$

или

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{c}. \quad (47)$$

Отсюда $X = \frac{cx}{z}$; $Y = \frac{cy}{z}$. Подставив эти выражения во второе из уравнений эллипса (46), получим $\frac{c^2 x^2}{a^2 z^2} + \frac{c^2 y^2}{b^2 z^2} = 1$, или, после преобразований

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (48)$$

Мы получили уравнение *конуса второго порядка*. В частности, если $a=b$, то направляющей является окружность

$$\left. \begin{aligned} z &= c, \\ x^2 + y^2 &= a^2, \end{aligned} \right\}$$

а поверхность является прямым круговым конусом. Его уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (48')$$

4. Поверхность вращения

Пусть линия L , лежащая в плоскости Oyz , задана уравнениями

$$\left. \begin{aligned} X &= 0, \\ F(Y, Z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Рассмотрим поверхность, образованную вращением этой линии относительно оси Oz (рис. 95)**.

* Текущие координаты эллипса мы обозначаем большими буквами X, Y и Z , чтобы отличить их от текущих координат x, y и z конической поверхности.

** Текущие координаты линии L мы обозначаем большими буквами X, Y, Z , чтобы отличить их от текущих координат x, y, z поверхности вращения.

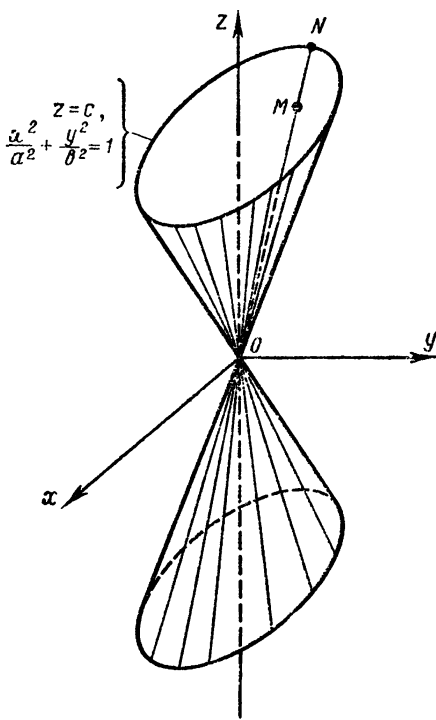


Рис. 94

Эта поверхность называется *поверхностью вращения*. Найдем ее уравнение. Пусть $M(x; y; z)$ — произвольно выбранная точка поверхности вращения. Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную оси Oz , и обозначим точки пересечения этой плоскости с осью Oz и кривой L соответственно через K и N . Отрезки KM и KN являются радиусами одной и той же окружности. Поэтому $KM = KN$. Но длина отрезка KN равна абсолютной величине ординаты Y точки N , т. е. $KN = |Y|$, а $KM = OP = \sqrt{x^2 + y^2}$. Следовательно, $|Y| = \sqrt{x^2 + y^2}$, или $Y = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$. Кроме того, аппликата Z точки N , очевидно, равна аппликате z точки M : $Z = z$.

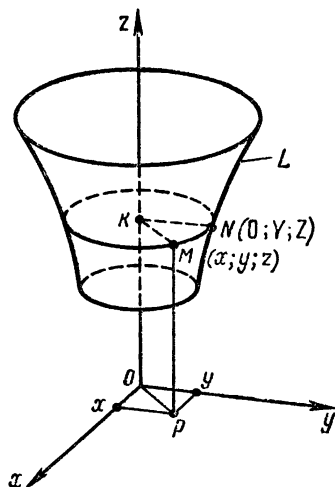


Рис. 95

Так как точка N лежит на линии L , заданной уравнениями (49), то координаты Y и Z точки N удовлетворяют второму из этих уравнений. Подставляя в него вместо Y и Z соответственно равные им величины $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ и z , получим уравнение

$$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \quad (50)$$

которому удовлетворяют координаты любой точки $M(x; y; z)$ поверхности вращения. Можно показать, что координаты точек, не лежащих на этой поверхности, уравнению (50) не удовлетворяют. Таким образом, уравнение (50) является уравнением поверхности вращения относительно

оси Oz линии L , определяемой уравнениями (49). Уравнение (50) получается из второго уравнения системы (49) заменой в нем координат Y и Z координатами x , y и z по формулам

$$\left. \begin{aligned} Y &= \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \\ Z &= z. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Замечание. Мы считали, что кривая L задана в плоскости Oyz и вращается относительно оси Oz . Однако кривая L может быть задана и в другой координатной плоскости и может вращаться относительно другой координатной оси. Формулы, подобные формулам (49), (50) и (51), читатель легко составит сам.

Пример 1. Найти уравнение поверхности вращения эллипса

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

относительно оси Oz .

Решение. Записав уравнение эллипса в виде $\frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ и заменяя в нем по формулам (51) Y и Z текущими координатами x ,

y и z поверхности вращения, получим искомое уравнение

$$\frac{(\pm \sqrt{x^2 + y^2})^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (52)$$

Полученная поверхность называется *эллипсоидом вращения*.

5. Эллипсоид

Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (53)$$

называется *эллипсоидом*. Числа a , b и c называются *полуосями эллипсоида*. Так как в уравнение (53) текущие координаты входят в четных степенях, то эллипсоид симметричен относительно координатных плоскостей. Чтобы установить форму эллипсоида, будем пересекать его плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Покажем, что если пересечь эллипсоид плоскостью $z = h$ ($|h| < c$), то в сечении получится эллипс L . В самом деле, исключая из уравнений

$$\left. \begin{aligned} z &= h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

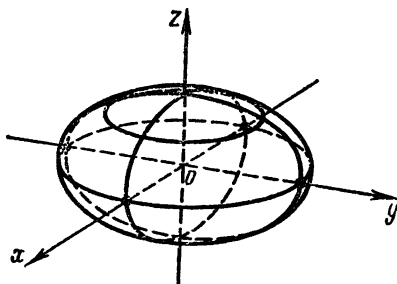


Рис. 96

аппликату z , получим уравнение цилиндрической поверхности, проектирующей сечение L на плоскость Oxy :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{\left(a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Из этого уравнения видно, что кривая L есть эллипс с полуосями

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \\ \bar{b} &= b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Из формул (54) видно, что с возрастанием $|h|$ полуоси эллипса $\bar{a}$ и $\bar{b}$ уменьшаются. При $|h| = c$ $\bar{a} = \bar{b} = 0$, и сечение вырождается в точку. При $|h| > c$ эллипсоид с плоскостью $z = h$, очевидно, не пересекается. Аналогично можно показать, что при пересечении эллипсоида плоскостями $x = h$ ($|h| < a$) и $y = h$ ($|h| < b$) также получатся эллипсы. Эллипсоид имеет вид, изображенный на рис. 96.

В частном случае при $a=b$ получаем эллипсоид вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(см. формулу (52)). Если все три полуоси равны между собой, $c=b=a$, то получится сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

6. Гиперboloиды

Однополостный гиперboloид. Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (55)$$

называется *однополостным гиперboloидом*. Эта поверхность имеет три плоскости симметрии — координатные плоскости, так как текущие координаты x , y и z входят в уравнение (55) в четных степенях. Пересекая однополостный гиперboloид плоскостью $y=0$, получим лежащую в плоскости Oxz гиперболу $ABCD$ (рис. 97)

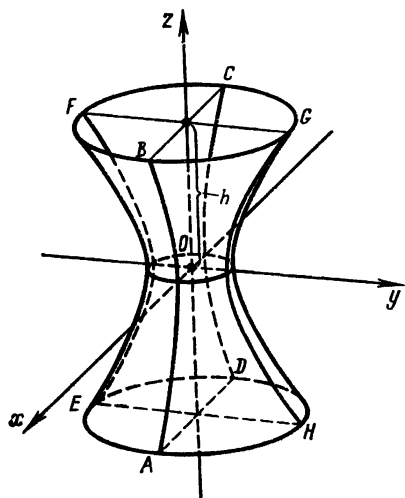


Рис. 97

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Аналогично, в сечении однополостного гиперboloида плоскостью $x=0$ получится гипербола $EFGH$

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ x &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

лежащая в плоскости Oyz .

При пересечении однополостного гиперboloида плоскостью $z=h$ получится эллипс $BFCG$, уравнения которого имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z &= h, \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{\left(a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} &= 1, \\ z &= h. \end{aligned} \right\}$$

Полуоси этого эллипса $\bar{a} = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ и $\bar{b} = b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$ возрастают с возрастанием абсолютной величины h . При $h=0$ получится

эллипс, лежащий в плоскости Oxy и имеющий наименьшие полуоси a и b . При $a = b$ получим однополостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (58)$$

При пересечении его плоскостями $z = h$ будут получаться окружности

$$\left. \begin{aligned} z^2 + y^2 &= a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2} \right), \\ z &= h. \end{aligned} \right\}$$

В пп. 2 и 3 рассматривались цилиндрические и конические поверхности, каждая из которых составлена из прямых. Оказывается, однополостный гиперболоид можно также рассматривать как поверхность, составленную из прямых линий. Рассмотрим прямую, определяемую уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= k \left(1 + \frac{y}{b} \right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{k} \left(1 - \frac{y}{b} \right), \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

в которых a , b и c — полуоси однополостного гиперболоида, а k — произвольно выбранное число ($k \neq 0$).

Перемножая почленно эти уравнения, получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}, \text{ или } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

т. е. уравнение однополостного гиперболоида.

Таким образом, уравнение однополостного гиперболоида является следствием системы уравнений (59). Поэтому координаты любой точки $M(x; y; z)$, удовлетворяющие системе уравнений (59), удовлетворяют также и уравнению (55) однополостного гиперболоида. Иными словами, все точки прямой (59) принадлежат гиперболоиду (55). Меняя значения k , мы получим целое семейство прямых, лежащих на поверхности (55). Аналогично можно показать, что однополостному гиперболоиду принадлежат все прямые семейства

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= l \left(1 - \frac{y}{b} \right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{l} \left(1 + \frac{y}{b} \right), \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

где l — произвольный параметр.

Можно также показать, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходит по одной прямой из каждого из указанных семейств. Таким образом, однополостный гиперболоид можно рассматривать как поверхность, составленную из прямых линий (рис. 98). Эти прямые называются прямолинейными образующими однополостного гиперболоида.

Возможность составления поверхности однополостного гиперболоида из прямых линий используется в строительной технике. Так,

например, по конструкции, предложенной инженером Шуховым В. Г.* в Москве была сооружена радиомачта с помощью балок, расположенных по прямолинейным образующим однополостного гиперболоида.

Двуполостный гиперболоид. Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad (61)$$

называется *двуполостным гиперболоидом*.

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии для двуполостного гиперболоида.

Пересекая эту поверхность

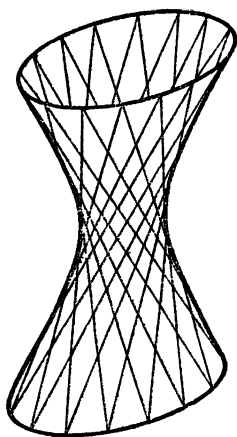


Рис. 98

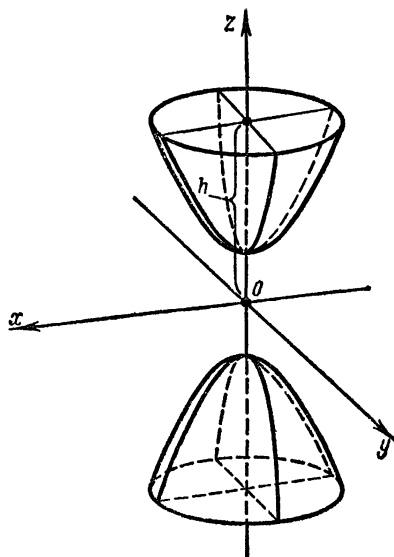


Рис. 99

координатными плоскостями Oxz и Oyz , получим соответственно гиперболы

$$\left. \begin{aligned} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} &= 1, \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ и } \left. \begin{aligned} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(рис. 99).

Если двуполостный гиперболоид (61) пересечь плоскостью $z = h$ (при $|h| > c$), то в сечении получится эллипс

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z &= h \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

с полуосями $\bar{a} = a \sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}$ и $\bar{b} = b \sqrt{\frac{h^2}{b^2} - 1}$, возрастающими с возрастанием $|h|$. При $|h| < c$ двуполостный гиперболоид (61)

* В. Г. Шухов (1853—1939) — почетный член АН СССР.

с плоскостью $z=h$, очевидно, не пересекается. Двуполостный гиперболоид состоит из двух отдельных частей (полостей), чем и объясняется его название. При $a=b$ уравнение (61) имеет вид

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{или} \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1$$

и является уравнением *двуполостного гиперболоида вращения*. В сечении последнего с плоскостью $z=h$ ($|h| > c$) получится окружность

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= b^2 \left(\frac{h^2}{c^2} - 1 \right), \\ z &= h \end{aligned} \right\}$$

радиуса

$$R = b \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

7. Параболоиды

Эллиптический параболоид. *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность, определяемая уравнением

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \quad (63)$$

при условии, что p и q имеют одинаковые знаки. В дальнейшем для определенности будем считать, что $p > 0$, $q > 0$.

При пересечении эллиптического параболоида координатными плоскостями Oxz и Oyz получатся соответственно параболы

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{x^2}{2p}, \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} z &= \frac{y^2}{2q}, \\ x &= 0, \end{aligned} \right\}$$

а при пересечении плоскостью $z=h$ ($h > 0$) — эллипс

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} &= 1, \\ z &= h \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

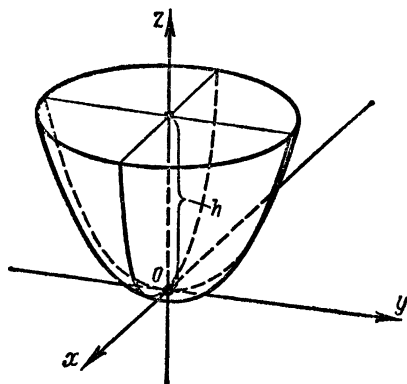


Рис. 100

с полуосями $a = \sqrt{2ph}$ и $b = \sqrt{2qh}$ (рис. 100). В случае $p = q$ получим *параболоид вращения*

$$2pz = x^2 + y^2. \quad (65)$$

Поскольку x и y входят в уравнение (63) в четных степенях, эллиптический параболоид имеет две плоскости симметрии: Oxz и Oyz .

Гиперболический параболоид. *Гиперболическим параболоидом* называется поверхность, определяемая уравнением

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \quad (66)$$

при условии, что p и q имеют одинаковые знаки. (В дальнейшем для определенности будем считать, что $p > 0$, $q > 0$.)

Пересекая эту поверхность плоскостью Oxz , получим параболу

$$\left. \begin{aligned} 2pz &= x^2, \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

(рис. 101).

При пересечении гиперболического параболоида плоскостью $x = h$ получится парабола

$$\left. \begin{aligned} 2z &= \frac{h^2}{p} - \frac{y^2}{q}, \\ x &= h \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} 2q \left(z - \frac{h^2}{2p} \right) &= -y^2, \\ x &= h. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

При различных значениях h получится целое семейство парабол, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости Oyz и имеющих одинаковый параметр q .

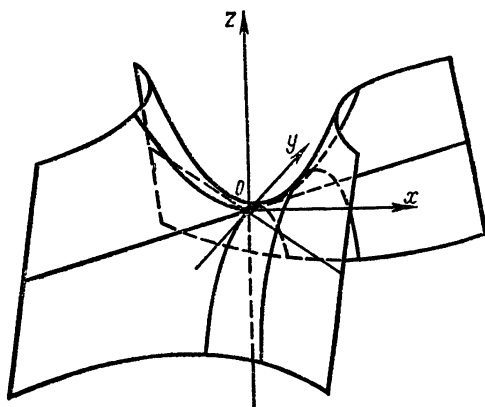


Рис. 101

Гиперболический параболоид можно рассматривать как поверхность, описываемую движением любой из этих парабол при условии, что плоскость движущейся параболы остается параллельной плоскости Oyz , ось симметрии параболы остается в плоскости Oxz , а вершина движется по параболе (67). Пересекая гиперболический параболоид плоскостью $z = h$, получим (при $h \neq 0$) гиперболу

$$\left. \begin{aligned} 2h &= \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}, \\ z &= h, \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} &= 1, \\ z &= h. \end{aligned} \right\}$$

На рис. 101 показано расположение этой гиперболы для двух случаев: $h > 0$ и $h < 0$. При $h = 0$, т. е. при пересечении гиперболического параболоида координатной плоскостью Oxy , получится

линия, уравнение которой в плоскости Oxy имеет вид $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$.
Последнее уравнение равносильно системе двух уравнений

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= 0, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= 0.\end{aligned}$$

Это означает, что гиперболический параболоид пересекается с плоскостью Oxy по двум прямым

$$\left. \begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= 0, \\ z &= 0\end{aligned} \right\}$$

и

$$\left. \begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= 0, \\ z &= 0,\end{aligned} \right\}$$

лежащим в плоскости Oxy и проходящим через начало координат.

Кроме этих двух прямых, существуют и другие прямые, полностью лежащие на гиперболическом параболоиде. Более того, как и в случае однополостного гиперboloида, можно показать, что через каждую точку гиперболического параболоида проходит по одной прямой каждого из двух семейств прямых

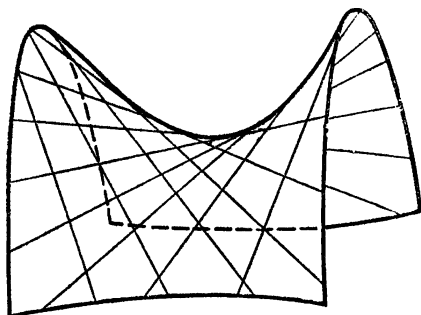


Рис. 102

$$\left. \begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= 2kz, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{1}{k}\end{aligned} \right\} \text{ и } \left. \begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{1}{l}, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= 2lz,\end{aligned} \right\}$$

где k и l — произвольные параметры.

Таким образом, гиперболический параболоид можно рассматривать как поверхность, составленную из прямых линий (рис. 102).

Замечание. Поверхности, составленные из прямых линий, называются *линейчатыми*. Таким образом, цилиндрические и конические поверхности, а также однополостный гиперboloид и гиперболический параболоид являются линейчатыми поверхностями.

ГЛАВА V

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1. Предел функции при $x \rightarrow +\infty$

Возьмем функцию $y = f(x) = 2 - \frac{1}{x}$. Составим таблицу значений этой функции и построим ее график (рис. 103):

x	1	2	10	100	1000
y	1	1,5	1,9	1,99	1,999

Рассматривая таблицу и график, можно предположить, что с возрастанием аргумента x наша функция неограниченно приближается к числу 2, или, как говорят, имеет при x , стремящемся к плюс бесконечности ($x \rightarrow +\infty$), пределом число 2.

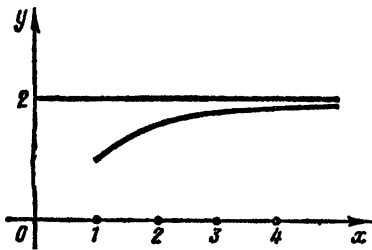


Рис. 103

Пусть $M(x; y)$ точка графика функции $y = 2 - \frac{1}{x}$. Найдем расстояние d от точки M до прямой $y = 2$:

$$\begin{aligned} d = |y - 2| &= |f(x) - 2| = \\ &= \left| \left(2 - \frac{1}{x} \right) - 2 \right| = \left| -\frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|}. \end{aligned}$$

Тот факт, что при $x \rightarrow +\infty$ функция $y = 2 - \frac{1}{x}$ имеет пределом число 2, означает, что расстояние d от точки $M(x; y)$ графика функции до прямой $y = 2$, т. е. $|f(x) - 2|$, может быть сделано меньше любого наперед заданного положительного числа для достаточно больших значений x .

Так, например,

$$|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{10}, \text{ если } x > 10;$$

$$|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{100}, \text{ если } x > 100;$$

и вообще, если $\varepsilon > 0$, то

$$|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon, \text{ если } x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Дадим теперь точное определение предела функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, предполагая при этом, что функция $y = f(x)$ определена

или на всей числовой оси, или для всех x , больших некоторого числа.

Определение. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если, каково бы ни было положительное число ε , можно найти такое число N , что для всех x , больших N , выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \quad (1)$$

Иными словами, если функция имеет число b своим пределом (при $x \rightarrow +\infty$), то при неограниченном возрастании аргумента x значения этой функции сколь угодно мало отличаются от числа b , т. е. разность между значением функции и числом b становится сколь угодно близкой к нулю.

То, что функция имеет число b своим пределом при $x \rightarrow +\infty$, записывается следующим образом*: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. Это читается так:

«предел эф от x при x , стремящемся к плюс бесконечности, равен b ». Таким образом, возвращаясь к нашему примеру, имеем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2.$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+3}{x} = 5$.

Решение. Зададим произвольное положительное число ε и рассмотрим абсолютную величину разности $f(x) - b$, где $b = 5$:

$$|f(x) - b| = \left| \frac{5x+3}{x} - 5 \right| = \left| \frac{3}{x} \right| = \frac{3}{|x|}.$$

Для того чтобы эта разность была меньше ε , т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \frac{5x+3}{x} - 5 \right| = \frac{3}{|x|} < \varepsilon, \quad (2)$$

достаточно, чтобы $|x| > \frac{3}{\varepsilon}$. Так как мы рассматриваем предел функции при $x \rightarrow +\infty$, то x можно считать положительным. Поэтому неравенство (2) выполняется для всех $x > \frac{3}{\varepsilon}$. В данном случае указанное в определении предела число N равно $\frac{3}{\varepsilon}$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдено такое число $N = \frac{3}{\varepsilon}$, что для всех $x > N = \frac{3}{\varepsilon}$ выполняется неравенство $\left| \frac{5x+3}{x} - 5 \right| < \varepsilon$. А это значит, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+3}{x} = 5$. График функции $y = \frac{5x+3}{x}$ для положительных значений аргумента x изображен на рис. 104.

* $\lim$ — первые три буквы французского слова *limes*, которое в переводе на русский язык означает предел.

Пример 2. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$.

Решение. Задаем $\varepsilon > 0$. Имеем

$$|f(x) - 1| = \left| \frac{x + \sin x}{x} - 1 \right| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|},$$

так как $|\sin x| \leq 1$. Для того чтобы выполнялось неравенство $\left| \frac{x + \sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$, достаточно, чтобы $\frac{1}{|x|} < \varepsilon$. Так как $x \rightarrow +\infty$, то можно считать x положительным и, следовательно, $\frac{1}{x} < \varepsilon$. Последнее неравенство выполняется для всех $x > \frac{1}{\varepsilon} = N$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдено такое число $N = \frac{1}{\varepsilon}$, что для всех $x > \frac{1}{\varepsilon}$ выпол-

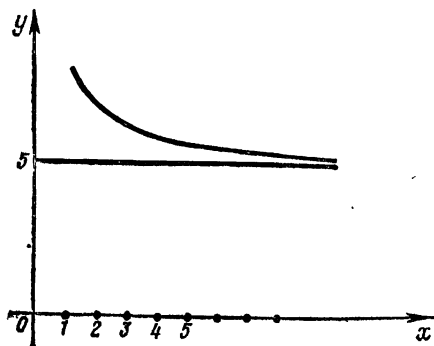


Рис. 104

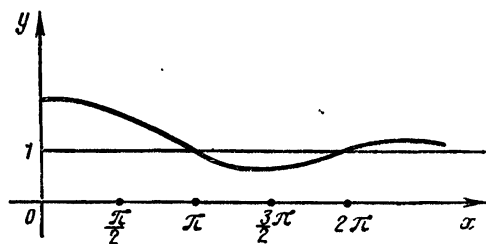


Рис. 105

няется неравенство $\left| \frac{x + \sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$. Тем самым мы показали, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$. График рассмотренной функции приведен на рис. 105.

Пример 3. Функция $y = \cos x$ не имеет предела при $x \rightarrow +\infty$. Значения этой функции при $x \rightarrow +\infty$ все время колеблются между -1 и $+1$.

Из определения предела вытекает, что постоянная функция $f(x) \equiv A$ имеет при $x \rightarrow +\infty$ предел, равный A , так как неравенство $|f(x) - A| = |A - A| < \varepsilon$ при произвольном $\varepsilon > 0$ выполняется для всех x (здесь N может быть любым числом).

Рассмотренные выше примеры показывают, что функция может стремиться к пределу (если он существует), оставаясь все время меньше его, как, например, функция $y = 2 - \frac{1}{x}$ (см. рис. 103), или больше его, как функция $y = \frac{5x+3}{x}$ (см. рис. 104), и, наконец, может колебаться около него, как, например, функция $y = \frac{x + \sin x}{x}$ (см. рис. 105).

Установим геометрический смысл предела функции при $x \rightarrow +\infty$. Как мы знаем, если функция $y=f(x)$ имеет пределом число b , то это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что для всех $x > N$ выполняется неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$. На основании свойств абсолютных величин (см. гл. I, § 1, п. 3) это неравенство равносильно следующим неравенствам:

$$- \varepsilon < f(x) - b < \varepsilon, \quad (3')$$

или

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon. \quad (3)$$

Неравенства (3) показывают, что ординаты всех точек графика функции $y=f(x)$, абсциссы которых превосходят число N , заключены между числами $b-\varepsilon$ и $b+\varepsilon$. А это значит, что график функции

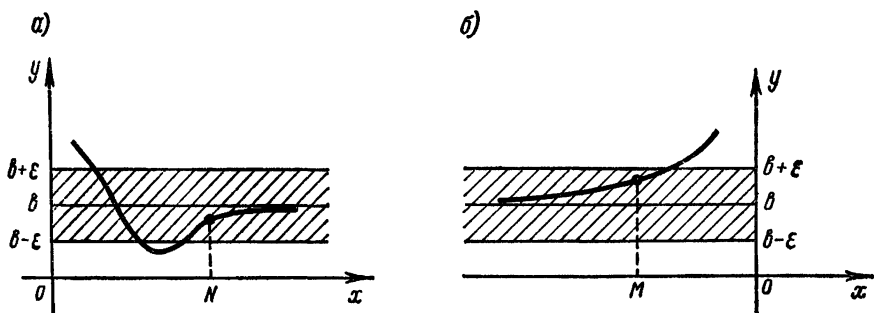


Рис. 106

$y=f(x)$ для всех x , превосходящих число N , содержится в полосе, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$ (рис. 106, а). Число N , фигурирующее в определении предела, вообще говоря, зависит от ε . Чем меньше ε , т. е. чем уже полоса между прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$, тем большим будет N .

2. Предел функции при $x \rightarrow -\infty$

Теперь рассмотрим определение предела функции при x , стремящемся к минус бесконечности ($x \rightarrow -\infty$).

Определение. Число b называется пределом функции при $x \rightarrow -\infty$, если, каково бы ни было положительное число ε , можно найти такое число M , что для всех x , меньших M , выполняется неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Если функция $f(x)$ имеет пределом число b при $x \rightarrow -\infty$, то это записывают так: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

Геометрический смысл предела функции при $x \rightarrow -\infty$ аналогичен геометрическому смыслу предела при $x \rightarrow +\infty$. Если $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$,

* Так как неравенство $|z| < \varepsilon$ равносильно неравенствам $-\varepsilon < z < \varepsilon$, то, полагая $z=f(x)-b$, приходим к неравенствам (3').

то, каково бы ни было положительное число $\varepsilon > 0$, найдется такое число M , что для всех $x < M$ график функции $y = f(x)$ будет находиться в полосе, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (рис. 106, б).

3. Предел функции при $x \rightarrow x_0$

Мы ввели понятия предела функции при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$. Введем теперь понятие предела при $x \rightarrow x_0$. Рассмотрим сперва случай, когда независимая переменная x приближается к x_0 слева.

Определение. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ слева, если, каково бы ни было положительное число ε , найдется такое число N (меньшее x_0), что для всех x , лежащих между N и x_0 ($N < x < x_0$), выполняется неравенство (1)

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Понятие предела функции при $x \rightarrow x_0$ слева сходно с понятием предела функции при $x \rightarrow +\infty$ и отличается от него лишь тем, что для предела функции при $x \rightarrow +\infty$ неравенство (1) выполняется

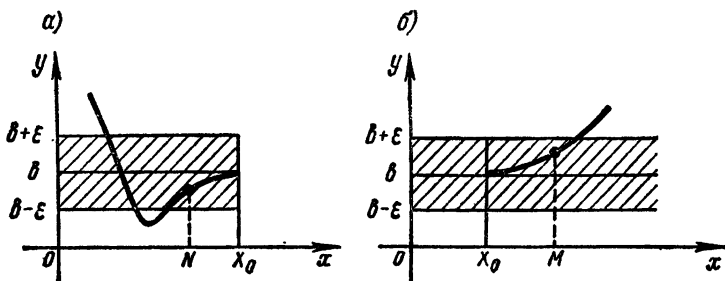


Рис. 107

для всех x , превосходящих N , а для предела функции при $x \rightarrow x_0$ слева, — для всех x , превосходящих N , но меньших, чем x_0 . Предел функции при $x \rightarrow x_0$ слева обозначают так: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = b$. Символ $x \rightarrow x_0 - 0$ означает, что x стремится к x_0 слева.

Геометрический смысл предела функции при $x \rightarrow x_0 - 0$ заключается в следующем: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число N ($N < x_0$), что для всех x , заключенных между N и x_0 , график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (рис. 107, а).

Аналогично пределу функции при $x \rightarrow x_0$ слева вводят понятие предела при $x \rightarrow x_0$ справа.

Определение. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ справа, если, каково бы ни было положительное число ε , найдется такое число M (большее x_0), что для всех x , лежащих между x_0 и M ($x_0 < x < M$), выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Предел функции при $x \rightarrow x_0$ справа обозначают так: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = b$.

Если функция $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ справа имеет пределом число b ,

то геометрически это означает, что график функции будет лежать в полосе, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ для всех x , заключенных между x_0 и M (рис. 107, б).

Пределы функции при $x \rightarrow x_0$ слева ($x \rightarrow x_0 - 0$) и при $x \rightarrow x_0$ справа ($x \rightarrow x_0 + 0$) называются *односторонними пределами*.

Если оба односторонних предела существуют и равны между собой, то говорят, что функция $f(x)$ имеет *двусторонний предел* при $x \rightarrow x_0$, или просто имеет предел при $x \rightarrow x_0$.

Определение. Число b является *пределом функции* при $x \rightarrow x_0$, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такие числа M и

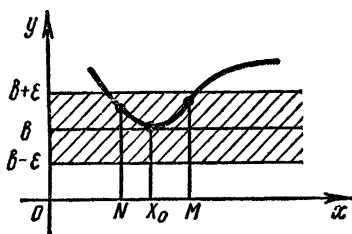


Рис. 108

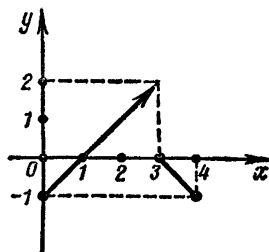


Рис. 109

N ($N < x_0 < M$), что для всех x , лежащих в интервале (N, M) (за исключением, быть может, точки x_0), выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Назовем окрестностью точки x_0 любой интервал, содержащий эту точку. Таким образом, если b есть предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ выполняется для всех точек некоторой окрестности точки x_0 (за исключением быть может точки x_0).

Если при $x \rightarrow x_0$ функция $f(x)$ имеет предел, равный b , то это записывают так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$. Геометрический смысл предела при $x \rightarrow x_0$ ясен из рис. 108.

Замечание 1. В определении предела при $x \rightarrow x_0$ (или $x \rightarrow x_0 + 0$, или $x \rightarrow x_0 - 0$) рассматривались значения $x \neq x_0$. В самой точке x_0 функция может быть и не определена. В дальнейшем это замечание будет неоднократно использовано.

Замечание 2. Числа M и N , встречающиеся в определениях пределов при $x \rightarrow x_0$ (или $x \rightarrow x_0 + 0$, или $x \rightarrow x_0 - 0$), зависят от ε и x_0 .

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = 2x + 1$. Ее значение при $x = 4$ равно 9. Покажем, что при приближении независимой переменной x слева и справа к числу 4 значения функции неограниченно приближаются к числу 9, т. е. что

$$\lim_{x \rightarrow 4} (2x + 1) = 9.$$

Для этого возьмем произвольное положительное число ε и убедимся в том, что разность между функцией и числом 9 по абсолютной

величине может быть сделана меньше ε для значений x , близких к $x_0 = 4$:

$$|(2x + 1) - 9| < \varepsilon.$$

Это неравенство равносильно неравенствам

$$-\varepsilon < (2x + 1) - 9 < \varepsilon$$

или

$$4 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 4 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, разность между функцией и числом 9 становится (по абсолютной величине) меньше ε для всех x , лежащих между числами $N = 4 - \frac{\varepsilon}{2}$ и $M = 4 + \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому функция $y = 2x + 1$ имеет предел $\lim_{x \rightarrow 4} (2x + 1) = 9$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на сегменте $[0; 4]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } 0 \leq x < 3; \\ 3 - x, & \text{если } 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 109. Очевидно, $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (x - 1) = 2$, а $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (3 - x) = 0$, что наглядно видно из графика. Здесь предел справа и предел слева не равны друг другу. Поэтому функция $y = f(x)$ не имеет предела (двустороннего) при $x \rightarrow 3$.

Покажем теперь, что если функция имеет предел, то он единственный. Это легко установить геометрически. В самом деле, допустим противное, т. е. что функция $y = f(x)$, например, при $x \rightarrow +\infty$ имеет два предела b_1 и b_2 . Рассмотрим две полосы, одна из которых ограничена прямыми $y = b_1 - \varepsilon$, $y = b_1 + \varepsilon$, а другая — прямыми $y = b_2 - \varepsilon$, $y = b_2 + \varepsilon$. При этом ε возьмем столь малым, чтобы обе полосы не имели общих точек. Тогда при достаточно больших x график функции не может находиться одновременно в каждой из этих полос. Таким образом, всякая функция либо совсем не имеет предела, либо имеет только один предел.

4. Бесконечно малые функции. Ограниченные функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$, если ее предел при $x \rightarrow +\infty$ равен нулю. Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0$. Так как для бесконечно малой функции предел $b = 0$, а $|f(x) - b| = |f(x) - 0| = |f(x)|$, то на основании понятия предела, например при $x \rightarrow +\infty$, можно дать следующее определение бесконечно малой функции, равносильное только что данному.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой (при $x \rightarrow +\infty$), если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти

такое число N , что для всех $x > N$ выполняется неравенство

$$|f(x)| < \varepsilon^* \quad (4)$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Покажем, что функция $y = \frac{1}{x^2}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$. Для этого надо показать, что ее предел $b = 0$ при $x \rightarrow +\infty$, т. е. что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N , что для $x > N$ выполняется неравенство (4):

$$|f(x)| = \left| \frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2} < \varepsilon.$$

Но это неравенство осуществляется при $x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = N$.

Вообще, можно доказать, что функция $y = \frac{1}{x^\alpha}$ (где α — любое положительное число) бесконечно малая при $x \rightarrow +\infty$.

Пример 2. Функция $y = x^3$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$. Задаем $\varepsilon > 0$. Неравенство $|f(x)| = |x^3| < \varepsilon$, очевидно, выполняется для всех тех значений аргумента x , для которых $|x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$. Таким образом, неравенство $|x^3| < \varepsilon$ выполняется для всех x , лежащих между $N = -\sqrt[3]{\varepsilon}$ и $M = \sqrt[3]{\varepsilon}$. А это значит (см. стр. 167), что $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, т. е. функция $y = x^3$ бесконечно малая при $x \rightarrow 0$.

Вообще, можно показать, что функция $y = x^m$, где $m > 0$, бесконечно малая при $x \rightarrow 0$.

Пример 3. Функция $y = 2 - \frac{1}{x}$ не является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$, так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2 \neq 0$.

Докажем теперь несколько теорем о бесконечно малых функциях. Для определенности все формулировки и доказательства теорем будем проводить для случая бесконечно малых функций при $x \rightarrow +\infty$, так как для всех остальных случаев формулировки и доказательства аналогичны. Рекомендуем читателю самостоятельно сформулировать и доказать эти теоремы для $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow x_0 - 0$ и $x \rightarrow x_0 + 0$.

Теорема 1. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются бесконечно малыми функциями (при $x \rightarrow +\infty$), то и их сумма $\varphi(x) + \psi(x)$ также является бесконечно малой функцией (при $x \rightarrow +\infty$).

Доказательство. Пусть $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, т. е. установим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N , что для всех $x > N$ имеет место неравенство (4)

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Если такое N найдется (для произвольного, заранее заданного ε),

* Рекомендуем читателю сформулировать второе определение бесконечно малой функции для случаев $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow x_0 - 0$ и $x \rightarrow x_0 + 0$.

то из этого будет следовать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Итак, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\varphi(x)$ по условию является бесконечно малой функцией, то для положительного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется такое число N_1 , что при $x > N_1$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5)$$

Аналогично, для того же числа $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется такое число N_2 , что при $x > N_2$ выполняется неравенство

$$|\psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Пусть N — наибольшее из чисел N_1 и N_2 . Тогда для $x > N$ выполняются одновременно оба неравенства (5) и (6). Но тогда для всех $x > N$ имеет место соотношение

$$|f(x)| = |\varphi(x) + \psi(x)| \leq |\varphi(x)| + |\psi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. *$$

Таким образом, для всех $x > N$ $|f(x)| < \varepsilon$, а это значит, что функция $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow +\infty$.

Эта теорема может быть легко обобщена на любое конечное число бесконечно малых функций. Кратко ее читают так: *сумма нескольких бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

Пример 4. Функция $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow +\infty$, так как каждое слагаемое $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ есть бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$ (см. пример 1).

Пример 5. Функция $y = x + x^3 + x^5$ есть бесконечно малая функция при $x \rightarrow 0$, так как функции $y = x$, $y = x^3$ и $y = x^5$ бесконечно малы при $x \rightarrow 0$ (см. пример 2).

Прежде чем переходить к дальнейшим теоремам о бесконечно малых функциях, введем понятие ограниченной функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на некотором множестве значений аргумента x , если существует такое положительное число C , что для всех x из этого множества выполняется неравенство $|f(x)| \leq C$. Таким множеством может быть, например, интервал, сегмент или даже вся числовая прямая.

Рассмотрим примеры.

Пример 6. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ ограничены на всей числовой прямой, так как для любого значения x имеем: $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$.

Пример 7. Функция $y = x^3 + 4$ ограничена на сегменте $[0; 3]$, так как для всех x , принадлежащих этому сегменту, имеет место неравенство $|f(x)| \leq f(3) = 31$, т. е. $|f(x)| \leq 31$.

* Здесь мы воспользовались следующим свойством абсолютных величин: $|a+b| \leq |a| + |b|$ (см. гл. I, § 1, п. 3).

Пример 8. Функция $y = \frac{1}{x}$ не является ограниченной на интервале $(0; 1)$, так как нельзя указать такое число C , чтобы для всех x из интервала $(0; 1)$ выполнялось неравенство $\left| \frac{1}{x} \right| \leq C$.

Следующие две теоремы устанавливают связь между понятиями ограниченной функции и функции, имеющей предел. Для определенности рассмотрим случай предела функции при $x \rightarrow +\infty$.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow +\infty$, то она ограничена на некотором бесконечном интервале $(N; +\infty)$.

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. Тогда, на основании определения предела, для $\varepsilon = 1$ можно найти такое число N , что для всех $x > N$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < 1$. Так как по свойству абсолютных величин $|f(x) - b| \geq |f(x)| - |b|$ *, то $|f(x)| - |b| < 1$, откуда $|f(x)| < |b| + 1 = C$. А это и означает, что функция $y = f(x)$ ограничена на бесконечном интервале $(N; +\infty)$.

Замечание. Функцию, ограниченную на бесконечном интервале $(N; +\infty)$, будем называть ограниченной при $x \rightarrow +\infty$.

Следствие. Бесконечно малая функция (при $x \rightarrow +\infty$) ограничена (при $x \rightarrow +\infty$).

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 3. Если функция $y = f(x)$ имеет предел, отличный от нуля (при $x \rightarrow +\infty$), то функция $y = \frac{1}{f(x)}$ ограничена (на некотором бесконечном интервале).

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, где $b \neq 0$. Пусть дано положительное число $\varepsilon < |b|$. На основании определения предела найдется такое число N , что для всех $x > N$ имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Так как $|f(x) - b| = |b - f(x)| \geq |b| - |f(x)|$, то $|b| - |f(x)| < \varepsilon$ и $|f(x)| > |b| - \varepsilon > 0$. Следовательно,

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|b| - \varepsilon} = C.$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 4. Произведение бесконечно малой функции (при $x \rightarrow +\infty$) на функцию ограниченную (при $x \rightarrow +\infty$) является функцией бесконечно малой.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — ограниченная функция на бесконечном интервале $N_0 < x < +\infty$. Следовательно, существует такое число $C > 0$, что для всех $x > N_0$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x)| \leq C. \quad (7)$$

Пусть, далее, $f(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$. Покажем, что произведение $\varphi(x) \cdot f(x)$ есть бесконечно малая функция

* Здесь мы использовали свойство абсолютных величин $|a - b| \geq |a| - |b|$ (см. гл. I, § 1, п. 3).

при $x \rightarrow +\infty$. В самом деле, так как $f(x)$ — бесконечно малая функция, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N_1 , что при $x > N_1$ имеет место неравенство

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}. \quad (8)$$

Пусть N — наибольшее из чисел N_0 и N_1 . Тогда для $x > N$ одновременно выполняются неравенства (7) и (8). Следовательно, для всех $x > N$

$$|\varphi(x) \cdot f(x)| = |\varphi(x)| \cdot |f(x)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

т. е. $\varphi(x) \cdot f(x)$ — бесконечно малая функция.

Пример 8. Функция $y = \frac{\sin x}{x^2}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$, так как она является произведением ограниченной функции $\sin x$ на бесконечно малую (при $x \rightarrow +\infty$) функцию $y = \frac{1}{x^2}$.

Пример 9. Функция $y = x^2(1 + \sin x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$, так как она является произведением ограниченной функции $1 + \sin x$ на функцию x^2 , бесконечно малую при $x \rightarrow 0$.

Следствие 1. Так как всякая бесконечно малая функция ограничена, то из только что доказанной теоремы вытекает, что *произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

Следствие 2. *Произведение бесконечно малой функции на число есть функция бесконечно малая.*

Теорема 5. *Частное от деления функции $f(x)$, бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$, на функцию $\varphi(x)$, предел которой (при $x \rightarrow +\infty$) отличен от нуля, является функцией бесконечно малой.*

Доказательство. Функция $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ может быть представлена в виде произведения бесконечно малой функции $f(x)$ на ограниченную функцию $\frac{1}{\varphi(x)}$ (ограниченность функции $\frac{1}{\varphi(x)}$ следует из теоремы 3).

Но тогда из теоремы 4 вытекает, что частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)}$ является бесконечно малой функцией.

5. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми функциями

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$, если для любого положительного числа A можно подобрать такое число N , что для всех значений $x > N$ выполняется неравенство $|f(x)| > A^*$.

Так, например, функция $y = x^2$ является бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$. Какое бы положительное число A мы ни взяли, эта функция может быть сделана больше, чем A (для всех значений x ,

* Число N зависит от A .

превосходящих число $N = \sqrt{A}$). Аналогично, функция $y = \lg x$ является бесконечно большой функцией при $x \rightarrow +\infty$, так как неравенство $|\lg x| > A$ выполняется для всех x , превосходящих $N = 10^A$. Ясно, что всякая бесконечно большая функция при $x \rightarrow +\infty$ не является ограниченной, а поэтому она не имеет предела (см. теорему 2).

О бесконечно большой функции (при $x \rightarrow +\infty$) говорят, что она стремится к бесконечности, или что она имеет бесконечный предел. Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \rightarrow +\infty$, то это символически записывают так: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$. Это равенство не следует понимать в том смысле, что функция имеет предел; оно означает только, что функция (не имея предела) является бесконечно большой.

Если бесконечно большая функция $f(x)$ положительна (для всех достаточно больших значений x), то говорят, что она стремится к $+\infty$, и записывают это так: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Если же бесконечно большая функция отрицательна (для всех достаточно больших x), то говорят, что она стремится к $-\infty$, и записывают: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Так, например, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, а $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$. Можно доказать, что *любой многочлен есть бесконечно большая функция как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$.*

Между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями существует тесная связь, которая устанавливается в теорем. 1 и 2.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \rightarrow +\infty$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем, что для достаточно больших x будет выполняться неравенство $\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$, а это и будет означать, что $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая функция. Так как по условию $f(x)$ — бесконечно большая функция, то существует такое число N , что при $x > N$ $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$. Но тогда для тех же x $\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$. Тем самым теорема доказана.

Пример 1. Функция $y = x^2$ бесконечно большая при $x \rightarrow +\infty$. Следовательно, функция $\frac{1}{x^2}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$, не обращающаяся в нуль, бесконечно малая при $x \rightarrow +\infty$, то $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно большая функция при $x \rightarrow +\infty$.

Рекомендуем доказать эту теорему читателю.

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow x_0 + 0$ и $x \rightarrow x_0$. Так, например, функция

$y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow x_0 - 0$ (при $x \rightarrow x_0$ слева), если, каково бы ни было число $A > 0$, найдется такое N , меньшее x_0 , что для всех x , лежащих между N и x_0 ($N < x < x_0$), выполняется неравенство $|f(x)| > A$.

Все сказанное в этом пункте о функциях, бесконечно больших при $x \rightarrow +\infty$, справедливо и для бесконечно больших функций при $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow x_0 + 0$ и $x \rightarrow x_0$.

Пример 2. Функция $y = \frac{1}{x^3}$ на основании теоремы 2 есть бесконечно большая функция при $x \rightarrow 0$, так как функция $y = x^3$ бесконечно малая при $x \rightarrow 0$ (см. пример 2, п. 4). При этом $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x^3} = -\infty$, а $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x^3} = +\infty$, так как функция $\frac{1}{x^3}$ для $x < 0$ отрицательна, а для $x > 0$ положительна.

6. Основные теоремы о пределах

В этом пункте мы приведем некоторые теоремы о правилах предельного перехода, которые, как мы увидим в дальнейшем, облегчают нахождение пределов. При этом заметим, что как формулировки, так и доказательства этих теорем для случаев $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0$ совершенно аналогичны. Поэтому, для определенности, мы приведем их только для случая $x \rightarrow +\infty$.

Прежде всего установим связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой функцией. Эта связь отражена в содержании следующих двух теорем.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ имеет предел (при $x \rightarrow +\infty$), равный b , то ее можно представить как сумму числа b и бесконечно малой функции (при $x \rightarrow +\infty$).

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. Рассмотрим разность

$$f(x) - b = \alpha(x) \quad (9)$$

и покажем, что $\alpha(x)$ — есть бесконечно малая функция (при $x \rightarrow +\infty$). Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что $|f(x) - b| < \varepsilon$ для всех $x > N$. Но тогда и $|\alpha(x)| < \varepsilon$ для $x > N$. А это значит, что $\alpha(x)$ бесконечно малая функция. Из равенства (9) находим $f(x) = b + \alpha(x)$. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 2 (обратная). Если функцию $f(x)$ можно представить как сумму числа b и некоторой бесконечно малой функции (при $x \rightarrow +\infty$), то число b является пределом функции $f(x)$ (при $x \rightarrow +\infty$).

Доказательство. По условию $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая функция (при $x \rightarrow +\infty$). Покажем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

Действительно, $f(x) - b = \alpha(x)$. Так как $\alpha(x)$ бесконечно малая функция, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое число N , что

для $x > N$ имеет место неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Но так как $|f(x) - b| = |\alpha(x)|$, то для $x > N$ $|f(x) - b| < \varepsilon$. А это означает, на основании определения предела, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

Пример 1. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 5$

Решение. Так как функции $\frac{6}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ бесконечно малые при $x \rightarrow +\infty$, то $\frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$, как сумма бесконечно малых функций, есть функция бесконечно малая. Функция $5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$ есть сумма числа 5 и бесконечно малой функции. Следовательно, по теореме 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 5.$$

Перейдем теперь к выводу правил предельного перехода.

Теорема 3. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = c$, то функции $f(x) + \varphi(x)$ и $f(x) - \varphi(x)$ тоже имеют пределы при $x \rightarrow +\infty$, причем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x),$$

т. е. предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов.

Доказательство. На основании теоремы 1 функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ можно представить в виде: $f(x) = b + \alpha(x)$ и $\varphi(x) = c + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — функции бесконечно малые при $x \rightarrow +\infty$. Но тогда

$$f(x) + \varphi(x) = [b + \alpha(x)] + [c + \beta(x)] = (b + c) + [\alpha(x) + \beta(x)]. \quad (10)$$

На основании теоремы 1, п. 4 сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ является бесконечно малой функцией. Равенство (10) показывает, что функция $f(x) + \varphi(x)$ представлена как сумма числа $b + c$ и бесконечно малой функции $\alpha(x) + \beta(x)$. Следовательно, на основании теоремы 2 настоящего пункта, число $b + c$ является пределом функции $f(x) + \varphi(x)$. Итак,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + \varphi(x)] = b + c = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

В случае разности функций доказательство аналогично.

З а м е ч а н и е. Теорема 3 справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Теорема 4. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = c$, то функция $f(x)\varphi(x)$ имеет предел при $x \rightarrow +\infty$, причем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)\varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x),$$

т. е. предел произведения двух функций равен произведению их пределов.

Доказательство. На основании теоремы 1 имеем

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad \varphi(x) = c + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — функции, бесконечно малые при $x \rightarrow +\infty$. Следовательно,

$$f(x) \varphi(x) = [b + \alpha(x)] [c + \beta(x)] = bc + [c\alpha(x) + b\beta(x) + \alpha(x)\beta(x)]. \quad (11)$$

Функция $c\alpha(x) + b\beta(x) + \alpha(x)\beta(x)$ является бесконечно малой, как сумма трех бесконечно малых функций $c\alpha(x)$, $b\beta(x)$ и $\alpha(x)\beta(x)$ (см. п. 4, следствия из теоремы 4). Равенство (11) показывает, что функция $f(x) \cdot \varphi(x)$ представлена как сумма числа bc и бесконечно малой функции $c\alpha(x) + b\beta(x) + \alpha(x)\beta(x)$. Следовательно, на основании теоремы 2, число bc является пределом функции $f(x) \cdot \varphi(x)$. Итак,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot \varphi(x)] = b \cdot c = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x).$$

Следствие из теоремы 4. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [k \cdot \varphi(x)] = k \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x),$$

где k — постоянный множитель.

Доказательство. В самом деле,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [k \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} k \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x),$$

так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} k = k$.

Теорема 4 справедлива для любого конечного числа сомножителей. В частности, если эти сомножители равны между собой, то имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \{[f(x)]^n\} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot f(x) \dots f(x)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \dots \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]^n. \end{aligned}$$

Это кратко формулируют так: *предел степени равен степени предела.*

Теорема 5. Если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = c$ и $c \neq 0$, то $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ име-

ет предел при $x \rightarrow +\infty$, причем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)}$, т. е. предел

дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.

Доказательство. По теореме 1 $f(x) = b + \alpha(x)$, $\varphi(x) = c + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции при $x \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим разность

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{b}{c} = \frac{b + \alpha(x)}{c + \beta(x)} - \frac{b}{c} = \frac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{c^2 + c\beta(x)}. \quad (12)$$

Дробь $\frac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{c^2 + c\beta(x)} = \gamma(x)$, стоящая в правой части равенства (12), по теореме 5, п. 4, является бесконечно малой функцией, так как

числитель этой дроби $c\alpha(x) - b\beta(x)$ является бесконечно малой функцией, а знаменатель по теореме 2 имеет предел $c^2 \neq 0$.

Из равенства (12) имеем

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{b}{c} + \frac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{c^2 + c\beta(x)} = \frac{b}{c} + \gamma(x).$$

Поэтому, на основании теоремы 2, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеет при $x \rightarrow +\infty$ предел, равный $\frac{b}{c}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{b}{c} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)}.$$

Теоремы о пределах суммы, произведения и частного облегчают нахождение пределов.

Пример 1. Найти предел функции $y = x^4 + 3x^2 + 4$ при $x \rightarrow 2$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^4 + 3x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow 2} x^4 + \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 4.$$

Здесь мы воспользовались теоремой о пределе суммы.

Далее, так как предел степени равен степени предела, то

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^4 = \left[\lim_{x \rightarrow 2} x \right]^4 = 2^4 = 16;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 = 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 3 \left[\lim_{x \rightarrow 2} x \right]^2 = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

Замечая, наконец, что $\lim_{x \rightarrow 2} 4 = 4$, получим

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^4 + 3x^2 + 4) = 16 + 12 + 4 = 32.$$

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 5}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 = 1 + 3 + 2 = 6,$$

а предел знаменателя

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 5) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + 5 = 1 - 2 + 5 = 4 \neq 0,$$

то, применяя теорему о пределе дроби, получим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2x + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 5)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Непосредственное применение теорем о пределах, однако, не всегда приводит к цели. Так, например, нельзя применять теорему о пределе дроби, если ее знаменатель стремится к нулю. Поэтому часто, прежде чем применять эти теоремы, необходимо тождественно преобразовать функцию, предел которой мы ищем. Как это делается, мы покажем на конкретных примерах.

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 8}$.

Решение. Здесь непосредственно теорему о пределе дроби применить нельзя, так как предел знаменателя при $x \rightarrow 4$ равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 6x + 8) = \lim_{x \rightarrow 4} x^2 - 6 \lim_{x \rightarrow 4} x + 8 = 4^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 0.$$

Кроме того, числитель дроби имеет предел, также равный нулю. Поэтому нахождение предела этой дроби сводится, как говорят, к раскрытию неопределенности $\frac{0}{0}$ *. Для этого преобразуем дробь, разложив числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $x-4$. Это сокращение допустимо, так как при разыскании предела рассматриваются значения $x \neq 4$ (см. замечание 1 на стр. 167).

Итак, для всех значений $x \neq 4$ имеет место тождество

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x-1}{x-2}.$$

Поэтому пределы этих функций равны между собой:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-1}{x-2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} (x-1)}{\lim_{x \rightarrow 4} (x-2)} = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}.$$

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 6x + 1}{6x^2 + 4x + 2}$.

Решение. Здесь непосредственно нельзя применить теорему о пределе дроби, так как ни числитель, ни знаменатель дроби не имеют предела при $x \rightarrow +\infty$, одновременно стремясь к бесконечности **. Таким образом, мы здесь имеем дело с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для того чтобы найти предел данной дроби, предварительно преобразуем ее, разделив числитель и знаменатель на x^2 ; дробь от этого не изменит своей величины, а следовательно, и своего пре-

* Если при разыскании предела дроби $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ числитель и знаменатель стремятся одновременно к нулю или бесконечности, то будем говорить, что эта дробь представляет неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или соответственно $\frac{\infty}{\infty}$. Нахождение предела такой дроби условимся называть раскрытием неопределенности вида $\frac{0}{0}$

или $\frac{\infty}{\infty}$.

** См. стр. 173.

дела. После этого преобразования предел уже найти легко:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 6x + 1}{6x^2 + 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(6 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{5}{6}.$$

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+6}{3x^2+4x+2}$.

Решение. Для того чтобы и здесь можно было применять теорему о пределе частного, разделим числитель и знаменатель на x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+6}{3x^2+4x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{3 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{0}{3} = 0.$$

Пример 6. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3+6x^2-2x}{6x^2+5x+13}$.

Решение. Так как предел обратной дроби $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2+5x+13}{7x^3+6x^2-2x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{13}{x^3}}{7 + \frac{6}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{7} = 0$, то она является бесконечно малой функ-

цией при $x \rightarrow +\infty$. Следовательно, данная дробь, на основании теоремы 2, п. 5, бесконечно большая функция: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3+6x^2-2x}{6x^2+5x+13} = \infty$.

Обобщая разобранные примеры, можно сделать следующий вывод: При $x \rightarrow \pm \infty$ предел отношения двух многочленов одинаковых степеней равен отношению коэффициентов при старших степенях x . Если же степени многочленов не равны, то предел их отношения равен нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя, и равен бесконечности, если степень числителя больше степени знаменателя.

В заключение этого пункта укажем еще на две теоремы о пределах.

Теорема 6. Пусть даны три функции $\varphi(x)$, $f(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющие неравенствам $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ для достаточно больших значений x . Если функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ имеют один и тот же предел при $x \rightarrow +\infty$, то и функция $f(x)$, заключенная между ними, имеет предел, равный пределу функций $\varphi(x)$ и $g(x)$.

Доказательство. Дано $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$. Требуется доказать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. Доказательство теоремы ясно из рис. 110.

Действительно, так как функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ имеют при $x \rightarrow +\infty$ пределом число b , то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число N , что для $x > N$ графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$ одновременно будут лежать внутри полосы, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$. Но тогда и график функции $y = f(x)$, лежащий между графиками функций $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$, для $x > N$ попадет внутрь этой же полосы. А это и значит, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

Теорема 7. Если функция $y=f(x) \geq 0$ для всех достаточно больших значений x и при $x \rightarrow +\infty$ имеет предел, то этот предел не может быть отрицательным.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b < 0$. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число N , что график функции $y=f(x)$ для $x > N$ попадет внутрь полосы, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$, $y=b+\varepsilon$. Взяв ε столь малым, чтобы эта полоса лежала ниже оси Ox , получим, что для

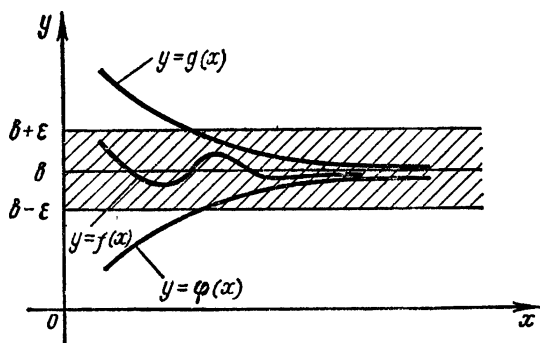


Рис. 110

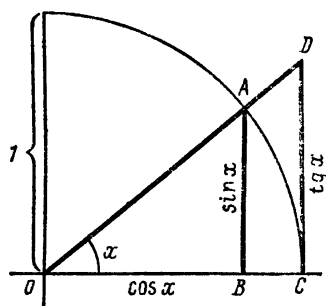


Рис. 111

$x > N$ график будет лежать ниже оси Ox , и его точки, следовательно, будут иметь отрицательные ординаты. А это противоречит тому, что для всех достаточно больших x $f(x) \geq 0$. Итак, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 0$.

7. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$

Часто приходится иметь дело с пределом функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$. Как мы увидим, он равен 1. Предварительно докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, а $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность единичного радиуса (рис. 111). Дуга $\widehat{AC}$ численно равна центральному углу x , выраженному в радианах, а отрезок AB численно равен $\sin x$. Так как $0 < AB < \widehat{AC}$ (рис. 111), то

$$0 < \sin x < x. \quad (13)$$

Из неравенств (13) следует, что при $x \rightarrow 0$ и $\sin x \rightarrow 0$. Итак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0^*. \quad (14)$$

Докажем теперь, что $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Замечая, что $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \cdot 0 = 1.$$

* Можно доказать, что формула (14) справедлива и в том случае, когда $x \rightarrow 0$, оставаясь отрицательным.

Теперь перейдем к рассмотрению предела функции $\frac{\sin x}{x}$, при $x \rightarrow 0$. Так как предел знаменателя дроби равен нулю, то теорема о пределе дроби здесь не применима*.

Для разыскания предела функции $\frac{\sin x}{x}$ рассмотрим рис. 111. Из рисунка непосредственно видно:

$$\text{пл. } \triangle OAB < \text{пл. сектора } OAC < \text{пл. } \triangle ODC; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{пл. } \triangle OAB &= \frac{OB \cdot BA}{2} = \frac{\cos x \cdot \sin x}{2}; \text{ пл. сектора } OAC = \\ &= \frac{1}{2} R^2 x = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x = \frac{x}{2}; \text{ пл. } \triangle ODC = \frac{OC \cdot CD}{2} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}. \end{aligned}$$

Поставим найденные выражения для площадей в неравенства (15):

$$\frac{\cos x \cdot \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}. \quad (16)$$

Неравенства (16) справедливы для всех значений x , заключенных между нулем и $\frac{\pi}{2}$. Разделив все члены этих неравенств на $\frac{1}{2} \sin x$, получим

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \quad (17)$$

Неравенства (17) были выведены в предположении, что $x > 0$. Но они верны и при $x < 0$, так как $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x}$.

Выше мы видели, что $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Применив к частному $\frac{1}{\cos x}$ теорему о пределе дроби, получим $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{1}{1} = 1$.

Обе крайние функции $\cos x$ и $\frac{1}{\cos x}$ неравенств (17) при $x \rightarrow 0$ имеют одинаковый предел, равный единице. Но тогда функция $\frac{\sin x}{x}$,

* Так как при $x \rightarrow 0$ числитель дроби $\frac{\sin x}{x}$ также стремится к нулю, то мы здесь имеем дело с неопределенностью $\frac{0}{0}$.

заклученная между функциями $\cos x$ и $\frac{1}{\cos x}$, согласно теореме 6, п. 6, имеет тот же предел при $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (18)$$

С помощью этого предела находятся многие другие пределы.

Приведем примеры.

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби при $x \rightarrow 0$ одновременно стремятся к нулю. Теорема о пределе дроби здесь неприменима. Для нахождения предела преобразуем нашу дробь:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

8. Последовательность. Число e

Рассмотрим функцию, областью определения которой является множество натуральных чисел: $y = f(n)$. Такая функция называется *функцией натурального аргумента* или *последовательностью*. Значения этой функции называются *членами последовательности*.

Члены последовательности обычно располагаются в порядке возрастания аргумента:

$$y_1 = f(1), y_2 = f(2), y_3 = f(3), \dots, y_n = f(n), \dots;$$

$y_1 = f(1)$ называется первым членом последовательности, $y_2 = f(2)$ — вторым членом, $\dots$, $y_n = f(n)$ называется n -м или *общим членом* последовательности. Последовательность кратко обозначают $\{y_n\}$.

Пример 1. Пусть $\{y_n\} = \{n!\}$. Выпишем несколько первых членов последовательности:

$$y_1 = 1! = 1, y_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2, y_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, y_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \dots$$

Пример 2. Пусть $\{y_n\} = \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$. Тогда

$$y_1 = \frac{1}{1} = 1, y_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, y_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, y_4 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}, \dots$$

Пример 3. Пусть $\{y_n\} = \{(-1)^n\}$. Тогда

$$y_1 = -1, y_2 = 1, y_3 = -1, y_4 = 1, \dots$$

Введем теперь понятие предела последовательности.

Определение. Число b называется пределом последовательности $y_1, y_2, \dots, y_n = f(n), \dots$, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое натуральное число N , что для всех членов последовательности, номер которых $n \geq N$, выполняется неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$ (или $|f(n) - b| < \varepsilon$).

Если число b — предел последовательности, то это записывается так: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = b$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

Определение предела последовательности аналогично определению предела функции при $x \rightarrow +\infty$. Для функции условие $|f(x) - b| < \varepsilon$ выполнялось для всех действительных значений $x > N$, а для последовательности неравенство $|f(n) - b| < \varepsilon$ выполняется для всех натуральных чисел $n \geq N$.

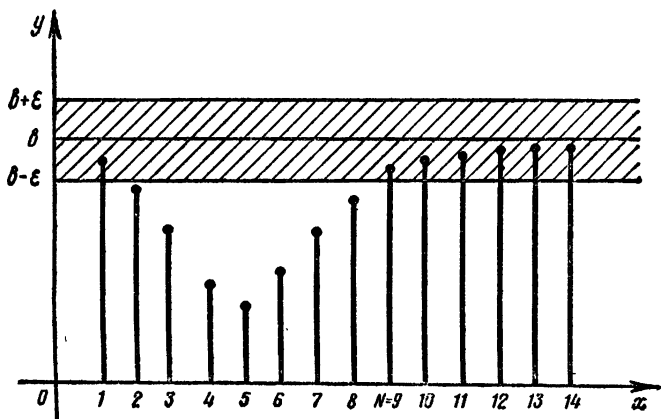


Рис. 112

Неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$ равносильно неравенствам

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon.$$

Поэтому, изображая члены последовательности точками плоскости Oxy с координатами $x = n$, $y = f(n)$, приходим к следующему геометрическому смыслу предела последовательности: если последовательность имеет пределом число b , то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое натуральное число N , что все точки, изображающие члены последовательности с номерами $n \geq N$ попадут в полосу, ограниченную прямыми $y = b - \varepsilon$, $y = b + \varepsilon$ (рис. 112).

Все теоремы о пределах функций, доказанные в этом параграфе, остаются справедливыми и для последовательностей.

Рассмотрим пример.

Пример 4. Найти предел последовательности $\{y_n\} = \left\{ \frac{1+2+\dots+n}{n^2} \right\}$.

Решение. Здесь числитель и знаменатель одновременно стремятся к $+\infty$. Для отыскания предела преобразуем y_n , выразив числитель по формуле суммы арифметической прогрессии:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Пример 5. Рассмотрим последовательность $\{y_n\} = \{(-1)^n\}$. Члены последовательности попеременно принимают значения 1 и -1 . Эта последовательность, очевидно, не имеет предела.

Пример 6. Рассмотрим последовательность $\{y_n\} = \{q^n\}$, где $q > 0$. Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{если } q < 1; \\ 1, & \text{если } q = 1; \\ \infty, & \text{если } q > 1. \end{cases}$$

Решение. Если $q = 1$, то $y_n = 1$ при любом n . Ясно, что в этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

Пусть теперь $q > 1$. Тогда $q = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$. По формуле бинома Ньютона*

$$q^n = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!} \alpha^2 + \dots + \alpha^n.$$

Так как $\alpha > 0$, то все слагаемые в последней сумме положительны. Отбрасывая все слагаемые, кроме первых двух, получим $1 + n\alpha < q^n$. Отсюда заключаем, что так как при $n \rightarrow \infty$ $1 + n\alpha$ неограниченно растет, то q^n также неограниченно растет, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

Наконец, пусть $q < 1$. Тогда $q = \frac{1}{r}$, где $r > 1$. На основании выше изложенного $r^n \rightarrow \infty$, поэтому $q^n = \frac{1}{r^n}$ стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

* Формула бинома Ньютона имеет вид

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} b^n,$$

или, так как $\frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = 1$,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n.$$

В частности, при $n=2$ и $n=3$ получим известные формулы.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Последовательность $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$, называется *возрастающей*, если с увеличением n ее члены увеличиваются, т. е.

$$y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots$$

Если с увеличением n члены последовательности убывают, т. е.

$$y_1 > y_2 > y_3 > \dots > y_n > y_{n+1} > \dots,$$

то последовательность называется *убывающей*.

Последовательность примера 1 возрастающая, а примера 2 — убывающая. Последовательность примера 3 не является ни возрастающей, ни убывающей.

Последовательность $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ называется *ограниченной*, если существует такое число C , что для всех натуральных чисел n выполняется неравенство $|y_n| \leq C$. Последовательность примера 1 не является ограниченной.

Рассмотрим возрастающую последовательность

$$y_1 < y_2 < \dots < y_n < \dots$$

Если эта последовательность не является ограниченной, то ее члены будут неограниченно возрастать и, следовательно, такая последовательность не имеет предела. Если же

возрастающая последовательность ограничена, то ее члены, возрастающая и не превосходя числа C , должны, очевидно, неограниченно приближаться к некоторому числу $b \leq C$ (рис. 113). Не доказывая этого факта, ограничимся его точной формулировкой.

Теорема (достаточный признак существования предела последовательности). *Всякая возрастающая ограниченная последовательность имеет предел*.*

В качестве примера на применение этого признака рассмотрим последовательность, общий член которой $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Покажем, что эта последовательность возрастает и ограничена.

По формуле бинома Ньютона имеем, полагая $a = 1$, $b = \frac{1}{n}$ (см. сноску на стр. 184):

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

* Аналогичная теорема имеет место для убывающей ограниченной последовательности.

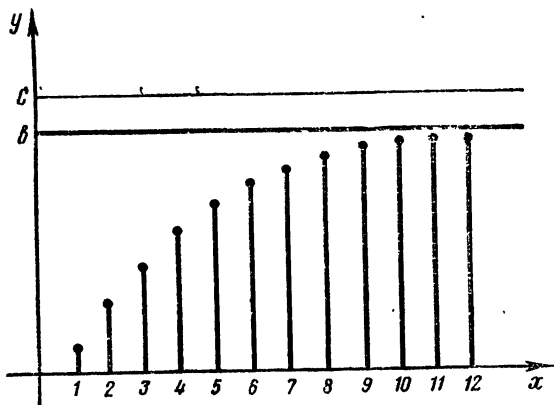


Рис. 113

Замечая, что

$$\begin{aligned}\frac{n(n-1)}{n^2} &= 1 - \frac{1}{n}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right), \quad \dots, \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 2 \cdot 1}{n^n} = \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} \dots \frac{[n - (n-1)]}{n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right),\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}y_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

С увеличением n дроби $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, ... уменьшаются, а разности $1 - \frac{1}{n}$, $1 - \frac{2}{n}$, $1 - \frac{3}{n}$, ... увеличиваются. Поэтому с увеличением n 3-й, 4-й и т. д. члены разложения увеличиваются. Кроме того, с увеличением n добавляются новые положительные слагаемые. Поэтому с увеличением n $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает. Итак, последовательность $\{y_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ — возрастающая. Покажем, что она ограничена.

Если в разложении для y_n у каждого слагаемого отбросить в скобках дроби $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ..., то каждое слагаемое увеличится, и мы получим сумму, большую первоначальной:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}.$$

Но

$$\frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n} < \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}}_{n-1 \text{ множитель}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Поэтому

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

Поэтому $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3$. Итак, данная последовательность ограничена.

Следовательно, на основании признака существования предела возрастающей ограниченной последовательности заключаем, что последовательность $\left\{y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ имеет предел. Этот предел играет большую роль в математике. Его называют числом e . Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (19)$$

Число e иррационально. Его приближенное значение с точностью до 10^{-6} : $e \approx 2,718282$.

Рассмотрим функцию $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Можно доказать, что эта функция при непрерывном изменении x и стремлении его к $+\infty$ также имеет пределом число e :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (19')$$

Доказательства этого факта мы не приводим.

С помощью формулы (19') вычисляются многие пределы.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Показать, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Решение. Сделаем, как говорят, замену переменной, положив $x = -(t+1)$. Тогда, очевидно, что при $x \rightarrow -\infty$ $t \rightarrow +\infty$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{-(t+1)}\right]^{-(t+1)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)\right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Итак,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Так как функция $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ имеет один и тот же предел как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$, то часто пишут просто

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пример 2. Найти предел функции $y = (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Решение. Для разыскания предела сделаем замену переменной, положив $\frac{1}{\alpha} = x$. Тогда при $\alpha \rightarrow 0$ $x \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Решение. Положим $x = 2t$. При $x \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \cdot e = e^2.\end{aligned}$$

В заключение отметим, что часто приходится рассматривать показательную функцию с основанием e : $y = e^x$.

9. Натуральные логарифмы

В математике существенную роль играют логарифмы при основании e . Логарифм при основании e называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln x$:

$$\ln x = \log_e x.$$

Найдем связь между натуральными и десятичными логарифмами.

Пусть $y = \ln x$. Тогда, на основании определения логарифма, имеем $x = e^y$. Прологарифмировав обе части последнего равенства по основанию 10, получим:

$$\lg x = \lg e^y, \quad \lg x = y \lg e \quad \text{или} \quad \lg x = \ln x \cdot \lg e.$$

Так как $\lg e \approx \lg 2,7182 \approx 0,4343$, то

$$\lg x \approx 0,4343 \ln x. \quad (20)$$

Из этой формулы следует, что $\ln x \approx \frac{1}{0,4343} \lg x$, или

$$\ln x \approx 2,3026 \lg x. \quad (21)$$

Формулы (20) и (21) дают связь между натуральными и десятичными логарифмами.

Пример. Найти $\ln 32,94$.

Решение. Так как $\lg 32,94 \approx 1,5177$, то, применяя формулу (21), имеем

$$\ln 32,94 \approx 2,3026 \cdot 1,5177 \approx 3,4947.$$

10. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются бесконечно малыми при $x \rightarrow +\infty$. Рассмотрим предел отношения этих функций при $x \rightarrow +\infty$ и введем следующие определения.

Определение 1. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *бесконечно малыми одного и того же порядка малости* при $x \rightarrow +\infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ существует и не равен нулю.}$$

Определение 2. Функция $\varphi(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости, чем функция $\psi(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$.

Определение 3. Функция $\varphi(x)$ называется бесконечно малой более низкого порядка малости, чем $\psi(x)$, при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty$.

Определение 4. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются несравнимыми бесконечно малыми при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ не существует и не равен ∞^* .

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Функция $y = x^2$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ более высокого порядка малости, чем функция $y = 5x$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{5x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. При приближении x к нулю функция $y = x^2$ стремится к нулю быстрее, чем функция $y = 5x$.

Пример 2. Функции $y = x^2 - 4$ и $y = x^2 - 5x + 6$ являются бесконечно малыми одного порядка малости при $x \rightarrow 2$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4 \neq 0.$$

Пример 3. Функции $\varphi(x) = \frac{\cos x}{x}$ и $\psi(x) = \frac{1}{x}$ являются несравнимыми бесконечно малыми при $x \rightarrow +\infty$, так как при $x \rightarrow +\infty$ не существует предела их отношения $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \cos x$.

Введем теперь понятие эквивалентных бесконечно малых функций.

Определение. Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, бесконечно малые при $x \rightarrow +\infty$, называются эквивалентными (или равносильными), если предел их отношения при $x \rightarrow +\infty$ равен единице*.

Из определения следует, что эквивалентные бесконечно малые функции имеют одинаковый порядок малости.

Например, функции x , $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ являются попарно эквивалентными бесконечно малыми функциями при $x \rightarrow 0$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ (см. п. 7).

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — эквивалентные бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$. Тогда для значений x , близких к x_0 , имеет место приближенное равенство $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \approx 1$, или $\varphi(x) \approx \psi(x)$, точность которого возрастает с приближением x к x_0 .

* Аналогичные определения вводятся при $x \rightarrow -\infty$, при $x \rightarrow x_0$ справа и слева, а также при $x \rightarrow x_0$.

Так как $\sin x$ и x — эквивалентные бесконечно малые при $x \rightarrow 0$, то для x , близких к нулю, $\sin x \approx x$. Этим обстоятельством широко пользуются, заменяя при малых x $\sin x$ аргументом x .

Так, например, при $x = 0,1$ радиана $\sin x = \sin 0,1 = 0,0998$.

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — эквивалентные бесконечно малые функции, то это обозначают так: $\varphi(x) \sim \psi(x)$.

Докажем следующую теорему об эквивалентных бесконечно малых функциях.

Теорема 1. Пусть $\varphi(x) \sim \varphi_1(x)$ и $\psi(x) \sim \psi_1(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Если существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, то существует и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$, и оба эти предела равны между собой*.

Кратко эта теорема формулируется следующим образом: *предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} \cdot \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} \cdot \frac{\psi_1(x)}{\psi(x)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi_1(x)}{\psi(x)} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}. \end{aligned}$$

Доказанная теорема позволяет во многих случаях упрощать отыскание предела.

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Решение. Так как $\sin 5x \sim 5x$, $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

В заключение этого параграфа приведем признак эквивалентности двух бесконечно малых функций.

Теорема 2. Бесконечно малые функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — бесконечно малые функции, например, при $x \rightarrow +\infty$; обозначим их разность через $\beta(x)$.

1. Покажем, что, если $\varphi(x) \sim \psi(x)$, то $\beta(x)$ — бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, т. е.

$$\text{что } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta(x)}{\varphi(x)} = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta(x)}{\psi(x)} = 0.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \right] = \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

* См. сноску на стр. 189.

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta(x)}{\psi(x)} = 0.$$

2. Пусть обратно, $\beta(x)$ — бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Докажем, что $\varphi(x) \sim \psi(x)$, т. е. что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$.

Действительно, так как $\beta(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, то $\varphi(x) = \beta(x) + \psi(x)$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta(x) + \psi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta(x)}{\psi(x)} + 1 = 0 + 1 = 1,$$

так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta(x)}{\psi(x)}$ по условию равен нулю.

Теорема 3. Сумма конечного числа бесконечно малых функций различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Доказательство. Рассмотрим для определенности сумму трех бесконечно малых функций при $x \rightarrow +\infty$: $F(x) = f(x) + \varphi(x) + g(x)$. Пусть, например, $f(x)$ — бесконечно малая функция низшего порядка малости, чем остальные слагаемые. Это значит, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x) + \varphi(x) + g(x)}{f(x)} \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \\ &+ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 + 0 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, сумма $f(x) + \varphi(x) + g(x)$ — бесконечно малая функция, эквивалентная функции $f(x)$.

Пример 5. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + 6x^3}{\sin x + \operatorname{tg}^3 x}.$$

Решение. Так как при $x \rightarrow 0$ по теореме 3 $5x + 6x^3 \sim 5x$, а $\sin x + \operatorname{tg}^3 x \sim \sin x$, то, применяя теорему 1, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + 6x^3}{\sin x + \operatorname{tg}^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin x} = 5.$$

§ 2. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва

Представление о непрерывности функции интуитивно связано у нас с тем, что ее графиком является плавная, нигде не прерывающаяся линия. При рассмотрении графика такой функции $y = f(x)$ мы видим, что близким значениям аргумента соответствуют близкие

значения функции; если независимая переменная x приближается к точке x_0 , то значение функции $y = f(x)$ неограниченно приближается к значению функции в точке x_0 (рис. 114).

Дадим теперь строгое определение непрерывности функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если:

1) функция определена в точке x_0 и в некоторой окрестности, содержащей эту точку;

2) функция имеет предел при $x \rightarrow x_0$;

3) предел функции при $x \rightarrow x_0$ равен значению функции в точке x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (22)$$

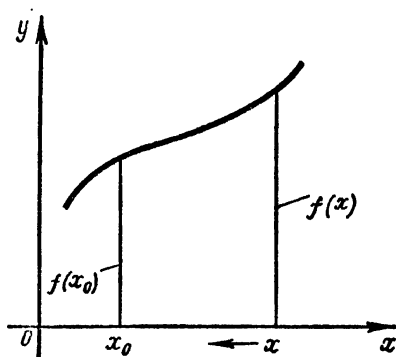


Рис. 114

Если в точке x_0 функция непрерывна, то точка x_0 называется *точкой непрерывности* данной функции.

Замечание 1. Формулу (22) можно записать в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x), \quad (23)$$

так как $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$. Формула (23) означает, что при нахождении предела непрерывной функции можно переходить к пределу под знаком функции.

Замечание 2. Часто приходится рассматривать непрерывность функции в точке x_0 справа или слева (т. е. одностороннюю непрерывность). Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 . Если $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа; если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной в точке x_0 слева.

Введем теперь понятие точки разрыва.

Определение. Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* $y = f(x)$, если она принадлежит области определения функции или ее границе и не является точкой непрерывности*.

В этом случае говорят, что при $x = x_0$ функция разрывна. Это может произойти, если в точке x_0 функция не определена, или не существует предел функции при $x \rightarrow x_0$, или, наконец, если предел

* Точка x_0 называется *граничной точкой* области определения функции, если любая окрестность этой точки содержит как точки области определения функции, так и точки, не принадлежащие области определения. Совокупность всех граничных точек называется *границей* области. Так, например, для функции $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ областью определения является интервал $(-1, 1)$, а ее граница состоит из двух точек $x = -1$ и $x = 1$.

функции существует, но не равен значению функции в точке x_0 :
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = 5x^3$. Докажем, что она непрерывна в точке $x = 2$. Для этого надо показать, что в точке $x = 2$ выполнены все три условия, входящие в определение непрерывной функции, т. е. что: 1) функция определена в точке $x = 2$ и в некоторой ее окрестности; 2) существует $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ и 3) этот предел

равен значению функции в точке $x = 2$. Так как функция $f(x) = 5x^3$ определена на всей числовой оси, то первое условие автоматически выполняется. Далее, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 5x^3 = 40$. Итак, второе условие выполнено. За-

мечая, наконец, что $f(2) = 40$, мы видим, что $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$,

т. е. и третье условие, определяющее непрерывность функции в точке $x = 2$, выполнено. Таким образом, функция $y = 5x^3$ непрерывна в точке $x = 2$. Аналогично можно показать, что эта функция непрерывна в любой точке числовой оси.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } 0 \leq x < 3; \\ 3-x, & \text{если } 3 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

приведенную в примере 2, § 1, п. 3. Эта функция определена во всех точках сегмента $[0, 4]$ и ее значение при $x = 3$ равно 0

(см. график функции на рис. 109). Однако в точке $x = 3$ функция имеет разрыв, так как она не имеет предела при $x \rightarrow 3$: $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = 2$,

а $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = 0$. Следует заметить, что функция $f(x)$ непрерывна во всех точках сегмента $[0, 4]$, за исключением точки $x = 3$. При этом в точке $x = 0$ она непрерывна справа, а в точке $x = 4$ — непрерывна слева (см. замечание 2 на стр. 192), так как

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+0} (x-1) = f(0) = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4-0} (3-x) = f(4) = -1. \end{aligned}$$

Пример 3. Функции $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x^2}$ (рис. 115) разрывны в граничной точке области определения $x = 0$, так как они не определены

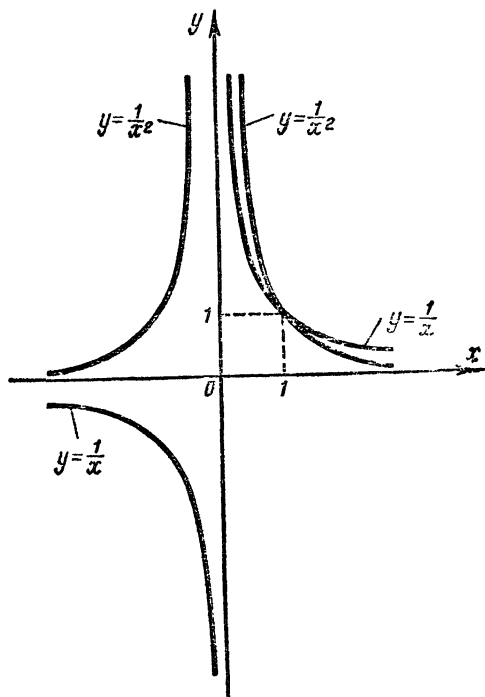


Рис. 115

в этой точке. Функции $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ являются бесконечно большими функциями при $x \rightarrow 0$. Поэтому часто говорят, что в точке $x=0$ функции $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ имеют бесконечный разрыв.

Пример 4. Функция $y = \log_a x$ ($a > 1$) имеет в граничной точке области определения $x=0$ бесконечный разрыв, так как в этой точке функция не определена и так как $\lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x = -\infty$ (см. рис. 24).

Точки разрыва функции можно разбить на два типа.

Определение. Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется точкой разрыва первого рода, если существуют оба односторонних предела $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$. Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется точкой разрыва второго рода.

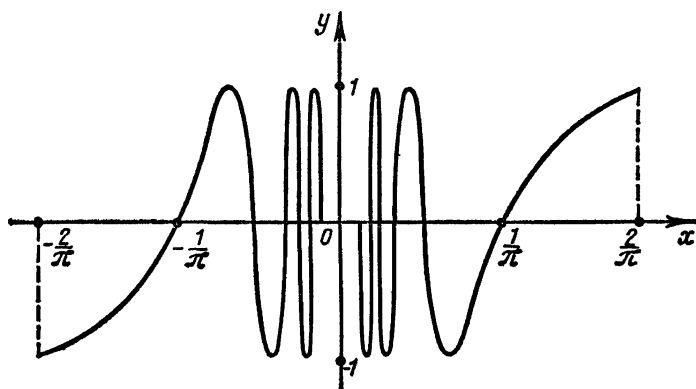


Рис. 116

Функция $f(x)$, приведенная в примере 2, имеет в точке $x=3$ разрыв первого рода, так как для нее существуют пределы при $x \rightarrow 3$ справа и слева.

Функции $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x^2}$, рассмотренные в примере 3, в точке $x=0$ имеют разрыв второго рода, так как эти функции при $x \rightarrow 0$ не имеют предела ни слева, ни справа.

Пример 5. Функция $y = \sin \frac{1}{x}$ определена для всех значений x , кроме $x=0$. В этой точке она имеет разрыв. Точка $x=0$ есть точка разрыва второго рода, так как при $x \rightarrow 0$ как справа, так и слева, функция $\sin \frac{1}{x}$, колеблясь между -1 и $+1$, не приближается ни к какому числовому значению. График ее приведен на рис. 116.

Пример 6. Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x=0$. Точка $x=0$ является точкой разрыва первого рода, так как при $x \rightarrow 0$

существуют пределы справа и слева:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если доопределить функцию $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$, полагая $f(0)=1$, то получим уже непрерывную функцию, определенную так:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \text{ если } x \neq 0; f(0) = 1.$$

Доопределив функцию в точке $x=0$, мы устранили разрыв. Точка x_0 разрыва первого рода, в которой $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, называется *точкой устранимого разрыва*.

В заключение этого пункта отметим одно свойство функции, непрерывной в точке. Если непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в точке x_0 положительное (отрицательное) значение, то она остается положительной (отрицательной) во всех точках некоторой окрестности точки x_0 .

В самом деле, пусть $f(x_0) > 0$. Возьмем такое $\varepsilon > 0$, что $f(x_0) - \varepsilon > 0$. Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (в силу непрерывности функции в точке x_0), то на основании определения предела функции при $x \rightarrow x_0$ (см. стр. 167) найдутся такие числа M и N ($N < x_0 < M$), что для всех точек интервала (N, M) выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ или $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Но так как $f(x_0) - \varepsilon > 0$, то и $f(x) > 0$ для всех точек интервала (N, M) . Итак, функция $f(x)$ положительна в некоторой окрестности точки x_0 .

2. Операции над непрерывными функциями. Непрерывность элементарных функций

Если над непрерывными функциями производить операции сложения, умножения и деления, то в результате будем получать непрерывные функции. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в точке x_0 , то их сумма и произведение также непрерывны в точке x_0 . Если, кроме того, $\psi(x_0) \neq 0$, то функция $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Докажем, например, непрерывность произведения $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$. В точке x_0 функция $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ определена, причем $f(x_0) = \varphi(x_0) \cdot \psi(x_0)$. Из непрерывности функций в точке x_0 следует: $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \psi(x_0)$. Применяя теорему о пределе произведения, получим:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [\varphi(x) \cdot \psi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \varphi(x_0) \cdot \psi(x_0).$$

Итак, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, что и доказывает непрерывность функции $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ в точке x_0 . Аналогично доказываются остальные утверждения.

дения теоремы. Теорема обобщается на любое конечное число слагаемых или сомножителей.

Установим непрерывность некоторых элементарных функций.

Ясно, что постоянная функция $y=C$ непрерывна на всей числовой оси. Легко показать, что функция $y=x$ также непрерывна во всей области ее определения, т. е. на всей числовой оси. Поэтому функция $y=Cx^n$, где n —целое положительное число, непрерывна на всей числовой оси, как произведение непрерывных функций $y=C$ и $y=x$:

$$Cx^n = C \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ множителей}}$$

Многочлен

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

— непрерывная функция на всей числовой оси, как сумма непрерывных функций. Далее, рациональная функция, являющаяся частным от деления двух многочленов, по теореме 1 непрерывна во всех точках, кроме тех, где знаменатель обращается в нуль. Так, например, функция $y = \frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 - 1}$ непрерывна во всех точках числовой оси, за исключением точек $x = -1$ и $x = 1$. Вообще можно доказать, что *все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x , для которых они определены.*

В гл. I мы ввели понятие сложной функции. Напомним, что если аргумент u функции $y=f(u)$ в свою очередь является функцией некоторой новой переменной x , т. е. $u=\varphi(x)$, то такую функцию мы назвали сложной и обозначили $y=f[\varphi(x)]$ (гл. I, § 4, п. 6).

Имеет место следующая теорема о непрерывности сложной функции.

Теорема 2. *Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0 .*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f[\varphi(x_0)]$. Действительно, в силу непрерывности функции $u=\varphi(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0,$$

т. е. при $x \rightarrow x_0$ также и $u \rightarrow u_0$.

Поэтому, вследствие непрерывности функции $f(u)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) = f[\varphi(x_0)].$$

Приведем краткую формулировку доказанной теоремы.

Сложная функция $y=f[\varphi(x)]$, образованная из двух непрерывных функций $f(u)$ и $\varphi(x)$, есть непрерывная функция.

Так, например, сложная функция $y=\sin(x^3+4x-2)$ непрерывна для всех значений x , так как функции $y=\sin u$ и $u=x^3+4x-2$ непрерывны. Сложная функция $y=\ln(1-x^2)$ непрерывна для всех

значений x , удовлетворяющих неравенству $1 - x^2 > 0$, т. е. в интервале $(-1, 1)$.

Как мы знаем (см. гл. I, § 4, п. 6), элементарной функцией называется такая функция, которую можно задать одним аналитическим выражением, составленным из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа образования сложных функций. Так как основные элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены, то из теорем 1 и 2 настоящего пункта следует: *всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих ее области определения.*

Этот важный результат позволяет легко находить пределы элементарных функций при $x \rightarrow x_0$, если функция определена при $x = x_0$. Для этого достаточно вычислить значение функции в точке x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0). \quad (24)$$

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 5^{\operatorname{tg} x}$.

Решение. Так как функция $5^{\operatorname{tg} x}$ непрерывна в точке $x = \frac{\pi}{4}$, то $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 5^{\operatorname{tg} x} = 5^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = 5^1 = 5$.

В заключение этого пункта рассмотрим два предела, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$.

Решение. Заметим, что при $x \rightarrow 0$ числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x) = \log_a(1+0) = 0$. Поэтому здесь теорема о пределе дроби неприменима. Выполним следующее преобразование:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \log_a(1+x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Так как логарифмическая функция непрерывна, то мы можем переходить к пределу под знаком функции, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right].$$

Но $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (см. § 1, п. 8, пример 2). Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e. \quad (25)$$

В частности, при $a = e$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (25')$$

Таким образом, $y = \ln(1+x)$ и $y = x$ — эквивалентные бесконечно малые функции при $x \rightarrow 0$.

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$.

Решение. Здесь мы имеем дело с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. Для нахождения предела сделаем замену переменной, положив $a^x - 1 = t$. Тогда $x = \log_a(t + 1)$. Замечая, что при $x \rightarrow 0$ также и $t \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_a(t + 1)}{t}} = \\ &= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(t + 1)}{t}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a, \end{aligned}$$

так как на основании примера 2 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(t + 1)}{t} = \log_a e$.

В частности, отсюда следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1,$$

т. е. при $x \rightarrow 0$ $y = e^x - 1$ и $y = x$ — эквивалентные бесконечно малые функции.

3. Свойства функций, непрерывных на сегменте

В этом пункте мы дадим некоторые свойства непрерывных функций; при этом, как правило, ограничимся только формулировками и некоторыми пояснениями, не проводя доказательств.

Прежде всего введем следующее определение.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках этого сегмента, а на концах сегмента, т. е. в точках a и b , непрерывна соответственно справа и слева*.

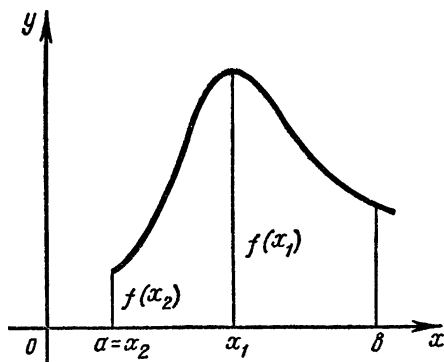


Рис. 117

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она достигает на этом сегменте своего наибольшего и наименьшего значений.

Эта теорема утверждает, что на сегменте $[a, b]$ найдется такая точка x_1 , что значение функции $f(x)$ в этой точке будет наибольшим из всех значений функции

на сегменте: $f(x) \leq f(x_1)$. Аналогично, на сегменте найдется такая точка x_2 , в которой значение функции будет наименьшим из всех значений функции на сегменте: $f(x) \geq f(x_2)$ (рис. 117).

* Т. е. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$ (см. замечание 2 на стр. 192).

Замечание. Утверждение теоремы, вообще говоря, делается неверным, если заменить в формулировке теоремы сегмент интервалом (a, b) . Так, например, функция $y = 5x$, непрерывная на интервале $(0, 1)$, не достигает на этом интервале наибольшего значения. Она принимает значение сколь угодно близкое к 5, однако на интервале $(0, 1)$ нет точки, в которой функция равнялась бы 5 (точка $x = 1$ не принадлежит интервалу). Эта функция не принимает и наименьшего значения на интервале $(0, 1)$. Точно так же заключение теоремы перестает быть, вообще говоря, справедливым, если функция, будучи определенной на сегменте, терпит разрыв в какой-либо точке сегмента.

Следствие из теоремы 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте.

Доказательство. Обозначим через M и m соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Тогда для любого x , принадлежащего сегменту, имеют место неравенства $m \leq f(x) \leq M$.

Пусть C — наибольшее из чисел $|m|, |M|$. Тогда $|f(x)| \leq C$. А это значит (см. § 1, п. 4), что функция $y = f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$.

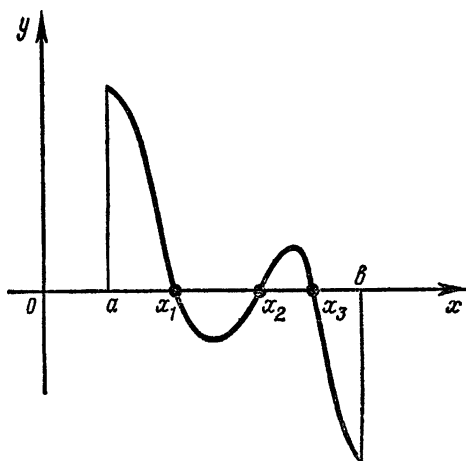


Рис 118

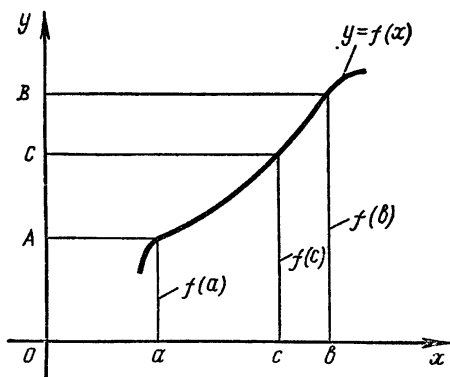


Рис. 119

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого сегмента найдется по крайней мере одна точка, в которой функция равна нулю.

Геометрический смысл теоремы заключается в следующем: если точки графика функции $y = f(x)$, соответствующие концам сегмента $[a, b]$, лежат по разные стороны от оси Ox , то этот график хотя бы в одной точке сегмента пересекает ось Ox . Для функции, график которой представлен на рис. 118, таких точек три: x_1, x_2 , и x_3 .

Эта теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 3 (теорема о промежуточных значениях). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $f(a) = A, f(b) = B$. Тогда

для любого числа C , заключенного между A и B , найдется внутри этого сегмента такая точка c , что $f(c) = C$.

Эта теорема геометрически очевидна. Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 119). Пусть $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда прямая $y = C$, где C — любое число, заключенное между A и B , пересечет график функции по крайней мере в одной точке.

Таким образом, непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно проходит через все промежуточные значения.

Замечание. Если функция на сегменте имеет хотя бы одну точку разрыва, то утверждения теорем 2 и 3 перестают быть верными. Так, например, функция $y = \frac{1}{x}$ положительна при $x = 1$ и отрицательна при $x = -1$. Однако на сегменте $[-1, 1]$ нет точки, в которой она обращается в нуль. Это объясняется тем, что на сегменте $[-1, 1]$ имеется точка разрыва функции $y = \frac{1}{x}$ (см. рис. 115).

4. Понятие об обратной функции

Начнем с примера. Рассмотрим функцию $y = x^3$, график которой представлен на рис. 19. Будем рассматривать равенство $y = x^3$ как уравнение относительно x . Это уравнение для каждого значения y ($-\infty < y < +\infty$) определяет *единственное* значение x : $x = \sqrt[3]{y}$. Геометрически это значит, что всякая прямая, параллельная оси Ox ,

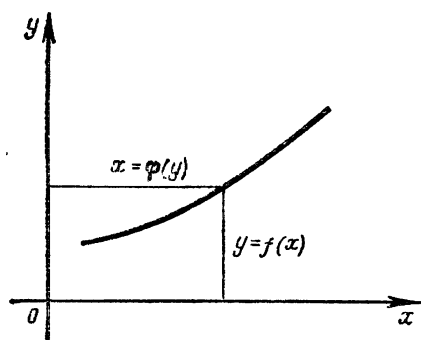


Рис. 120

пересекает график функции $y = x^3$ только в одной точке (см. рис. 19). Поэтому мы можем рассматривать x как функцию от y . Функция $x = \sqrt[3]{y}$ называется *обратной* по отношению к функции $y = x^3$.

Перейдем теперь к общему случаю. Рассмотрим непрерывную функцию $y = f(x)$, заданную на сегменте или на интервале. Если функция такова, что всякая прямая, проведенная параллельно оси Ox , пересекает ее график только в одной точке (рис. 120), т. е. что уравнение $y = f(x)$ для каждого y (взятого из области значений функции $y = f(x)$) определяет единственное значение x , то мы можем сказать, что x есть некоторая функция от y : $x = \varphi(y)$, которая называется *обратной по отношению к данной функции* $y = f(x)$ (см. рис. 120). Очевидно, что для функции $x = \varphi(y)$ обратной является функция $y = f(x)$. Поэтому обе эти функции называются *взаимно обратными*.

Данная функция $y = f(x)$ и ее обратная функция $x = \varphi(y)$ выражают одну и ту же связь между переменными x и y . Но в первом случае мы рассматриваем x как независимую переменную, а y как функцию; во втором случае — наоборот: y мы считаем независимой переменной, а x — функцией. Таким образом, одна и та же линия

служит графиком для данной функции $y=f(x)$ и для обратной функции $x=\varphi(y)$. Однако, если для данной функции ось Ox является осью независимой переменной, то для обратной функции $x=\varphi(y)$ осью независимой переменной является ось Oy .

Заметим, что некоторые функции не имеют обратных. Например, функция $y=x^2$, если ее рассматривать на всей числовой оси, не имеет обратной функции, так как каждому значению $y > 0$ соответствуют два значения $x: x=\sqrt{y}$ и $x=-\sqrt{y}$. Если функцию $y=x^2$ рассматривать на интервале $0 \leq x < +\infty$, то она имеет обратную функцию $x=\sqrt{y}$, так как каждому значению y соответствует единственное значение x ($0 \leq x < +\infty$), удовлетворяющее уравнению $y=x^2$.

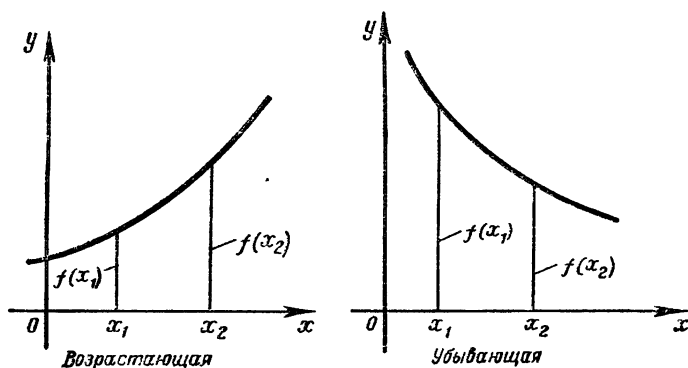


Рис. 121

Если же функцию $y=x^2$ рассматривать на интервале $(-\infty < x \leq 0)$, то мы приходим к другой обратной функции $x=-\sqrt{y}$. Естественно, возникает вопрос: какова должна быть функция $y=f(x)$, чтобы она имела обратную функцию, т. е. чтобы ее график пересекался прямой, параллельной оси Ox , только в одной точке?

Прежде чем ответить на этот вопрос, введем понятие возрастающей и убывающей функций. Пусть функция $y=f(x)$ определена на сегменте (или интервале).

Определение. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на некотором сегменте (или интервале), если больши́м значениям независимой переменной (из этого сегмента или интервала) соответствуют больши́е значения функции, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на некотором сегменте (или интервале), если больши́м значениям независимой переменной соответствуют меньши́е значения функции, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

На рис. 121 приведены графики возрастающей и убывающей функций. Например, функция $y=x^3$ является возрастающей на всей числовой оси; функция $y=x^2$ возрастает при $0 \leq x < +\infty$, убывает при $-\infty < x \leq 0$.

Если функция $y=f(x)$, заданная на интервале (или сегменте), является только возрастающей или только убывающей на этом

интервале (или сегменте), то она называется *монотонной* на интервале (или сегменте).

На рис. 121 непосредственно видно, что каждая прямая, параллельная оси Ox , пересекает график монотонной функции в одной точке, т. е. каждому значению y соответствует единственное значение x , и, следовательно, функция $y=f(x)$ имеет обратную. Можно показать, что если функция $y=f(x)$ непрерывна, то и обратная функция $x=\varphi(y)$ непрерывна.

Приведем без доказательства теорему существования обратной функции.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и возрастает (или убывает) на этом сегменте, то обратная функция $x=\varphi(y)$, которая определена на соответствующем сег-

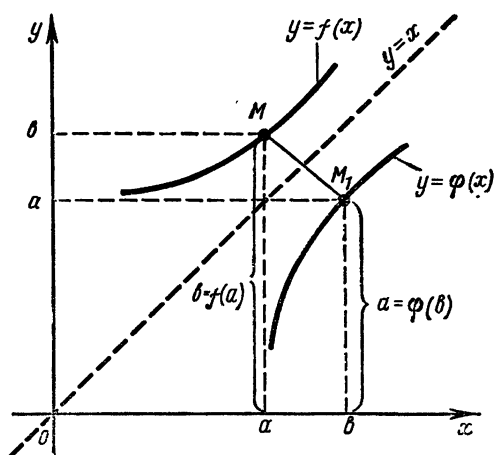


Рис. 122

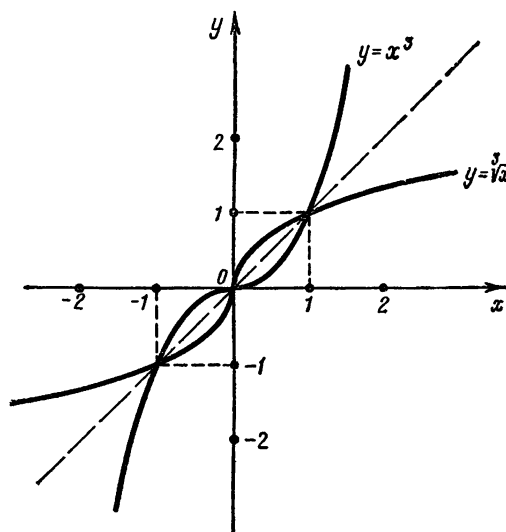


Рис. 123

менте оси Oy , существует и является также непрерывной возрастающей (убывающей) функцией.

Практически, чтобы найти для функции $y=f(x)$, заданной с помощью формулы, обратную ей функцию $x=\varphi(y)$, нужно уравнение $y=f(x)$ разрешить, если это возможно, относительно x . Так, например, разрешая, относительно x уравнение $y=\frac{2x+3}{x-5}$, получим функцию $x=\frac{5y+3}{y-2}$, обратную данной.

В заключение сделаем одно важное замечание.

Пусть функция $x=\varphi(y)$ является обратной по отношению к функции $y=f(x)$. Возвращаясь к обычным обозначениям независимой переменной через x , а функции через y , мы можем эту обратную функцию записать в виде $y=\varphi(x)$. Так, например, обратной функцией для $y=x^3$ будет функция $x=\sqrt[3]{y}$, или, меняя обозначения переменных, $y=\sqrt[3]{x}$.

График обратной функции $y = \varphi(x)$ симметричен с графиком данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы I и III координатных углов. В этом легко убедиться, рассматривая рис. 122.

На рис. 123 представлены графики функции $y = x^3$ и обратной функции $y = \sqrt[3]{x}$.

5. Обратные тригонометрические функции

1. Функция $y = \arcsin x$. Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Если рассматривать эту функцию на всей числовой оси ($-\infty < x < +\infty$), то она не имеет обратной, так как одному значению y ($-1 \leq y \leq 1$)

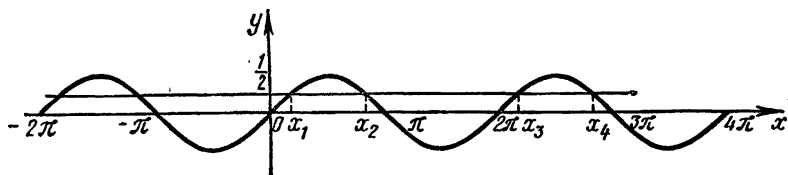


Рис. 124

соответствует бесконечное множество значений x : $x_1, x_2, x_3, \dots$. Например, если $y = \frac{1}{2}$, то $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6}$, $x_3 = 2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots$ (рис. 124). Если же функцию $y = \sin x$ рассматривать только на сегменте

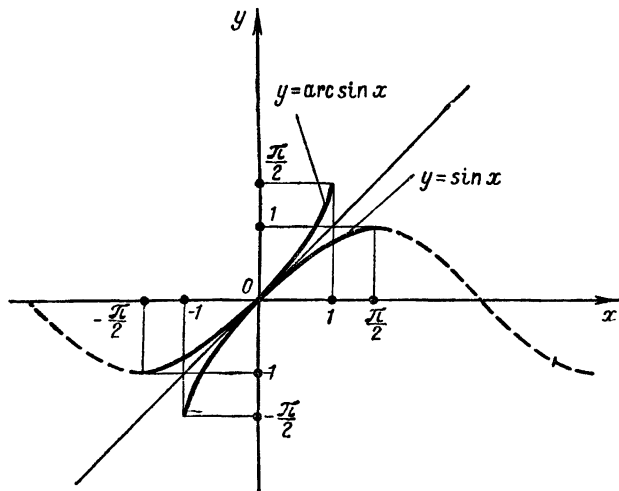


Рис. 125

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, то на нем функция $y = \sin x$ является возрастающей и, следовательно, имеет обратную функцию, которую принято обозначать $x = \arcsin y$. Если независимую переменную обозначим через x , функцию через y , то получим $y = \arcsin x$. График этой функции,

изображенной на рис. 125, симметричен относительно прямой $y = x$ графику функции $y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$).

Функция $y = \arcsin x$ определена на сегменте $[-1, 1]$ и принимает значения, пробегающие сегмент $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

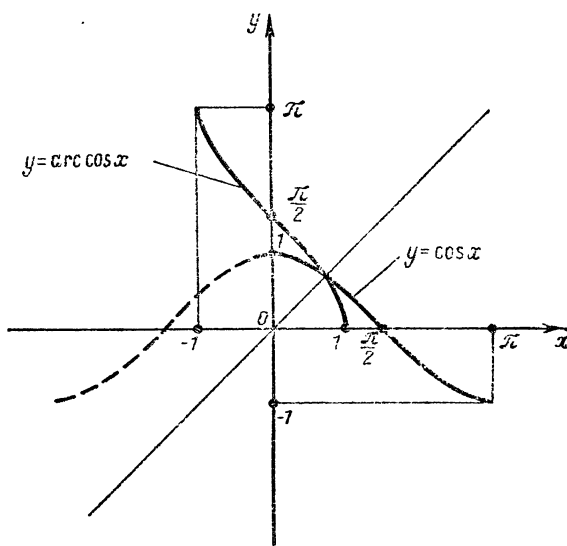


Рис. 126

2. Функция $y = \arccos x$. Функция $y = \arccos x$ определяется как обратная по отношению к функции $y = \cos x$, если последнюю рассматривать на сегменте $[0, \pi]$. На этом сегменте функция $y = \cos x$ убывает.

Функция $y = \arccos x$ определена на сегменте $[-1, 1]$, а ее значения пробегают сегмент $[0, \pi]$. График функции $y = \arccos x$ представлен на рис. 126.

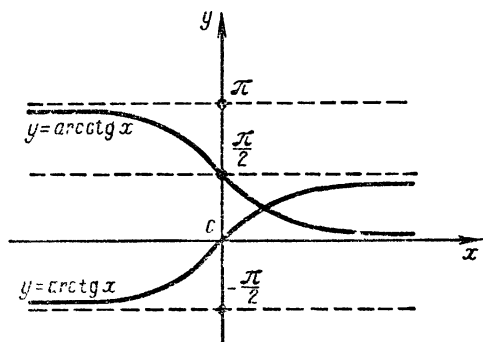


Рис. 127

3. Функция $y = \arctg x$. Функция $y = \arctg x$ определяется как обратная по отношению к функции $y = \tg x$, если эту последнюю рассматривать для всех значений x , лежащих между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. На рис. 127 представлен график функции $y = \arctg x$.

Функция $y = \arctg x$ определена на всей числовой прямой, а ее значения пробегают интервал

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; при этом $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 127).

4. Функция $y = \operatorname{arccotg} x$. Функция $y = \operatorname{arccotg} x$ определяется как обратная по отношению к функции $y = \operatorname{ctg} x$, если эту последнюю

рассматривать на интервале $(0, \pi)$. График функции $y = \operatorname{arcsctg} x$ представлен на рис. 127.

Функция $y = \operatorname{arcsctg} x$ определена на всей числовой прямой, причем $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcsctg} x = \pi$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcsctg} x = 0$ (см. рис. 127).

Функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcsctg} x$ называются *обратными тригонометрическими функциями*. Все они непрерывны в каждой точке области определения, как обратные функции от непрерывных функций соответственно $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

6. Показательная и логарифмическая функции

Как мы знаем (см. гл. I, § 4, п. 5) показательной функцией называется функция $y = a^x$ (основание a считаем положительным и не равным 1). При любом значении x $y = a^x > 0$. Поэтому график показательной функции расположен выше оси Ox . Если $a > 1$, то функция $y = a^x$ возрастающая, если $a < 1$ — убывающая. Графики показательных функций изображены на рис. 23. Если основание $a > 1$, то, как видно из рис. 23, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, а $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является функцией, обратной по отношению к показательной функции $y = a^x$. График логарифмической функции $y = \log_a x$ представлен на рис. 24. Как непосредственно видно из рисунка, функция $y = \log_a x$ определена для всех положительных значений x . Кроме того, если $a > 1$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x = -\infty, \quad \text{а} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty.$$

Если основание $a = e$, то функция $y = \ln x$ является обратной по отношению к показательной функции $y = e^x$. Заметим в заключение, что из определения логарифмической функции, как обратной к показательной, следует, что $a^{\log_a x} \equiv x$.

7. Понятие о гиперболических функциях

В математике и ее приложениях рассматриваются гиперболические функции, а именно — гиперболический синус $\operatorname{sh} x$, гиперболический косинус $\operatorname{ch} x$, гиперболический тангенс $\operatorname{th} x$ и гиперболический котангенс $\operatorname{cth} x$. Эти функции определяются следующими формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad (26)$$

где e — основание натуральных логарифмов.

Между гиперболическими функциями существуют следующие основные зависимости, которые легко проверяются с помощью формул (26):

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}. \quad (27)$$

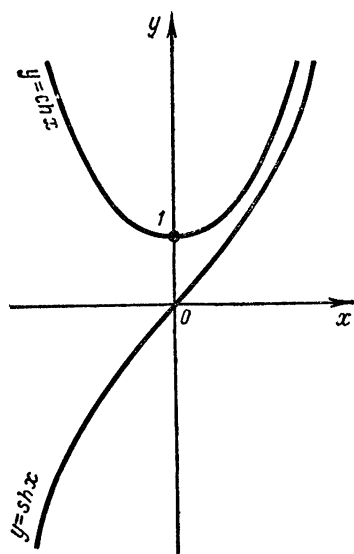


Рис. 128

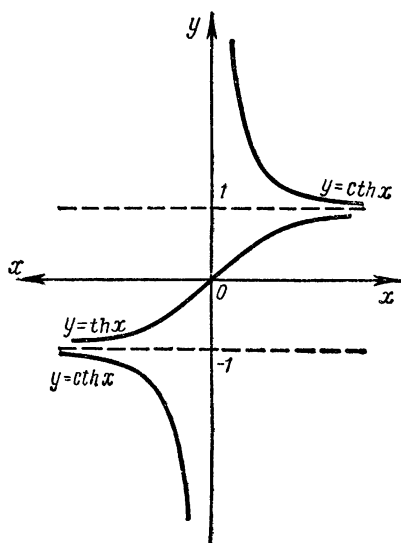


Рис. 129

Графики гиперболических функций приведены на рис. 128, 129. График функции $y = \cosh x$ называется *цепной линией*.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. ПРОИЗВОДНАЯ

1. Приращение аргумента и приращение функции

Пусть дана функция $y = f(x)$. Рассмотрим два значения ее аргумента: исходное x_0 и новое x .

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента x в точке x_0* (кратко — приращением аргумента) и обозначается символом Δx (читается: «дельта икс»).

Аналогично, разность $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0* (кратко — приращением функции) и обозначается символом Δy (читается: «дельта игрек»)*. Величины Δx и Δy показаны на рис. 130.

Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0, \quad (1)$$

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0), \quad (2)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x, \\ y &= y_0 + \Delta y. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Подставляя в формулу (2) выражение для x из формулы (3), получим

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (4)$$

Как правило, в тех случаях, когда вводятся Δx и Δy , исходное значение аргумента x_0 считается фиксированным, а новое значение x — переменным. Тогда $y_0 = f(x_0)$ оказывается постоянной, $y = f(x)$ — переменной. Приращения Δy и Δx также будут переменными. Формула (4) показывает, что переменная Δy является функцией переменной Δx .

Пример 1. Для функции $y = x^2$ в точке x_0 найти приращение функции Δy , соответствующее приращению аргумента Δx .

Решение. По формуле (4)

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + \Delta x^2.$$

* Δx нельзя рассматривать как произведение Δ на x , это — единый символ. То же самое относится к Δy .

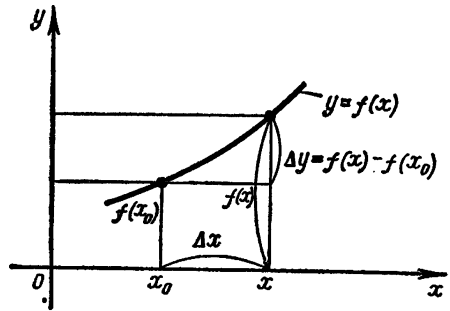


Рис. 130

Пример 2. Найти приращение Δy функции $y = x^3$ при переходе аргумента из точки $x_0 = 1$ в точку $x = 1,1$.

Решение. По формуле (2)

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = (1,1)^3 - 1^3 = 0,331.$$

2. Определение непрерывности функции с помощью понятий приращения аргумента и приращения функции

В гл. V (§ 2, п. 1) было дано определение непрерывности функции, согласно которому функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (5)$$

При этом предполагалось, что функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности.

Это определение можно сформулировать, пользуясь понятиями приращения функции и приращения аргумента. Действительно, формула (5), очевидно, равносильна равенству

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \quad (5')$$

Полагая $x - x_0 = \Delta x$ и $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ и замечая, что при $x \rightarrow x_0$ $\Delta x \rightarrow 0$ (и, обратно, при $\Delta x \rightarrow 0$ $x \rightarrow x_0$), вместо соотношения (5') мы получим следующую формулу, равносильную формуле (5):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (6)$$

Иными словами, *функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy .*

Замечание. Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ терпит разрыв, то при $\Delta x \rightarrow 0$ Δy либо стремится к пределу, отличному от нуля, либо не имеет предела.

3. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача о скорости. Пусть материальная точка движется по прямой в одном направлении по закону

$$s = f(t), \quad (7)$$

где t — время, а s — путь, проходимый точкой за время t . Отметим некоторый момент времени t_0 . К этому моменту точка прошла путь $s_0 = f(t_0)$. Поставим задачу определить скорость v_0 материальной точки в момент t_0 .

Рассмотрим для этого какой-нибудь другой момент времени $t_0 + \Delta t$. Ему соответствует пройденный путь $s = f(t_0 + \Delta t)$. Тогда за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ точка прошла путь

$$\Delta s = s - s_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$$

(рис. 131). Средняя скорость движения $v_{\text{ср}}$ за промежуток времени Δt определяется отношением

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

пройденного пути ко времени. Будем считать начальный момент времени t_0 фиксированным, а промежуток времени Δt — переменным. Тогда средняя скорость $v_{\text{ср}}$ будет переменной величиной, зависящей от Δt .

Скоростью v_0 в данный момент t_0 называется предел средней скорости $v_{\text{ср}}$ при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (8)$$

или

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}. \quad (9)$$

Таким образом, для того чтобы найти скорость v_0 в данный момент t_0 , необходимо вычислить

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}. \quad (10)$$

Задача о плотности стержня. Рассмотрим еще одну задачу, при решении которой придется находить такого же рода предел. Пусть дан тонкий прямолинейный неоднородный стержень длиной l . Определим плотность стержня в любой его точке. Предположим, что стержень расположен на оси Ox , причем один из его концов совпадает с началом координат. Тогда каждой точке стержня соответствует определенная координата x .

Обозначим через m массу отрезка стержня между точками с координатами 0 и x . Ясно, что m является функцией x : $m = f(x)$. Рассмотрим две точки стержня: фиксированную точку x_0 и переменную точку $x_0 + \Delta x$. Отрезок стержня, расположенный между этими точками, имеет длину Δx и массу $\Delta m = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ называется средней плотностью стержня на отрезке от точки x_0 до точки $x_0 + \Delta x$.

Плотностью δ стержня в точке x_0 называется предел средней плотности, когда длина отрезка Δx стремится к нулю:

$$\delta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (11)$$

Рассмотренные задачи, несмотря на их различное физическое содержание, привели нас к нахождению предела одного и того же вида — пределу отношения приращения функции к приращению аргумента. К нахождению предела подобного вида приводят многочисленные задачи из различных областей естествознания. Поэтому целесообразно изучить подробнее указанный предел и показать способы его нахождения.

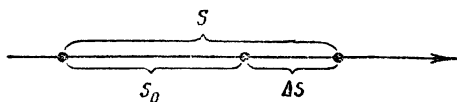


Рис. 131

4. Определение производной и ее механический смысл

Определение. Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю.

Производная функция $y=f(x)$ в точке x_0 обозначается символом $f'(x_0)$.

Итак, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (12)$$

или

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (13)$$

Для одной и той же функции $y=f(x)$ производная в различных точках x может принимать различные значения. Другими словами, производную можно рассматривать как функцию аргумента x . Эта функция называется производной от функции $f(x)$ и обозначается $f'(x)$ (читается: «эф штрих от x »)*.

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 является значением функции $f'(x)$ в точке x_0 .

Наряду с обозначением $f'(x)$ для производной функции употребляются и другие обозначения, например: y' , y'_x , $[f(x)]'_x$.

Пример 1. Найти производную функции $y=x^2$.

Решение. Находим приращение функции Δy :

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Пользуясь определением производной и считая x фиксированным, получим

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, производная функции x^2 равна $2x$: $(x^2)' = 2x$. Эта производная определена на всей числовой оси, так как при ее нахождении значение x было выбрано произвольно.

Пример 2. Найти производную функции $y=x^2$ в точке $x=2$.

Решение. Подставляя в общее выражение для производной данной функции вместо x число 2, получим

$$(x^2)'|_{x=2} = 2x|_{x=2} = 4.$$

Нахождение производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Возвращаясь к задачам, рассмотренным в п. 3, легко заметить, что каждый из пределов, которые там были получены, есть производная.

* Иногда для определенности производную функции $y=f(x)$ мы будем называть производной функции y по x , или производной функции f по x .

В первой задаче

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'_t,$$

т. е. скорость v прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t .

В этом заключается механический смысл производной.

Во второй задаче

$$\delta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = m'_x,$$

т. е. плотность δ в точке x прямолинейного стержня есть производная от массы m по длине x .

5. Дифференцируемость функции

Определение 1. Функция $y=f(x)$, имеющая производную в точке x_0 , называется дифференцируемой в этой точке.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в интервале (a, b) , если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Например, функция $y=x^2$ дифференцируема (т. е. имеет производную) в любой точке x , следовательно, ее можно назвать дифференцируемой в бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$, т. е. на всей числовой оси.

Докажем следующую теорему, устанавливающую связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она в этой точке непрерывна.

Доказательство. Пусть аргумент x получает в точке x_0 приращение Δx , не равное нулю. Ему соответствует некоторое приращение функции Δy . Рассмотрим очевидное тождество $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$. Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

откуда и следует, согласно п. 2, непрерывность функции $y=f(x)$ в точке x_0 .

Обратная теорема неверна: существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках не являются дифференцируемыми. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию $y=|x|$.

В точке $x=0$ функция $f(x)=|x|$ непрерывна, так как

$$1) f(0)=|0|=0; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Покажем, что функция $f(x)=|x|$ не имеет производной в точке $x=0$. Прежде всего отметим, что в точке $x=0$

$$\Delta x = x - 0 = x,$$

Справа от нуля $|x| = x$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{|x|-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{|x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Слева от нуля $|x| = -x$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{|x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{-x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Таким образом, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ справа и слева имеет различные пределы, а это значит, что при $\Delta x \rightarrow 0$ отношение предела не имеет, т. е. производная $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке $x=0$ не существует.

Рассмотрим еще один пример. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ непрерывна на всей числовой оси и, в частности, при $x=0$. Покажем, что в точке $x=0$ эта функция не имеет производной. В самом деле, в точке $x=0$ приращению аргумента Δx соответствует приращение функции

$$\Delta y = \sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}.$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty.$$

Это значит, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x=0$ не имеет производной.

6. Геометрический смысл производной

В этом пункте мы выясним геометрический смысл производной, который окажется очень полезным при усвоении многих понятий математического анализа и при решении некоторых геометрических задач.

С этой целью введем определение касательной к кривой в данной точке.

Пусть на плоской кривой C задана точка M_0 . Рассмотрим другую точку M этой кривой и проведем секущую M_0M (рис. 132). Если точка M начинает перемещаться по кривой C , а точка M_0 остается не-

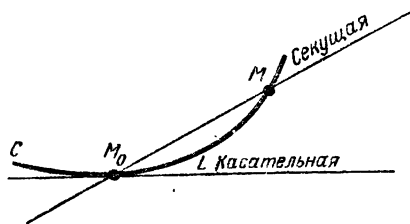


Рис. 132

подвижной, то секущая меняет свое положение. Допустим, что существует прямая L , проходящая через точку M_0 , которая обладает следующим свойством: если точка M при перемещении ее по кривой C неограниченно приближается к точке M_0 (с любой ее

стороны), то угол между прямой L и секущей M_0M стремится к нулю. Тогда эта прямая L называется касательной к кривой C в точке M_0 .

Кратко говоря, *касательная есть прямая, занимающая предельное положение секущей.*

Замечание. Аналогично определяется касательная и к пространственной кривой.

Рассмотрим теперь график непрерывной функции $y = f(x)$, имеющей в точке M_0 с абсциссой x_0 невертикальную касательную (рис. 133).

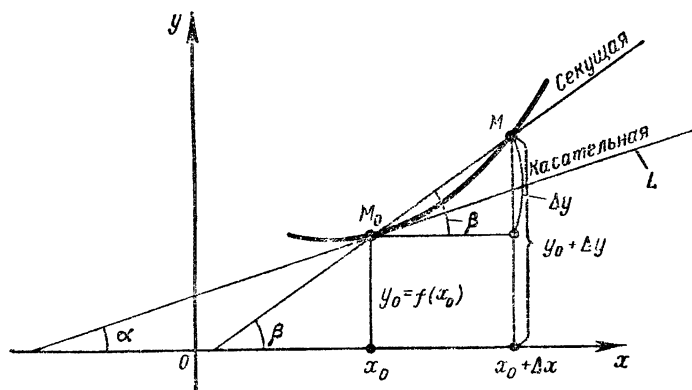


Рис. 133

Найдем ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол касательной с осью Ox . Для этого проведем через точку M_0 и точку M графика с абсциссой $x_0 + \Delta x$ секущую. Ее угловой коэффициент

$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где β — угол секущей с осью Ox (рис. 133). При $\Delta x \rightarrow 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, и поэтому точка M , перемещаясь по графику, неограниченно приближается к точке M_0 . При этом секущая неограниченно приближается к касательной, т. е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta = \alpha$ и, следовательно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$. Поэтому угловой коэффициент касательной

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Итак, *угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равен значению производной этой функции в точке x_0 .*

$$k_{\text{кас}} = f'(x_0). \quad (14)$$

Замечание. Мы показали, что если график непрерывной функции $y = f(x)$ имеет невертикальную касательную в точке с абсциссой x_0 , то в этой точке существует производная $f'(x_0)$, равная угловому

коэффициенту касательной $k_{\text{кас}}$. Можно показать, что и обратно, если в точке x_0 функция имеет производную, то ее график в точке с абсциссой x_0 имеет невертикальную касательную.

Пример. Найти угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2$ в точке $M_0(2; 4)$.

Решение. Мы уже видели (см. п. 4, пример 2), что

$$(x^2)'|_{x=2} = 2x|_{x=2} = 4.$$

Остается лишь заметить, что угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $M_0(2; 4)$ равен значению производной этой функции в точке $x = 2$, т. е. $k = 4$.

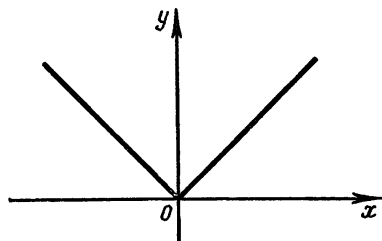


Рис. 134

В конце п. 5 было установлено, что функции $y = |x|$ и $y = \sqrt[3]{x}$ не имеют производных в точке $x = 0$. Для графика функции $y = |x|$ это связано с тем, что он в точке $O(0; 0)$ не имеет касательной (рис. 134). График функции $y = \sqrt[3]{x}$ в начале координат имеет касательную (ось Oy), но она перпен-

дикулярна оси абсцисс, и ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$ не имеет конечного значения.

7. Производные некоторых основных элементарных функций

В этом пункте мы найдем производные следующих основных элементарных функций: постоянной (константы) $y = C$, степенной функции $y = x^n$ с натуральным показателем n , показательной функции $y = a^x$, логарифмической функции $y = \log_a x$ и тригонометрических функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Производные остальных основных элементарных функций будут найдены в последующих пунктах.

1. Производная постоянной $y = C$. Так как функция $y = C$ сохраняет постоянное значение на всей числовой оси, то в произвольно выбранной точке x любому приращению аргумента Δx соответствует приращение функции Δy , равное нулю. Поэтому

$$(C)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Итак,

$$(C)' = 0. \quad (15)$$

2. Производная степенной функции $y = x^n$ с натуральным показателем n . Пусть x — произвольно выбранная точка, Δx — приращение аргумента в этой точке и Δy — соответствующее приращение данной функции. Тогда по формуле бинома Ньютона*

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n,$$

* См. сноску на стр. 184.

или

$$\Delta y = nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \quad (16)$$

3. Производная показательной функции $y = a^x$. Давая приращение Δx произвольно выбранному значению аргумента x , получим следующее приращение показательной функции:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1).$$

Следовательно,

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a,$$

так как $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$ (см. гл. V, § 2, п. 2, пример 3).

Таким образом,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a. \quad (17)$$

В частности, при $a = e$ получим

$$(e^x)' = e^x, \quad (18)$$

так как $\ln e = 1$.

4. Производная логарифмической функции $y = \log_a x$. Возьмем любое значение x из области определения логарифмической функции и дадим ему приращение Δx . Тогда приращение функции

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Поэтому

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x}.$$

Для того чтобы найти этот предел, сделаем следующее преобразование:

$$\frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Принимая во внимание, что величина x постоянна и что при $\Delta x \rightarrow 0$

также и $\frac{\Delta x}{x} \rightarrow 0$, по формуле (25) гл. V, § 2 получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \right] = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Итак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e, \quad (19)$$

или

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (19')$$

так как

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

В частности, при $a = e$ получим

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (20)$$

так как $\log_e e = \ln e = 1$.

5. Производные функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Пусть Δx — приращение произвольно выбранного значения аргумента x функции $y = \sin x$. Тогда приращение этой функции

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x, \end{aligned}$$

так как по формуле (18) гл. V, § 1, п. 7

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1, \text{ а } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x. \quad (21)$$

Аналогично выводится формула для производной функции $y = \cos x$:

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (22)$$

Рекомендуем читателю вывести формулу (22) самостоятельно.

8. Основные правила дифференцирования

Установим правила, по которым можно было бы находить производные суммы, произведения и частного функций, зная производные слагаемых, сомножителей, делимого и делителя.

Эти правила мы сформулируем в следующих теоремах.

Теорема 1. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в данной точке x , то в той же точке дифференцируема и их сумма, причем производная суммы равна сумме производных слагаемых:

$$(u + v)' = u' + v'. \quad (23)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = f(x) = u(x) + v(x)$. Приращению Δx аргумента x соответствуют приращения

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \text{ и } \Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$$

функций u и v . Тогда функция y получит приращение

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)] = \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Так как по предположению функции u и v дифференцируемы, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$$

и, следовательно, $y' = u' + v'$.

Итак,

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Замечание. Формула (23) легко обобщается на случай любого конечного числа слагаемых:

$$(u + v + \dots + l)' = u' + v' + \dots + l'. \quad (24)$$

Пример 1. Найти производную функции $y = x^3 + \sin x + \ln x$.

Решение. Применяя вначале формулу (24), а затем формулы (16), (21) и (20), получим

$$y' = (x^3 + \sin x + \ln x)' = (x^3)' + (\sin x)' + (\ln x)' = 3x^2 + \cos x + \frac{1}{x}.$$

Теорема 2. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в данной точке x , то в той же точке дифференцируемо и их произведение. При этом производная произведения находится по следующей формуле:

$$(uv)' = u'v + uv'. \quad (25)$$

Доказательство. Пусть $y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Если x получит приращение Δx , то функции u , v и y будут иметь соответ-

венно некоторые приращения Δu , Δv и Δy , причем

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \Delta u + u \Delta v + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v \right) + \\ + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \right).$$

Так как при фиксированном x $u = u(x)$ и $v = v(x)$ постоянны, то их можно вынести за знак предела. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v \right) = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \cdot v = u'v; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = uv'.$$

Кроме того,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0,$$

так как функция v по условию дифференцируема, а следовательно, и непрерывна, и поэтому $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$.

Таким образом,

$$y' = (uv)' = u'v + uv'.$$

Следствие. *Постоянный множитель можно вынести за знак производной:*

$$(cu)' = cu'. \quad (26)$$

Действительно, если $v = c$ (c — постоянная), то по формуле (25)

$$(cu)' = (c)'u + cu' = 0 \cdot u + c \cdot u' = cu'.$$

В частности, можно выносить за знак производной множитель, равный -1 , что равносильно вынесению за знак производной знака « $-$ »:

$$(-u)' = -u'.$$

На этом основании можно получить формулу для производной разности двух функций:

$$(u - v)' = u' - v'. \quad (27)$$

Пример 2. Найти производную функции $y = e^x \cos x$.

Решение. По формулам (25), (18) и (22) получим

$$y' = (e^x \cos x)' = (e^x)' \cdot \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x + e^x (-\sin x) = \\ = e^x (\cos x - \sin x).$$

Пример 3. Найти производную многочлена $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$.

Решение. Применяя последовательно формулы (24), (26), (16) и (15), получим

$$y' = (x^3 - 3x^2 + 5x + 2)' = (x^3)' + (-3x^2)' + (5x)' + (2)' = \\ = 3x^2 - 3(x^2)' + 5(x)' + 0 = 3x^2 - 3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 = 3x^2 - 6x + 5.$$

Замечание. Формулу (25) можно обобщить на случай любого конечного числа n сомножителей. Если, например, $n=3$, то

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'. \quad (28)$$

В самом деле,

$$(uvw)' = [(uv)w]' = (uv)'w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Теорема 3. Если в данной точке x функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы и $v \neq 0$, то в той же точке дифференцируемо и их частное u/v , причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (29)$$

Доказательство. Пусть Δx — приращение аргумента x , а Δu и Δv — соответствующие приращения функций u и v . Тогда функция $y = \frac{u}{v}$ будет иметь приращение

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u \cdot v - u \Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

Следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v) \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

или

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Мы считали, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$ вследствие предположения о дифференцируемости, а следовательно, и непрерывности функции v .

Пример 4. Найти производную функции $y = \operatorname{tg} x$.

Решение. Представив данную функцию в виде частного

$$y = \frac{\sin x}{\cos x},$$

получим по формуле (29):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (30)$$

При этом условие $v = \cos x \neq 0$ выполняется для любого x , принадлежащего области определения функции $\operatorname{tg} x$.

Аналогично выводится формула для производной функции $y = \operatorname{ctg} x$:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (31)$$

Рекомендуем читателю вывести ее самостоятельно.

9. Производная обратной функции

Пусть функция $x = \varphi(y)$ монотонна в некотором интервале и имеет в точке y этого интервала производную $\varphi'(y)$, не равную нулю. Покажем, что в соответствующей точке x обратная функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$, причем

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}. \quad (32)$$

Так как по условию функция $x = \varphi(y)$ монотонна и дифференцируема (а следовательно, и непрерывна), то по теореме о существовании обратной функции (см. гл. V, § 2, п. 4) функция $y = f(x)$ существует, монотонна и непрерывна. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение Δy , которое в силу ее монотонности будет отличным от нуля. Кроме того, вследствие непрерывности функции $y = f(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$ Δy также будет стремиться к нулю. Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \right) = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Формулу (32) можно записать в следующем виде:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \quad (32')$$

10. Производные обратных тригонометрических функций

Найдем производную функции $y = \arcsin x$. Рассмотрим обратную функцию $x = \sin y$. Эта функция в интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ монотонна. Ее производная $x' = \cos y$ не обращается в этом интервале в нуль.

Следовательно, по формуле (32') получим

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}.$$

Но

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}^*.$$

Следовательно, $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т. е.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (33)$$

* Знак «плюс» перед корнем выбран потому, что в интервале $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ $\cos y$ положителен.

Аналогично найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} x$. Эта функция по определению должна удовлетворять условию $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. При этом обратная функция $x = \operatorname{tg} y$ монотонна.

По формуле (30) получим

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Следовательно, согласно формуле (32')

$$y'_x = \cos^2 y.$$

Но

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Поэтому

$$y' = \frac{1}{1 + x^2},$$

или

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (34)$$

Приводим формулы для производных функций $y = \arccos x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad (35)$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}. \quad (36)$$

Рекомендуем читателю вывести эти формулы самостоятельно.

11. Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Тогда y есть сложная функция x : $y = f[\varphi(x)]$, а переменная u — промежуточный аргумент (см. гл. I, § 4, п. 6).

Как найти производную сложной функции y'_x , зная производную y по u y'_u и производную промежуточного аргумента u'_x ? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x в точке x , а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке u , то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ в данной точке x имеет производную y'_x , которая находится по следующей формуле:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \quad (37)$$

Часто пользуются менее точной, но более короткой формулировкой этой теоремы: *производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента.*

Доказательство. Дадим x приращение Δx . Тогда u и y получают соответственно приращения Δu и Δy .

Предположим, что при $\Delta x \rightarrow 0$ Δu не принимает значений, равных нулю. Тогда имеет место тождество

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Переходя в нем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так как функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема, а следовательно, и непрерывна, то при $\Delta x \rightarrow 0$ также и $\Delta u \rightarrow 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Но $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$. Поэтому

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x,$$

что и требовалось доказать.

Можно показать, что формула (37) оказывается верной и в случае, когда при $\Delta x \rightarrow 0$ Δu принимает значения, равные нулю.

Пример. Найти производную функции $y = \sin x^3$.

Решение. Данная функция—сложная. Введя обозначение $u = x^3$, получим $y = \sin u$.

По формуле (37) найдем

$$y'_x = (\sin u)'_u \cdot (x^3)'_x = \cos u \cdot 3x^2,$$

или, поскольку $u = x^3$,

$$y'_x = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3.$$

Сложная функция может быть составлена не из двух звеньев, как это было в только что рассмотренном примере, а из большего их числа. Такой, например, является функция $y = \ln \operatorname{arctg} x^2$, состоящая из трех звеньев. Здесь, для того чтобы найти y по данному значению x , надо совершить три действия: 1) возвести x в квадрат; 2) найти значение арктангенса от x^2 ; 3) взять натуральный логарифм от найденного значения $\operatorname{arctg} x^2$.

В таких случаях необходимо ясно представить себе, какое из действий, приводящих к значению сложной функции, является последним. При дифференцировании сложной функции та величина, над которой совершается последнее действие, принимается за промежуточный аргумент u .

Для функции $y = \ln \operatorname{arctg} x^2$ последним действием является взятие натурального логарифма. Это действие совершается над функцией $\operatorname{arctg} x^2$. Поэтому полагаем промежуточный аргумент $u = \operatorname{arctg} x^2$.

Тогда $y = \ln u$. Найдем производную y' по формуле (37):

$$y' = (\ln u)'_u \cdot (\operatorname{arctg} x^2)'_x = \frac{1}{u} (\operatorname{arctg} x^2)'_x = \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \cdot (\operatorname{arctg} x^2)'_x.$$

Дифференцирование не закончено, так как не найдена производная функции $\operatorname{arctg} x^2$. Эта функция также сложная, и последним действием для нее является нахождение арктангенса от x^2 . Поэтому, применяя повторно формулу (37) и полагая в ней уже $u = x^2$, получим

$$(\operatorname{arctg} x^2)'_x = (\operatorname{arctg} u)'_u \cdot (x^2)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot 2x = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}.$$

Окончательно будем иметь:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \frac{2x}{1+x^4} = \frac{2x}{(1+x^4) \cdot \operatorname{arctg} x^2}.$$

При достаточном навыке буква u для обозначения промежуточного аргумента не вводится. Вот как, например, могут быть найдены производные только что рассмотренных сложных функций:

$$(\sin x^3)' = \cos x^3 \cdot (x^3)' = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} (\ln \operatorname{arctg} x^2)' &= \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} (\operatorname{arctg} x^2)' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot (x^2)' = \\ &= \frac{1}{\operatorname{arctg} x^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x = \frac{2x}{(1+x^4) \operatorname{arctg} x^2}. \end{aligned}$$

12. Производные гиперболических функций

В гл. V, § 2, п. 7 были введены гиперболические функции. Найдем их производные. Так как $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, то

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} [(e^x)' - (e^{-x})'] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Здесь при дифференцировании e^{-x} мы воспользовались формулой дифференцирования сложной функции: $(e^{-x})' = e^{-x} (-x)' = -e^{-x}$.

Итак,

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x. \quad (38)$$

Аналогично находится производная гиперболического косинуса:

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x. \quad (39)$$

Производную гиперболического тангенса находим как производную частного:

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)' - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Но так как $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, то

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}. \quad (40)$$

Аналогично находится производная гиперболического котангенса:

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \quad (41)$$

13. Производная степенной функции с любым показателем

В п. 7 была выведена формула производной степенной функции $y = x^n$ при натуральном n . Найдем производную степенной функции $y = x^n$ с любым действительным показателем n . Считая x положительным, воспользуемся тождеством $x^n = e^{n \ln x}$ *. Тогда $y = e^{n \ln x}$ есть сложная функция x , и ее производная находится по формуле (37):

$$y' = (e^{n \ln x})' = e^{n \ln x} \cdot (n \ln x)' = e^{n \ln x} \cdot \frac{n}{x}.$$

Так как $e^{n \ln x} = x^n$, то

$$y' = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

Результат получился такой же, как и при натуральном показателе:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Можно показать, что если при $x < 0$ функция $y = x^n$ существует, то формула (16) также остается справедливой.

14. Сводная таблица формул дифференцирования

Сведем в таблицу выведенные ранее формулы дифференцирования:

I. $y = c; y' = 0;$	VIII. $y = \operatorname{ctg} x; y' = -\frac{1}{\sin^2 x};$
II. $y = x^n; y' = nx^{n-1};$	IX. $y = \arcsin x; y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
III. $y = a^x; y' = a^x \ln a;$	X. $y = \arccos x; y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
III'. $y = e^x; y' = e^x;$	XI. $y = \operatorname{arctg} x; y' = \frac{1}{1+x^2};$
IV. $y = \log_a x; y' = \frac{1}{x \ln a};$	XII. $y = \operatorname{arcctg} x; y' = -\frac{1}{1+x^2};$
IV'. $y = \ln x; y' = \frac{1}{x};$	XIII. $y = \operatorname{sh} x; y' = \operatorname{ch} x;$
V. $y = \sin x; y' = \cos x;$	XIV. $y = \operatorname{ch} x; y' = \operatorname{sh} x;$
VI. $y = \cos x; y' = -\sin x;$	XV. $y = \operatorname{th} x; y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$
VII. $y = \operatorname{tg} x; y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$	XVI. $y = \operatorname{cth} x; y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

* Справедливость этого тождества легко устанавливается логарифмированием обеих его частей по основанию e .

15. Неявные функции и их дифференцирование

Рассмотрим уравнение

$$2^y - x^2 - 1 = 0. \quad (42)$$

В нем каждому значению x соответствует такое единственное значение y , что если эти значения x и y подставить в уравнение (42), оно превратится в тождество. Например, значению $x=0$ соответствует значение $y=0$, так как при подстановке этих значений x и y в уравнение (42) мы получим тождество $2^0 - 0^2 - 1 = 0$. Аналогично, значению $x=1$ соответствует значение $y=1$; значению $x=2$ — значение $y=\log_2 5$ и т. д. Иными словами, y здесь является функцией x , заданной уравнением (42), не разрешенным относительно y . Эта функция называется неявной.

Рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (43)$$

Здесь каждому значению x из интервала $-1 < x < 1$ соответствуют два вполне определенных значения y , которые совместно с x удовлетворяют уравнению (43). Например, значению $x=0$ соответствуют два значения y : $y_1=1$ и $y_2=-1$. Если подставить в уравнение (43) значения $x=0$ и $y=1$ (или $x=0$ и $y=-1$), то это уравнение превратится в тождество. Аналогично, значению

$x=\frac{1}{2}$ соответствуют два значения y : $y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $y_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; значению $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ — два значения y : $y_1=\frac{1}{2}$ и $y_2=-\frac{1}{2}$ и т. д.

Таким образом, мы имеем здесь две непрерывные функции, заданные уравнением (43), не разрешенным относительно y . Каждая из этих функций называется неявной.

Пусть, в общем случае, дано уравнение

$$F(x, y) = 0, \quad (44)$$

связывающее переменные x и y и не разрешенное относительно y . Если в некотором интервале или сегменте каждому значению x соответствует единственное значение y , которое совместно с x удовлетворяет уравнению (44), то мы будем говорить, что это уравнение задает (определяет) неявную функцию $y=\varphi(x)$.

Таким образом, для любой неявной функции $y=\varphi(x)$, заданной уравнением (44), имеет место тождество

$$F[x, \varphi(x)] \equiv 0,$$

справедливое для всех x из области определения этой неявной функции.

Замечание. В некоторых случаях каждому значению x из данного интервала или сегмента соответствуют несколько значений y . В таких случаях уравнение (44) определяет не одну, а несколько неявных функций.

В отличие от неявной функции функция

$$y = f(x),$$

заданная уравнением, разрешенным относительно y , называется *явной*.

Вернемся к рассмотренным примерам. Уравнение (42) можно разрешить относительно y :

$$y = \log_2(x^2 + 1). \quad (45)$$

Эта функция — явная. Разумеется, это та же самая функция, которая ранее была задана неявно уравнением (42). Она тождественно удовлетворяет уравнению (42). В самом деле, подставив в уравнение (42) вместо y его выражение из формулы (45), получим

$$2^{\log_2(x^2 + 1)} - x^2 - 1 = x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0.$$

Этот результат не случаен. Ведь функция y , заданная уравнением (42), должна принимать такие значения, которые вместе с соответствующими значениями x удовлетворяют этому уравнению, т. е. превращают его в тождество. Уравнение (43) определяет две неявные элементарные функции: $y = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$, каждая из которых, будучи подставлена в уравнение (43), превращает его в тождество.

Не следует, однако, думать, что всякую неявную функцию можно представить в виде явной элементарной функции. Например, уравнение

$$2y - 2y + x^2 - 1 = 0 \quad (46)$$

задает неявную функцию y , так как существуют пары значений x и y , удовлетворяющие этому уравнению (например, $x = 0$, $y = 0$; $x = 1$, $y = 1$ и т. д.). Но уравнение (46) нельзя разрешить относительно y так, чтобы y выражался через элементарные функции от аргумента x .

Не всякое уравнение $F(x, y) = 0$ задает неявную функцию. Например, уравнению $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не удовлетворяют никакие действительные значения x и y , и, следовательно, оно не определяет никакой неявной функции. В гл. IX будет выяснено, при каких условиях уравнение $F(x, y) = 0$ задает неявную функцию. В некоторых случаях неявная функция задается уравнением, правая часть которого не равна нулю. Например, уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ задает две неявные элементарные функции, которые в явном виде выражаются так:

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ и } y = -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Покажем на конкретном примере, как, не разрешая уравнение (43) относительно y , можно найти производную неявной функции. При этом мы будем предполагать, что неявная функция дифференцируема.

Пример. Найти производную неявной функции y , заданной уравнением

$$2^y - 2y + x^2 - 1 = 0. \quad (47)$$

Решение. Уравнение (47), если в нем y считать заданной неявной функцией x , является тождеством относительно x .

Если две функции тождественно равны, то их производные также тождественно равны:

$$(2^y - 2y + x^2 - 1)'_x = 0.$$

При дифференцировании функции 2^y и $(-2y)$ следует рассматривать как сложные функции x , а y — как промежуточный аргумент. Поэтому по правилу дифференцирования сложной функции $(2^y - 2y + x^2 - 1)'_x = 2^y \ln 2 y' - 2y' + 2x$ и, следовательно,

$$2^y \ln 2 y' - 2y' + 2x = 0.$$

Решая это уравнение относительно y' , получим

$$y' = \frac{2x}{2 - 2^y \ln 2}.$$

Производная неявной функции, как это наглядно видно из рассмотренного примера, выражается, как правило, в зависимости не только от аргумента, но и от функции.

16. Уравнения касательной и нормали к кривой

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в некоторой его точке $M_0(x_0; y_0)$, для которой $y_0 = f(x_0)$, есть прямая, проходящая через эту точку и имеющая угловой коэффициент $k_{\text{кас}}$, равный $f'(x_0)$ (см. п. 6). Поэтому уравнение этой касательной можно найти, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через данную точку (см. гл. II, формула 15):

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (48)$$

Определение. Нормалью к кривой называется прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной (рис. 135).

Рассмотрим график функции $y = f(x)$; пусть $M_0(x_0; y_0)$ — одна из его точек. Тогда уравнение нормали к графику функции в данной точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0), \quad (49)$$

так как угловой коэффициент нормали k_n связан с угловым коэффициентом касательной $k_{\text{кас}} = f'(x_0)$ условием перпендикулярности:

$$k_n = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

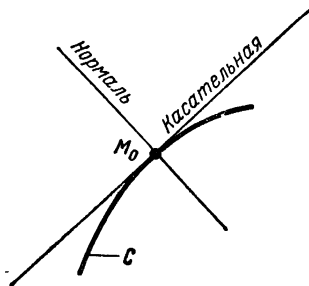


Рис. 135

Пример 1. Найти уравнение касательной и нормали к графику функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Найдем ординату точки касания: $y_0 = \operatorname{tg} x_0 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Дифференцируем данную функцию: $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ и находим угловой коэффициент касательной $k_{\text{кас}} = \frac{1}{\cos^2 x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 2$ и угловой коэффициент нормали $k_n = -\frac{1}{2}$. По формулам (48) и (49) находим уравнение касательной

$$y - 1 = 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

и уравнение нормали

$$y - 1 = -\frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Пример 2. Найти уравнение касательной и нормали к эллипсу

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$$

в точке $M_0(2; 3)$.

Решение. Дифференцируя по x обе части уравнения эллипса, получим

$$\frac{2x}{8} + \frac{2yy'}{18} = 0.$$

Отсюда $y' = -\frac{9x}{4y}$. Угловой коэффициент касательной к эллипсу в точке $M_0(2; 3)$

$$k_{\text{кас}} = y' \Big|_{\substack{x=2 \\ y=3}} = -\frac{9 \cdot 2}{4 \cdot 3} = -\frac{3}{2}.$$

Угловой коэффициент нормали $k_n = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = \frac{2}{3}$. Следовательно, уравнения касательной и нормали соответственно имеют вид:

$$y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2) \text{ и } y - 3 = \frac{2}{3}(x - 2),$$

или, после упрощений,

$$3x + 2y - 12 = 0 \text{ и } 2x - 3y + 5 = 0.$$

17. Графическое дифференцирование

Графическим дифференцированием называется построение (приближенное) графика производной $y' = f'(x)$ по данному графику функции $y = f(x)$. Приведем краткое описание этого построения. Пусть дан график функции $y = f(x)$ на сегменте $[a, b]$ (рис. 136). Разобьем этот сегмент на n частей с помощью точек $x_0 = a, x_1, x_2, \dots$

$\dots, x_{n-1}, x_n = b$ и отметим на данном графике соответствующие им точки $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n$. Через каждую из этих точек проведем касательную. Через точку $Q(-1; 0)$ проведем параллельные этим касательным прямые до их пересечения с осью ординат в точках $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$. Ординаты этих точек $OP_0, OP_1, OP_2, \dots, OP_{n-1}, OP_n$ равны значениям производной $y' = f'(x)$ соответственно в точках $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$. В самом деле, например, из треугольника OP_1Q имеем

$$\frac{OP_1}{QO} = \operatorname{tg} \alpha_1, \quad (50)$$

где α_1 —угол, который образуют с осью абсцисс отрезок QP_1 и параллельная ему касательная к графику данной функции в точке

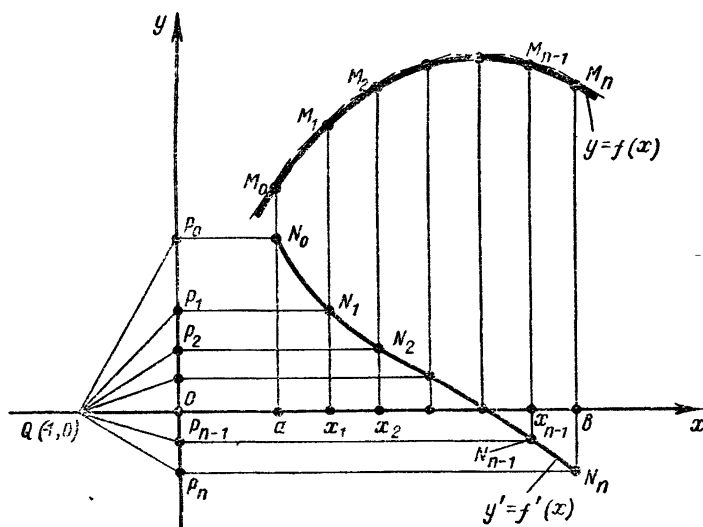


Рис. 136

M_1 . Согласно геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg} \alpha_1 = f'(x_1)$. Замечая, что $QO = 1$, из соотношения (50) получим $OP_1 = f'(x_1)$.

Проведем через точку P_1 прямую, параллельную оси Ox , а через точку M_1 —прямую, параллельную оси Oy , до их пересечения в точке N_1 . Точка N_1 имеет абсциссу x_1 и ординату $f'(x_1)$ и, следовательно, принадлежит графику производной $y' = f'(x)$. Аналогично строим точки $N_0[a; f'(a)]$, $N_2[x_2; f'(x_2)]$, $\dots$, $N_{n-1}[x_{n-1}; f'(x_{n-1})]$, $N_n[x_n; f'(x_n)]$. Соединив все эти точки плавной кривой, получим приближенный график производной $y' = f'(x)$, по которому нетрудно найти приближенное значение этой производной в любой точке сегмента $[a, b]$. Построение графика производной будет тем точнее, чем больше число n точек деления сегмента $[a, b]$.

§ 2. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Нахождение производных высших порядков

Предположим, что функция $y=f(x)$ дифференцируема. Тогда ее производная $f'(x)$ является функцией x . Пусть эта функция также имеет производную. Эта производная называется *второй производной*, или *производной второго порядка* функции $y=f(x)$, и обозначается символом y'' или $f''(x)$.*

$$f''(x) = [f'(x)]'. \quad (51)$$

При этом $f'(x)$ называется *первой производной* или *производной первого порядка* функции $f(x)$.

Пример 1. Найти вторую производную функции $y=x^3$.

Решение. Находим первую производную данной функции:

$$y' = (x^3)' = 3x^2.$$

Находим вторую производную как производную первой производной:

$$y'' = (3x^2)' = 6x.$$

Производная второй производной функции $y=f(x)$ называется *третьей производной* или *производной третьего порядка* данной функции и обозначается символом y''' или $f'''(x)$:

$$f'''(x) = [f''(x)]'. \quad (52)$$

Вообще, *производной n -го порядка* функции $y=f(x)$ называется первая производная производной $(n-1)$ -го порядка данной функции и обозначается символом $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'. \quad (53)$$

Производные порядка выше первого называются *производными высшего порядка*.

Пример 2. Найти производную 4-го порядка функции $y=\ln x$.

Решение. Находим последовательно 1, 2, 3 и 4-ю производные:

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \quad y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}; \\ y^{IV} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{6}{x^3}.$$

Пример 3. Найти производную n -го порядка функции $y=e^{kx}$.

Решение. Имеем:

$$y' = (e^{kx})' = ke^{kx}; \quad y'' = (ke^{kx})' = k^2e^{kx}; \\ y''' = (k^2e^{kx})' = k^3e^{kx}.$$

По аналогии находим

$$y^{(n)} = k^n e^{kx}. \quad (54)$$

Пример 4. Найти производную n -го порядка функции $y=\sin x$.

* Читается: «игрек два штриха» или «эф два штриха от икс».

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned}y' &= (\sin x)' = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right); \\y'' &= (\cos x)' = -\sin x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2 \right); \\y''' &= (-\sin x)' = -\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3 \right); \\y^{IV} &= (-\cos x)' = \sin x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4 \right).\end{aligned}$$

По аналогии находим

$$y^{(n)} = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n \right)^*.$$
 (55)

2. Механический смысл второй производной

В п. 4 § 1 был выяснен механический смысл первой производной. Выясним механический смысл второй производной.

Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону $s=f(t)$, где s —путь, проходимый точкой за время t . Тогда скорость v этого движения есть некоторая функция времени: $v=v(t)$. В момент времени t скорость имеет значение $v=v(t)$. Рассмотрим другой момент времени $t+\Delta t$. Ему соответствует значение скорости $v_1=v(t+\Delta t)$. Приращению времени Δt соответствует приращение скорости

$$\Delta v = v_1 - v = v(t + \Delta t) - v(t).$$

Отношение $\frac{\Delta v}{\Delta t} = w_{\text{ср}}$ называется средним ускорением за промежуток времени Δt .

Ускорением w в момент t называется предел среднего ускорения при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} w_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'_t.$$

Таким образом, ускорение прямолинейного движения точки есть производная скорости по времени.

Как мы видели, скорость есть производная пути s по времени t : $v=s'$. Учитывая это, имеем:

$$w = v'_t = (s')' = s''.$$
 (56)

Итак, ускорение прямолинейного движения точки равно второй производной пути по времени.

Пример. Пусть прямолинейное движение материальной точки происходит по закону $s = \frac{t^3}{3}$, где время t выражается в сек, а путь s —в см. Найти ускорение w движущейся точки в момент времени $t=5$ сек.

* При строгом выводе формул (54) и (55) следует применить метод математической индукции.

Решение. По формуле (56) имеем: $w = s'' = \left(\frac{t^3}{3}\right)'' = 2t$. Следовательно, искомое ускорение

$$w|_{t=5} = 2t|_{t=5} = 10 \text{ (см/сек}^2\text{)}.$$

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

1. Дифференциал функции и его геометрический смысл

Рассмотрим функцию $y = x^3$. Найдем ее приращение Δy , соответствующее приращению Δx аргумента в некоторой точке $x \neq 0$:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 3x^2 \Delta x + (3x + \Delta x)(\Delta x)^2.$$

Как видим, приращение функции можно рассматривать как сумму двух слагаемых: первого $3x^2 \Delta x$, линейного относительно Δx (точнее говоря, пропорционального Δx), и второго $(3x + \Delta x)(\Delta x)^2$, нелинейного относительно Δx . При $\Delta x \rightarrow 0$ оба слагаемых являются бесконечно малыми, т. е. стремятся к нулю. Но при этом второе слагаемое стремится к нулю быстрее, чем первое, т. е. предел отношения второго слагаемого к первому равен нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{3x^2 \Delta x} = \frac{1}{3x^2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x \Delta x + (\Delta x)^2) = 0.$$

Вследствие этого при малых Δx приращение функции можно считать приближенно равным его линейной части: $\Delta y \approx 3x^2 \Delta x$. В связи с этим линейная часть приращения называется *главной частью приращения функции*.

В нижеследующей таблице для функции $y = x^3$ в точке $x = 1$ приведены значения приращения функции $\Delta y = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, главной линейной его части $3\Delta x$ и нелинейной части $3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ для различных значений Δx .

Δx	Δy	Линейная часть $3\Delta x$	Нелинейная часть $3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$
0,1	0,331	0,3	0,031
0,01	0,030301	0,03	0,000301
0,001	0,003003001	0,003	0,00003001

Из этой таблицы наглядно видно, насколько быстрее убывает нелинейная часть Δy по сравнению с главной линейной частью Δy при убывании Δx . Подобным свойством обладают многие функции.

Пусть приращение Δy функции $f(x)$ в точке x можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x), \quad (57)$$

где Δx — приращение аргумента, вызвавшее приращение функции Δy ;

A — постоянная (т. е. величина, не зависящая от Δx);
 $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция высшего порядка малости, чем Δx ; $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Определение. Если приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x может быть представлено по формуле (57), то главная часть приращения функции $A\Delta x$, пропорциональная приращению аргумента, называется дифференциалом этой функции.

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается символом dy (читается «дэ игрек») или $df(x)$ (читается «дэ эф от икс»).

Итак, по определению

$$dy = A\Delta x. \quad (58)$$

Таким образом, если функция $y = f(x)$ имеет в точке x дифференциал, то ее приращение в этой точке представляет собой сумму двух слагаемых: дифференциала $dy = A\Delta x$ и нелинейной части $\alpha(\Delta x)$ высшего порядка малости, чем Δx при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому, пренебрегая при малых Δx нелинейным слагаемым, получим следующее приближенное равенство

$$\Delta y \approx A\Delta x,$$

или

$$\Delta y \approx dy. \quad (59)$$

Рассмотрим теперь теоремы, устанавливающие связь между существованием производной и существованием дифференциала.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x дифференциал, то она имеет в этой точке производную.

Доказательство. Так как по условию функция $y = f(x)$ имеет дифференциал, то ее приращение Δy может быть представлено по формуле (57):

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

причем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$. Разделив обе части формулы (57) на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Но $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ и, следовательно, производная $f'(x)$ существует и равна A .

Вследствие этого выражение для дифференциала будет иметь следующий вид:

$$dy = f'(x) \Delta x. \quad (60)$$

Итак, из существования дифференциала следует существование производной, т. е. дифференцируемость функции. Покажем, что и обратно, из дифференцируемости функции следует существование дифференциала, т. е. имеет место следующая теорема.

Теорема. Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x производную, то она имеет в этой точке дифференциал.

Доказательство. Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ при фиксированном x есть функция приращения Δx . Всякая функция, имеющая предел, равна сумме этого предела и некоторой бесконечно малой функции (см. гл. V, § 1, п. 6). Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \beta(\Delta x), \quad (61)$$

где $\beta(\Delta x)$ — бесконечно малая функция Δx , т. е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(\Delta x) = 0$.

Умножая обе части равенства (61) на Δx , получим

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \Delta x \beta(\Delta x). \quad (61')$$

Таким образом, приращение функции Δy представляет собой сумму двух слагаемых: $f'(x) \Delta x$ и $\Delta x \beta(\Delta x)$. При этом первое слагаемое пропорционально Δx , а второе слагаемое при $\Delta x \rightarrow 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx , так как

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \beta(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(\Delta x) = 0.$$

Следовательно, согласно данному выше определению, функция $y=f(x)$ имеет в точке x дифференциал, равный $f'(x) \Delta x$.

Итак, понятия существования дифференциала и дифференцируемости функции равносильны.

Выясним геометрический смысл дифференциала. Для этого проведем к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x; y)$ касательную и обозначим через α ее угол с осью Ox (рис. 137). Рассмотрим ординату этой касательной для точки $x+\Delta x$. Отрезок NP , равный разности между этой ординатой и ординатой касательной для точки x , назовем *приращением ординаты касательной*. Покажем, что этот отрезок равен дифференциалу dy . Из прямоугольного треугольника MNP имеем:

$$NP = \operatorname{tg} \alpha \cdot MN, \text{ или } NP = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x.$$

Но, согласно геометрическому смыслу производной, $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$. Поэтому

$$NP = f'(x) \Delta x = dy.$$

Итак, мы выяснили геометрический смысл дифференциала: *дифференциал функции $y=f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной*.

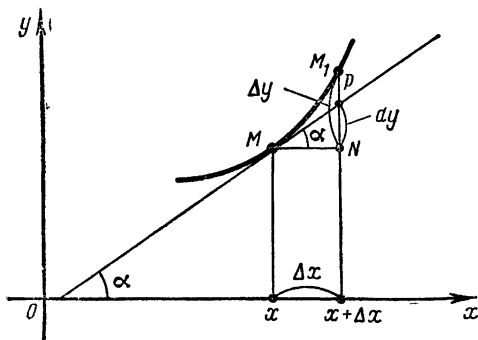


Рис. 137

2. Производная как отношение дифференциалов

Рассмотрим функцию $y = x$. Ее дифференциал, согласно формуле (60), равен:

$$dy = dx = (x)' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Условимся называть дифференциалом независимой переменной дифференциал функции, равной x , т. е. будем считать, что дифференциал независимой переменной равен ее приращению:

$$dx = \Delta x. \quad (62)$$

Тогда выражение (60) для дифференциала функции запишется в следующей форме:

$$dy = f'(x) dx. \quad (63)$$

Разделив обе части этого равенства на dx , получим

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \quad (64)$$

Таким образом, производная функция равна отношению ее дифференциала к дифференциалу независимой переменной.

Часто это отношение $\frac{dy}{dx}$ рассматривается просто как символ, обозначающий производную функции y по аргументу x .

3. Дифференциал суммы, произведения и частного функций

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции x . Тогда имеют место следующие формулы:

$$d(u + v) = du + dv, \quad (65)$$

$$d(uv) = u dv + v du, \quad (65')$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (\text{при условии } v \neq 0). \quad (65'')$$

Предоставляем читателю вывести формулы (65) и (65'') и ограничимся лишь выводом формулы (65').

По определению дифференциала

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + uv') dx = vu' dx + uv' dx = v du + u dv,$$

так как $u' dx = du$ и $v' dx = dv$.

Пример. Найти дифференциал функции $y = x^2 e^x$.

Решение. По формуле (65') получим

$$dy = x^2 d(e^x) + e^x d(x^2) = x^2 (e^x)' dx + e^x (x^2)' dx = x e^x (x + 2) dx.$$

4. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала

В п. 2 мы видели, что если x является независимой переменной, то дифференциал функции $y = f(x)$ имеет следующую форму:

$$dy = f'(x) dx. \quad (66)$$

Покажем, что эта форма сохраняется и в том случае, когда x является не независимой переменной, а функцией. Действительно, пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$, т. е. y является сложной функцией t :

$$y = f[\varphi(t)].$$

Тогда $dy = y'_t dt$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем $y'_t = y'_x \cdot x'_t$. Отсюда

$$dy = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x dx = f'(x) dx,$$

так как

$$x'_t dt = dx.$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема. Дифференциал сложной функции $y = f(x)$, для которой $x = \varphi(t)$, имеет такой же вид $dy = f'(x) dx$, как если бы аргумент x был независимой переменной.

Свойство дифференциала сложной функции, выражаемое этой теоремой, называется *инвариантностью формы дифференциала*.

Из формулы (66) следует, что выражение для производной

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

сохраняет свой вид и для случая, когда аргумент x не является независимой переменной.

5. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

1. В приближенных вычислениях встречаются понятия абсолютной и относительной погрешностей.

О п р е д е л е н и е. Абсолютной погрешностью приближенной величины u_0 называется абсолютная величина разности между точным значением и этой величины и ее приближенным значением u_0 .

Обозначая абсолютную погрешность символом Δ_u , получим

$$\Delta_u = |u - u_0|.$$

Чаще всего точное значение u , а следовательно, и абсолютная погрешность Δ_u неизвестны. Поэтому вводят понятие границы абсолютной погрешности.

О п р е д е л е н и е. Границей абсолютной погрешности приближенной величины u_0 называется любое положительное число $\bar{\Delta}_u$, не меньшее абсолютной погрешности Δ_u :

$$|u - u_0| = \Delta_u \leq \bar{\Delta}_u. \quad (67)$$

Из неравенства (67) следует, что точное значение величины u содержится между $u_0 - \bar{\Delta}_u$ и $u_0 + \bar{\Delta}_u$: $u_0 - \bar{\Delta}_u \leq u \leq u_0 + \bar{\Delta}_u$.

Если граница абсолютной погрешности при нахождении некоторой величины u равна $\bar{\Delta}_u$, то говорят, что величина u найдена с точностью $\bar{\Delta}_u$.

Ясно, что чем меньше $\overline{\Delta}_u$, тем точнее найдена величина u . Однако, зная границу погрешности, нельзя еще судить о качестве приближения.

Так, например, при измерении расстояния от Москвы до Ленинграда с точностью до 1 км мы имеем значительно большую абсолютную погрешность, чем при определении с точностью до 10 см роста человека. Однако ясно, что качество измерения в первом случае выше, чем во втором. Для того чтобы судить о качестве приближений, вводят понятие относительной погрешности.

Определение. *Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности Δ_u к модулю приближенного значения u_0 измеряемой величины.*

Обозначая относительную погрешность символом δ_u , получим

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u_0|}.$$

Определение. *Границей относительной погрешности $\overline{\delta}_u$ называется отношение границы абсолютной погрешности $\overline{\Delta}_u$ к модулю приближенного значения u_0 измеряемой величины:*

$$\overline{\delta}_u = \frac{\overline{\Delta}_u}{|u_0|}$$

δ_u и $\overline{\delta}_u$ часто выражают в процентах.

Возвращаясь к рассмотренным примерам, найдем границы относительных погрешностей при измерениях расстояния L от Москвы до Ленинграда и длины l человеческого роста, принимая приближенно $L \approx 650$ км и $l \approx 170$ см. Так как $L_0 = 650$ км, $\overline{\Delta}_L = 1$ км, то $\overline{\delta}_L = \frac{1}{650} \approx 0,0015$, или 0,15%. Во втором случае $l_0 = 170$ см, $\overline{\Delta}_l = 10$ см. Следовательно, $\overline{\delta}_l = \frac{10}{170} \approx 0,0588$, или 5,88%. Измерение в первом случае значительно точнее, чем во втором.

II. Перейдем теперь к применению дифференциала к приближенным вычислениям значений функций.

Пусть нам известно значение функции $y = f(x)$ и ее производной в точке x . Покажем, как найти значение функции $f(x + \Delta x)$ в некоторой близкой точке $x + \Delta x$. Для этого воспользуемся приближенным равенством (59):

$$\Delta y \approx dy,$$

или

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x.$$

Так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, то

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x,$$

откуда

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x. \quad (68)$$

Полученная формула решает поставленную задачу. Как можно показать, абсолютная погрешность, которая при этом получается,

не превышает

$$\bar{\Delta} = \frac{M}{2} \cdot (\Delta x)^2, \quad (69)$$

где M — наибольшее значение $|f''(x)|$ на сегменте $[x, x + \Delta x]$.

Пример 1. Пользуясь формулой (68), найти приближенное значение $\cos 61^\circ$.

Решение. Будем рассматривать $\cos 61^\circ$ как частное значение функции $y = f(x) = \cos x$. Примем за начальное значение аргумента $x = 60^\circ$ или в радианах $x = \frac{\pi}{3}$ (при котором $\cos x$ легко вычисляется без таблиц). За новое (приращенное) значение аргумента примем $x + \Delta x = 61^\circ$ или в радианах $x + \Delta x = \frac{61\pi}{180}$.

Тогда приращение аргумента

$$\Delta x = \frac{61\pi}{180} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{180} \approx 0,01745.$$

Формула (68) в данном случае примет следующий вид:

$$\cos(x + \Delta x) \approx \cos x + (\cos x)' \cdot \Delta x,$$

или

$$\cos(x + \Delta x) \approx \cos x - \sin x \cdot \Delta x.$$

Подставляя сюда численные значения x и Δx , получим

$$\cos 61^\circ \approx \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cdot 0,01745 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,01745 \approx 0,4849.$$

Для оценки погрешности найдем вторую производную $f''(x) = (\cos x)'' = -\cos x$. Так как для всех x между 60° и 61° $|f''(x)| = |-\cos x| < 1$, то абсолютная погрешность, как это следует из формулы (69), не превышает

$$\frac{M}{2} \cdot (\Delta x)^2 < \frac{1}{2} \cdot (0,01745)^2 \approx 0,0003.$$

Таким образом, погрешность не превышает 0,0003.

Пример 2. Подсчитать приближенно увеличение объема цилиндра с высотой $H = 40$ см и радиусом основания $R = 30$ см при увеличении радиуса основания на 0,5 см.

Решение. Объем цилиндра V при постоянной высоте H и переменном радиусе основания R является функцией R : $V = \pi H R^2$. При подсчете приращения объема ΔV заменяем это приращение дифференциалом $dV = 2\pi H R \cdot \Delta R$:

$$\Delta V \approx 2\pi H R \cdot \Delta R.$$

При $\Delta R = 0,5$ см, $H = 40$ см и $R = 30$ см имеем

$$\Delta V \approx 2\pi \cdot 40 \cdot 30 \cdot 0,5 = 1200\pi \approx 3770 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Применяя формулу (69), читатель легко убедится, что в данном случае граница абсолютной погрешности $\bar{\Delta}_V = 31,4 \text{ см}^3$.

6. Дифференциалы высших порядков

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и предположим, что ее аргумент x — независимая переменная. Тогда дифференциал этой функции $dy = f'(x) dx$ зависит от двух переменных: x и $dx = \Delta x$, причем dx от x не зависит (приращение в данной точке x можно выбирать независимо от этой точки).

Рассматривая $dy = f'(x) dx$ только как функцию x (т. е. считая dx постоянным), можно найти дифференциал этой функции.

Дифференциал от дифференциала данной функции $y = f(x)$ называется ее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) и обозначается символом d^2y и $d^2f(x)$. Читается: «дэ два игрек» или «дэ два эф от икс».

Таким образом, по определению

$$d^2y = d(dy).$$

Найдем выражение второго дифференциала функции $y = f(x)$:

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x) dx] = [f'(x) dx]' dx = f''(x) dx \cdot dx = f''(x) (dx)^2.$$

При дифференцировании dx считалось постоянным. В дальнейшем скобки при степенях dx мы будем опускать. Тогда выражение для d^2y будет иметь следующий вид:

$$d^2y = f''(x) dx^2. \quad (70)$$

Аналогично определяются и находятся дифференциалы 3-го, 4-го порядка и т. д.

Вообще, n -м дифференциалом (или дифференциалом n -го порядка) функции $y = f(x)$ называется дифференциал от ее $(n-1)$ -го дифференциала.

Дифференциал n -го порядка функции $y = f(x)$ обозначается символом $d^n y$ или $d^n f(x)$. Таким образом, по определению

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Дифференциал функции dy иногда называется дифференциалом первого порядка.

Нетрудно установить справедливость формулы

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n \quad (71)$$

для функции $y = f(x)$, аргумент которой является независимой переменной.

Из формулы (71) следует, что

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (72)$$

В частности, при $n = 1, 2$ и 3 соответственно получим

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Иными словами, производную n -го порядка данной функции (при условии, что ее аргумент является независимой переменной) можно

рассматривать как отношение ее дифференциала n -го порядка к n -й степени дифференциала независимой переменной.

В п. 4 мы видели, что форма дифференциала первого порядка $dy = f'(x)dx$ обладает свойством инвариантности. Однако форма дифференциала высшего порядка ($n > 1$) $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ не обладает свойством инвариантности.

Это значит, что формула (71) (при $n > 1$) не остается, вообще говоря, справедливой, если аргумент не является независимой переменной. Формула (72) в этом случае (при $n > 1$) также, вообще говоря, не верна. Поэтому производную $f^{(n)}(x)$ ($n > 1$) в случае, когда x не является независимой переменной, нельзя рассматривать как отношение $d^n y$ к dx^n .

Тем не менее, условимся и здесь сохранить запись $f^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$, понимая $\frac{d^n y}{dx^n}$ не как отношение дифференциалов, а как *новое символическое обозначение n -й производной*.

§ 4. ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ, И ИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

1. Параметрическое задание функций и линий

До сих пор рассматривались уравнения линий на плоскости, связывающие непосредственно текущие координаты точек этих линий. Однако часто применяется другой способ задания линии, в котором текущие координаты x и y рассматриваются как функции третьей переменной величины.

Пусть даны две функции переменной t :

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

рассматриваемые для одних и тех же значений t . Тогда любому из этих значений t соответствует определенное значение x и определенное значение y , а следовательно, и определенная точка $M(x; y)$. Когда переменная t пробегает все значения из области определения функций (73), точка $M(x; y)$ описывает некоторую линию C в плоскости Oxy . Уравнения (73) называются *параметрическими уравнениями этой линии*, а переменная t — *параметром*.

Предположим, что функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$. Подставив эту функцию во второе из уравнений (73), получим уравнение

$$y = y[\Phi(x)], \quad (74)$$

выражающее y как функцию x .

Условимся говорить, что эта функция задана параметрически уравнениями (73). Переход от этих уравнений к уравнению (74) называется *исключением параметра*. При рассмотрении функций,

заданных параметрически, исключение параметра не только не обязательно, но и не всегда практически возможно. Во многих случаях гораздо удобнее, задаваясь различными значениями параметра t , вычислять затем по формулам (73) соответствующие значения аргумента x и функции y .

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть M — произвольная точка окружности с центром в начале координат и радиусом R . Декартовы координаты x и y этой точки выражаются через ее полярный радиус $r=R$ и полярный угол, который мы здесь обозначим через t , следующим образом (см. гл. I, § 3, п. 3):

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos t, \\ y &= R \sin t. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Уравнения (75) называются параметрическими уравнениями окружности. Параметром в них является полярный угол t , который меняется в пределах от 0 до 2π .

Если уравнения (75) почленно возвести в квадрат и сложить, то в силу тождества $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ параметр исключится и получится уравнение окружности в декартовой системе координат $x^2 + y^2 = R^2$, определяющее две элементарные функции:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Каждая из этих функций задается параметрически уравнениями (75), но области изменения параметра для этих функций различны.

Для первой из них $0 \leq t \leq \pi$; графиком этой функции служит верхняя полуокружность. Для второй функции $\pi \leq t \leq 2\pi$; графиком ее является нижняя полуокружность.

Пример 2. Рассмотрим одновременно эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и окружность с центром в начале координат и радиусом a (рис. 138). Каждой точке M эллипса сопоставим точку N окружности, имеющую ту же абсциссу, что и точка M , и расположенную с ней по одну сторону от оси Ox . Положение точки N , а следовательно, и точки M , вполне определяется полярным углом t точки N . При этом для их общей абсциссы x получим следующее выражение: $x = a \cos t$. Ординату y точки M найдем из уравнения эллипса:

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = b \sqrt{1 - \frac{a^2 \cos^2 t}{a^2}} = b \sin t.$$

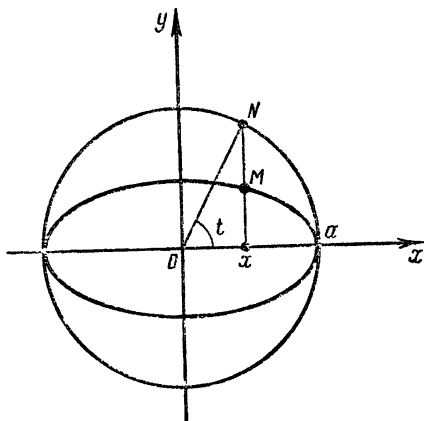


Рис. 138

Исключение параметра t приводит здесь к громоздким выражениям и практически нецелесообразно.

Параметрическое задание линий особенно часто используется в механике, причем роль параметра играет время.

Пример 4. Определим траекторию снаряда, выпущенного из орудия с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Сопротивлением воздуха и размерами снаряда, считая его материальной точкой, пренебрегаем.

Выберем систему координат. За начало координат примем точку вылета снаряда из дула. Ось Ox направим горизонтально, а ось Oy — вертикально, расположив их в одной плоскости с дулом орудия. Если бы не было силы земного тяготения, то снаряд двигался бы по прямой, составляющей угол α с осью Ox и к моменту времени t прошел бы путь $v_0 t$. Координаты снаряда в момент времени t были бы соответственно равны: $x = v_0 t \cos \alpha$, $y = v_0 t \sin \alpha$. Вследствие земного тяготения снаряд должен к этому моменту вертикально опуститься на величину $\frac{gt^2}{2}$. Поэтому в действительности в момент времени t координаты снаряда определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

В этих уравнениях v_0 , α и g — постоянные величины. При изменении t будут изменяться также координаты x и y точки траектории снаряда. Уравнения (*) являются параметрическими уравнениями траектории снаряда, в которых параметром является время t .

Выразив из первого уравнения (*) $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ и подставив его во второе уравнение, получим уравнение траектории снаряда в виде $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$. Это — уравнение параболы.

2. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Предположим, что функция y от x задана параметрически уравнениями (73)

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \right\}$$

причем в некоторой области изменения параметра t функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы и $x'(t) \neq 0$.

Найдем производную y'_x . Как мы знаем $y'_x = \frac{dy}{dx}$. Так как $dx = x'(t) dt$, $dy = y'(t) dt$, то

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t) dt}{x'(t) dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Таким образом,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (78)$$

Формула (78) позволяет находить производную функции, заданной параметрически.

Пример 1. Найти производную функции y от x , заданной параметрическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= \sin^2 t, \\ y &= \sin 2t. \end{aligned} \right\}$$

Решение. По формуле (78) получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\sin 2t)'}{(\sin^2 t)'} = \frac{2 \cos 2t}{2 \sin t \cos t} = 2 \operatorname{ctg} 2t.$$

Пример 2. Найти уравнения касательной и нормали к циклоиде

$$\left. \begin{aligned} x &= t - \sin t, \\ y &= 1 - \cos t \end{aligned} \right\} \quad (a = 1)$$

в точке $M_1(x_1; y_1)$, соответствующей значению параметра $t = \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Находим координаты точки касания $M_1(x_1; y_1)$:

$$x_1 = (t - \sin t) \Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 1 = \frac{3\pi+2}{2};$$

$$y_1 = (1 - \cos t) \Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} = 1 - \cos \frac{3\pi}{2} = 1.$$

Для того чтобы найти угловые коэффициенты касательной и нормали, находим по формуле (78) производную

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \cos t)'}{(t - \sin t)'} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

Находим угловой коэффициент касательной к циклоиде в точке M_1 :

$$k_{\text{кас}} = \frac{dy}{dx} \Big|_{M_1} = \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t} \right) \Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} = -1$$

и угловой коэффициент нормали

$$k_{\text{н}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = 1.$$

Пользуясь уравнением прямой, проходящей через данную точку,

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

нетрудно теперь получить уравнение касательной

$$y - 1 = -1 \cdot \left(x - \frac{3\pi+2}{2} \right), \quad \text{или} \quad x + y - \frac{3\pi+4}{2} = 0$$

и уравнение нормали

$$y - 1 = 1 \cdot \left(x - \frac{3\pi+2}{2} \right), \quad \text{или} \quad x - y - \frac{3\pi}{2} = 0.$$

С помощью формулы (78) можно находить и производные высших порядков функций, заданных параметрически. Покажем, как

найти вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$. По определению второй производной $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$. Учитывая, что $\frac{dy}{dx}$ по формуле (78) находится как некоторая функция параметра t , $\frac{dy}{dx} = f(t)$, мы видим, что при нахождении $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ мы должны рассматривать $\frac{dy}{dx}$ как функцию, заданную параметрически:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(t), \\ x &= \varphi(t). \end{aligned} \right\}$$

Поэтому $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ находится по формуле (78), в которой вместо y следует подставить $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'}{x'_t}. \quad (79)$$

Пример 3. Найти вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции y , заданной параметрически:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sin^2 t, \\ y &= \sin 2t. \end{aligned} \right\}$$

Решение. В примере 1 была найдена первая производная $\frac{dy}{dx}$. Рассматривая эту производную как функцию, заданную параметрически:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2 \operatorname{ctg} 2t, \\ x &= \sin^2 t, \end{aligned} \right\}$$

найдем по формуле (79) вторую производную

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'}{x'_t} = \frac{(2 \operatorname{ctg} 2t)'}{(\sin^2 t)'} = \frac{-2 \cdot \frac{2}{\sin^2 2t}}{2 \sin t \cos t} = -\frac{4}{\sin^3 2t}.$$

§ 5. ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

1. Параметрические уравнения пространственной кривой

Кривая в пространстве, так же как и на плоскости, может быть задана параметрически. Рассмотрим три функции переменной t :

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

имеющие одну и ту же область определения. Каждому значению t из этой области соответствуют определенные значения x , y и z , а следовательно, и определенная точка $M(x; y; z)$ в пространстве. При изменении t точка M описывает некоторую кривую C в пространстве. Условимся говорить, что эта кривая задана параметрически уравнениями (80). Переменную t будем называть *параметром*.

В гл. IV (§ 2, п. 3) уже рассматривались параметрические уравнения прямой в пространстве: $x = mt + x_1$, $y = nt + y_1$, $z = pt + z_1$.

Приведем еще один пример. Рассмотрим кривую, заданную параметрически с помощью уравнений

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= a \sin t, \\ z &= bt. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Эта кривая называется *винтовой линией* (рис. 140).

При любом значении параметра t

$$x^2 + y^2 = a^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2.$$

Это означает, что винтовая линия расположена на цилиндре

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

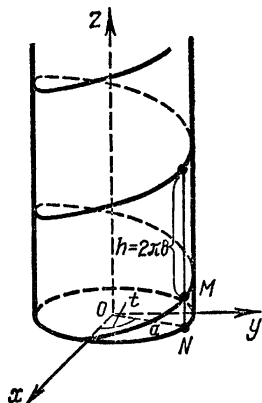


Рис. 140

Отсюда следует, что когда точка M движется по винтовой линии, ее проекция N на плоскость Oxy перемещается по окружности радиуса a , причем t является полярным углом точки N . При увеличении параметра t на 2π точка N описывает полную окружность, а аппликата z точки M винтовой линии изменяется на величину $h = 2\pi b$. Эта величина называется *шагом* винтовой линии.

2. Векторная функция скалярного аргумента и ее производная

Пусть некоторая кривая в пространстве задана параметрически уравнениями (80)

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \right\}$$

Как мы видели, каждому значению параметра t , принадлежащему области определения функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, соответствует определенная точка $M(x; y; z)$, координаты которой находятся по формулам (80). Но каждой точке M соответствует ее радиус-вектор $\mathbf{r} = \overline{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец с точкой M (рис. 141). Проекции этого вектора на координатные оси совпадают с координатами точки M и, следовательно, определяются по формулам (80). Таким образом, каждому значению пара-

метра t из области определения функций (80) соответствует определенный вектор

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (82)$$

Этот вектор $\mathbf{r}$ мы будем называть векторной функцией (или вектор-функцией) скалярного аргумента t и обозначать символом $\mathbf{r}(t)$.

Линия L , описываемая концом радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$, называется *годографом*.

Задание векторной функции $\mathbf{r}(t)$ равносильно заданию трех скалярных функций — его проекций на координатные оси $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

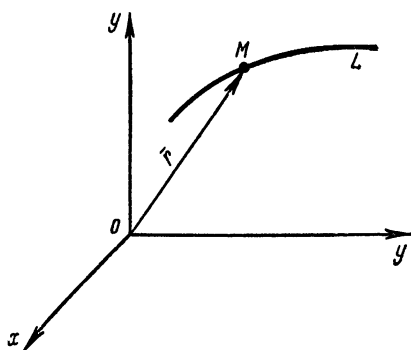


Рис. 141

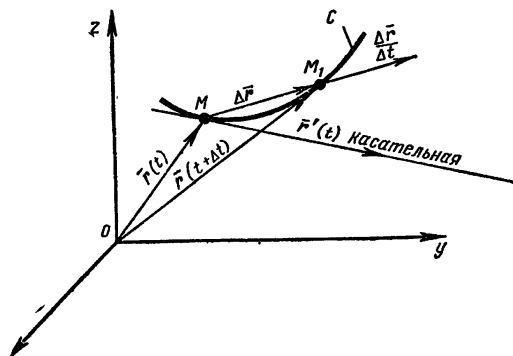


Рис. 142

Введем для вектор-функции понятия предела, непрерывности и производной.

О п р е д е л е н и е. Вектор $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ называется *пределом вектор-функции* $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ при $t \rightarrow t_0$, если $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0.$$

Условимся писать при этом $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$.

Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ определена при $t = t_0$ и в некотором интервале, содержащем t_0 .

О п р е д е л е н и е. Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ называется *непрерывной в точке t_0* , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ является радиусом-вектором точки $M(x; y; z)$, т. е. $\mathbf{r}(t) = \overline{OM}$ (рис. 142). При изменении параметра t точка M описывает годограф C . Выберем и зафиксируем значение параметра t . Ему соответствует вектор $\mathbf{r}(t)$ и точка M .

Рассмотрим другое значение параметра $t + \Delta t$. Ему соответствует вектор $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ и точка M_1 . Рассмотрим вектор $\Delta \mathbf{r} = \overline{MM_1}$, равный разности векторов $\mathbf{r}(t + \Delta t) = \overline{OM_1}$ и $\mathbf{r}(t) = \overline{OM}$:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

и назовем его приращением вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке t . Рассмотрим отношение $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$. Оно представляет собой вектор, коллинеарный вектору $\Delta \mathbf{r}$, так как отличается от него скалярным множителем $\frac{1}{\Delta t}$.

Определение. Производной вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ по скалярному аргументу t называется новый вектор, равный пределу отношения приращения вектор-функции $\Delta \mathbf{r}$ к соответствующему приращению аргумента Δt при условии, что Δt стремится к нулю.

Производную вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ будем обозначать символом $\mathbf{r}'(t)$, или $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

Таким образом, по определению

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (83)$$

Выразим производную вектор-функции $\mathbf{r}'(t)$ через ее проекции на оси координат.

Так как

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}$$

и

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t) \mathbf{i} + y(t + \Delta t) \mathbf{j} + z(t + \Delta t) \mathbf{k},$$

то

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = [x(t + \Delta t) - x(t)] \mathbf{i} + [y(t + \Delta t) - y(t)] \mathbf{j} + [z(t + \Delta t) - z(t)] \mathbf{k}$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \mathbf{k}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \mathbf{j} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} + \\ &+ \mathbf{k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = x'(t) \mathbf{i} + y'(t) \mathbf{j} + z'(t) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t) \mathbf{i} + y'(t) \mathbf{j} + z'(t) \mathbf{k}. \quad (84)$$

3. Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к пространственной кривой

Выясним направление вектора $\mathbf{r}'(t)$. Вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$, коллинеарный вектору $\Delta \mathbf{r}$, направлен по секущей MM_1 (рис. 142). Когда $\Delta t \rightarrow 0$, точка M_1 неограниченно приближается к точке M , а секущая MM_1 неограниченно приближается к касательной L к кривой C в точке M .

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{r}'(t)$ направлен по касательной к геодезическому радиусу-вектору $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t)$.

Найдем уравнения касательной к пространственной кривой, заданной параметрически уравнениями (80), в некоторой ее точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, соответствующей значению параметра $t=t_0$.

Эта касательная есть прямая, проходящая через точку M_0 . Поэтому ее уравнения можно записать в следующей форме (см. гл. IV, § 2, п. 4):

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

где m , n и p — проекции направляющего вектора прямой. Так как вектор

$$\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0)\mathbf{i} + y'(t_0)\mathbf{j} + z'(t_0)\mathbf{k}$$

направлен по касательной к кривой в точке M_0 , то его проекции могут быть приняты за проекции направляющего вектора:

$$m = x'(t_0), \quad n = y'(t_0), \quad p = z'(t_0).$$

Тогда искомое уравнение касательной примет следующий вид:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}. \quad (85)$$

Определение. *Нормальной плоскостью к пространственной кривой называется плоскость, перпендикулярная к касательной прямой и проходящая через точку касания.*

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка касания. Выведем уравнение нормальной плоскости, проходящей через эту точку. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, имеет вид

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0,$$

где A , B и C — проекции вектора $\mathbf{N}\{A; B; C\}$ — нормального к этой плоскости (см. гл. IV, § 1, п. 2). Но из определения нормальной плоскости вытекает, что за вектор $\mathbf{N}$ можно принять вектор $\mathbf{r}'(t_0)\{x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)\}$. Поэтому $A = x'(t_0)$, $B = y'(t_0)$, $C = z'(t_0)$. В таком случае искомое уравнение нормальной плоскости запишется в следующей форме:

$$x'(t_0) \cdot (x-x_0) + y'(t_0) \cdot (y-y_0) + z'(t_0) \cdot (z-z_0) = 0. \quad (86)$$

Пример. Найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к винтовой линии

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \cos t, \\ y &= 2 \sin t, \\ z &= \frac{t}{\pi} \end{aligned} \right\}$$

в точке M_0 , соответствующей значению параметра $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Находим координаты точки касания:

$$x_0 = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0; \quad y_0 = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2; \quad z_0 = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Находим проекции вектора $\mathbf{r}'(t_0)$:

$$x'(t_0) = (2 \cos t)' \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -2 \sin \frac{\pi}{2} = -2;$$

$$y'(t_0) = (2 \sin t)' \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$z'(t_0) = \left(\frac{t}{\pi}\right)' \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}.$$

По формулам (85) и (86) находим уравнения касательной прямой

$$\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{\pi}}$$

и нормальной плоскости

$$-2(x-0) + 0 \cdot (y-2) + \frac{1}{\pi} \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

или

$$4\pi x - 2z + 1 = 0.$$

4. Механический смысл первой и второй производных векторной функции скалярного аргумента

Выясним механический смысл первой производной вектор-функции. Пусть материальная точка движется по кривой, описываемой концом вектора-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, (т. е. по годографу вектора $\mathbf{r}$), причем параметр t означает время движения.

Скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ движения материальной точки в момент t называется вектор, направленный по касательной к траектории в сторону движения и равный по модулю $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, где Δs — путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt , начиная с момента t .

Покажем, что производная $\mathbf{r}'(t)$ радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ движущейся точки равна скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ движения этой точки.

В п. 3 было установлено, что вектор $\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ направлен по касательной к годографу вектора $\mathbf{r}$. При этом вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$, а следовательно, и вектор $\mathbf{r}'(t)$ направлен в сторону движения точки (см. рис. 142). Таким образом, вектор $\mathbf{r}'(t)$ имеет одинаковое направление с вектором скорости $\mathbf{v}$. Покажем, что модули этих векторов также одинаковы. Действительно, обозначив через Δs длину дуги (т. е. путь, пройденный точкой за время $\Delta t > 0$), получим

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right| \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где $|\Delta \mathbf{r}|$ — длина хорды MM_1 , а Δs — длина соответствующей дуги $\widehat{MM}_1$. В дальнейшем (см. гл. VIII, § 3, п. 6) будет показано, что

предел отношения длины дуги к длине стягивающей ее хорды равен единице: $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} = 1$. Но тогда $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} = 1$ и, следовательно,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Так как по определению скорости $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = |\mathbf{v}|$, а, с другой стороны, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = |\mathbf{r}'(t)|$, то

$$|\mathbf{r}'(t)| = |\mathbf{v}(t)|.$$

Таким образом, векторы $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ имеют одинаковое направление и равные модули. Поэтому

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t). \quad (87)$$

Итак, производная $\mathbf{r}'(t)$ вектор-функции равна скорости $\mathbf{v}(t)$ движения материальной точки в данный момент времени t .

В этом заключается механический смысл первой производной вектор-функции скалярного аргумента. Производная $\mathbf{r}'(t)$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ есть, в свою очередь, вектор-функция скалярного аргумента t , которую, вообще говоря, также можно дифференцировать.

Производная по скалярному аргументу t от $\mathbf{r}'(t)$ называется второй производной вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ и обозначается символом $\mathbf{r}''(t)$ или $\frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2}$.

Итак,

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{d\mathbf{r}'(t)}{dt}.$$

Мы видели, что $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t)$. Следовательно,

$$\mathbf{r}''(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}. \quad (88)$$

Вектор $\mathbf{a}(t)$, равный производной скорости $\mathbf{v}(t)$ по времени t , называется ускорением.

Таким образом, вторая производная $\mathbf{r}''(t)$ вектор-функции равна ускорению движения материальной точки в данный момент времени t .

В этом заключается механический смысл второй производной вектор-функции скалярного аргумента.

Пример. Найти скорость и ускорение материальной точки M , движущейся с постоянной угловой скоростью ω по окружности $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 143).

Решение. Обозначив через φ угол радиуса-вектора точки M с осью Ox , получим по условию $\frac{\varphi}{t} = \omega$, или $\varphi = \omega t$, где t — время движения. Это позволяет координаты x и y точки M выразить как

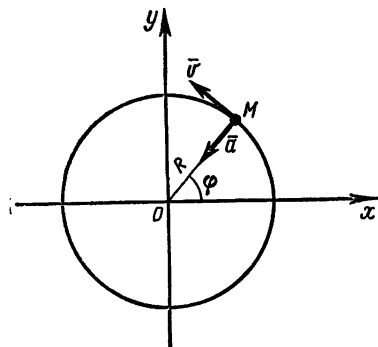


Рис. 143

функции времени t :

$$x = R \cos \varphi = R \cos \omega t; \quad y = R \sin \varphi = R \sin \omega t.$$

Следовательно, радиус-вектор точки M

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = R \cos \omega t \cdot \mathbf{i} + R \sin \omega t \cdot \mathbf{j}.$$

Теперь легко находим скорость $\mathbf{v}(t)$ точки M :

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t) = (R \cos \omega t)' \mathbf{i} + (R \sin \omega t)' \mathbf{j} = -R\omega \sin \omega t \cdot \mathbf{i} + R\omega \cos \omega t \cdot \mathbf{j}.$$

Найдем модуль скорости:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-R\omega \sin \omega t)^2 + (R\omega \cos \omega t)^2} = \omega R.$$

Легко убедиться непосредственно, что скалярное произведение векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ равно нулю и, следовательно, векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ взаимно перпендикулярны. Отсюда следует, что вектор $\mathbf{v}$ направлен по касательной к окружности, по которой движется точка M (см. рис. 143).

Найдем теперь ускорение $\mathbf{a}(t)$:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -R\omega^2 \cos \omega t \cdot \mathbf{i} - R\omega^2 \sin \omega t \cdot \mathbf{j}.$$

Так как $R \cos \omega t \cdot \mathbf{i} + R \sin \omega t \cdot \mathbf{j} = \mathbf{r}(t)$, то

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t).$$

Отсюда следует, что векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ имеют противоположные направления.

Таким образом, ускорение материальной точки, движущейся с постоянной угловой скоростью по окружности, в каждый момент времени направлено к центру этой окружности (см. рис. 143).

§ 6. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

1. Теорема Ферма*

Теорема. Пусть функция $f(x)$, определенная в интервале (a, b) , принимает в некоторой точке c этого интервала наибольшее или наименьшее значение. В таком случае, если в точке c существует производная этой функции, то она равна нулю.

Доказательство. Положим для определенности, что $f(c) = M$ есть наибольшее значение функции в интервале (a, b) . Покажем, что $f'(c) = 0$.

По определению производной

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

Так как в точке c функция принимает наибольшее значение, то при любом знаке Δx будем иметь

$$f(c) \geq f(c + \Delta x) \text{ и } f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0.$$

* Ферма П. (1601—1665)—французский математик.

Отсюда, если $\Delta x > 0$, то $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0$ и, следовательно,

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0^*.$$

Если же $\Delta x < 0$, то $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0$ и

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0.$$

Таким образом, производная $f'(c)$ не может быть ни положительной, ни отрицательной. Следовательно, $f'(c) = 0$.

Геометрически теорему Ферма можно пояснить следующим образом. Так как производная равна тангенсу угла α , образованного касательной к графику функции с осью абсцисс, то равенство $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha = 0$ указывает на то, что в точке с абсциссой c , где функция имеет наибольшее или наименьшее значение, касательная к графику функции параллельна оси Ox (рис. 144).

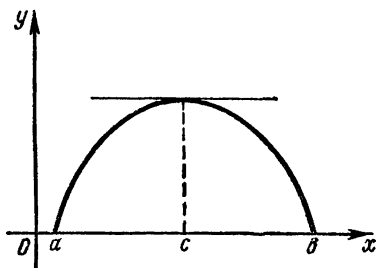


Рис. 144

2. Теорема Ролля**

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, дифференцируема во всех его внутренних точках и на концах сегмента обращается в нуль: $f(a) = f(b) = 0$, то ее производная $f'(x)$ обращается в нуль хотя бы в одной внутренней точке с этого сегмента.

Доказательство. Так как функция непрерывна на сегменте, то она достигает на этом сегменте своего наибольшего значения M и наименьшего значения m (гл. V, § 2, п. 3).

Если $M = m$, то функция постоянна на сегменте $[a, b]$, и, следовательно, ее производная $f'(x) = 0$ в любой точке сегмента. Пусть теперь $M \neq m$, тогда одно из этих чисел, например $M \neq 0$. Поэтому, если наибольшее значение M достигается в точке c : $f(c) = M$, то точка c должна быть внутренней точкой сегмента $[a, b]$, т. е. принадлежать интервалу (a, b) (так как на концах сегмента $f(a) = f(b) = 0$). Следовательно, по теореме Ферма $f'(c) = 0$.

Геометрически теорему Ролля можно пояснить следующим образом: если график непрерывной на сегменте $[a, b]$ и дифференцируемой внутри него функции пересекает ось Ox в двух точках $x = a$ и $x = b$, то между этими точками найдется хотя бы одна точка c , $a < c < b$, в которой касательная к графику параллельна оси абсцисс (см. рис. 144).

* См. гл. V, § 1, п. 6, теорема 7.

** Ролль (1652—1719) — французский математик.

Пример. Рассмотрим на сегменте $[0, \pi]$ функцию $f(x) = \sin x$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: она непрерывна и дифференцируема на сегменте $[0, \pi]$ и обращается в нуль на его концах: $\sin 0 = \sin \pi = 0$. Производная этой функции $f'(x) = \cos x$ обращается в нуль в точке $x = \frac{\pi}{2}$, лежащей внутри сегмента $[0, \pi]$.

З а м е ч а н и е. Если не выполнено требование о дифференцируемости функции $f(x)$ во всех внутренних точках сегмента $[a, b]$, то утверждение теоремы Ролля может оказаться неверным. Например, функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ непрерывна на сегменте $[-1; +1]$ и обращается в нуль на концах сегмента: $f(-1) = f(+1) = 0$.

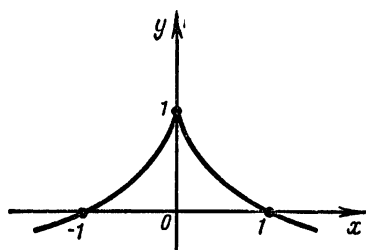


Рис. 145

Однако производная $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

внутри данного сегмента в нуль не обращается. Происходит это потому, что при $x=0$ производная не существует. Из рис. 145 видно, что в этом случае на сегменте $[-1, +1]$ не существует касательной, параллельной оси Ox .

3. Теорема Лагранжа*.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема во всех внутренних его точках, то внутри этого сегмента найдется хотя бы одна точка с такой, что имеет место равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (89)$$

Доказательство. На рис. 146 показан график функции $y = f(x)$. Напишем уравнение хорды AB , воспользовавшись для этого уравнением прямой, проходящей через две точки $A[a; f(a)]$ и $B[b; f(b)]$:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Отсюда определяется ордината хорды

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

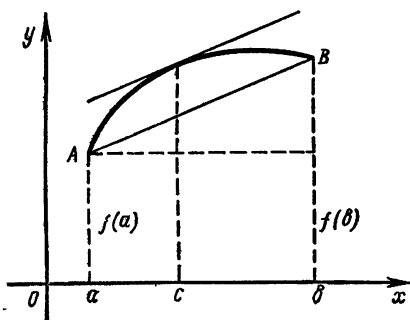


Рис. 146

Рассмотрим теперь вспомогательную функцию $F(x)$, равную разности ординат графика функции и хорды, соответствующих одному и тому же значению x :

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right].$$

* Лагранж (1736—1813)—французский математик.

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, она непрерывна на сегменте $[a, b]$, так как на нем непрерывны функции $f(x)$ и $x-a$. Производная

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (90)$$

существует в интервале (a, b) , так как в нем существует $f'(x)$. На концах сегмента $F(a) = F(b) = 0$. На основании теоремы Ролля внутри сегмента $[a, b]$ найдется такая точка $x = c$, в которой $F'(c) = 0$.

На основании равенства (90) находим:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

что и требовалось доказать.

Теорему Лагранжа можно геометрически пояснить следующим образом. Рассмотрим график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы (см. рис. 146). Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ представляет собой угловой коэффициент хорды AB , соединяющей концы дуги. Так как $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha$ есть угловой коэффициент касательной, то теорема Лагранжа утверждает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна хорде, соединяющей концы дуги. Формулу (89) часто переписывают в виде

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c). \quad (91)$$

Это равенство читается следующим образом.

Приращение дифференцируемой функции на сегменте $[a, b]$ равно длине сегмента (т. е. приращению аргумента), умноженной на значение производной от этой функции в некоторой внутренней точке сегмента.

Формулу (91) называют *формулой Лагранжа* или *формулой о конечном приращении*.

Пример. Функция $f(x) = x^4$ задана на сегменте $[0; 1]$. Определить значение x , при котором касательная к графику параллельна хорде, стягивающей концы дуги графика.

Решение. Так как $f(b) = f(1) = 1$, $f(a) = f(0) = 0$, то по формуле (91) находим

$$1 - 0 = (1 - 0) f'(c) \text{ или } f'(c) = 1.$$

Так как, с другой стороны, $f'(x) = 4x^3$ и, следовательно, $f'(c) = 4c^3$, то $4c^3 = 1$ и $c = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0,63$.

Как известно, производная постоянной $y = c$ равна нулю. Докажем с помощью теоремы Лагранжа обратное предложение.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет во всех его внутренних точках производную $f'(x) = 0$, то функция $f(x)$ постоянна на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. Пусть x — произвольная точка сегмента, не совпадающая с точкой a . Напишем формулу Лагранжа (91) применительно к сегменту $[a; x]$: $f(x) - f(a) = (x - a)f'(c)$, где c — некоторая точка между a и x . Так как c принадлежит сегменту $[a; b]$, то $f'(c) = 0$. Следовательно, $f(x) - f(a) = 0$, т. е. $f(x) = f(a)$ для произвольной точки x сегмента $[a; b]$, а это означает, что функция $f(x)$ постоянна на сегменте $[a; b]$.

Следствие. Если производные двух функций $\Phi(x)$ и $F(x)$ равны во всех точках сегмента $[a; b]$, то разность этих функций постоянна на этом сегменте.

Доказательство. Пусть $f(x) = \Phi(x) - F(x)$. Тогда $f'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = 0$, так как по условию $\Phi'(x) = F'(x)$. Следовательно, на основании только что доказанной теоремы $f(x) = \Phi(x) - F(x)$ постоянна на сегменте $[a; b]$.

4. Правило Лопиталья*

В гл. V мы познакомились с приемами нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций, т. е. раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Здесь будет рассмотрено новое правило для раскрытия этих неопределенностей, называемое *правилом Лопиталья*.

Теорема (правило Лопиталья). Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции, дифференцируемые в некоторой окрестности точки c , за исключением, быть может, самой точки c , и пусть при $x \rightarrow c$ эти функции обе стремятся к нулю или обе стремятся к бесконечности. В таком случае, если отношение их производных $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ имеет предел при $x \rightarrow c$, то этот же предел будет иметь и отношение самих функций $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}^{**}. \quad (92)$$

Эту теорему приводим без доказательства.

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{1} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 5x = 5.$$

* Г. Лопиталь (1661—1704) — французский математик.

** Теорема остается справедливой и в том случае, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ одновременно стремятся к 0 или ∞ при $x \rightarrow \pm \infty$, а также при $x \rightarrow c \neq 0$ и $x \rightarrow c = 0$.

Если отношение производных опять представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то можно снова применить доказанную теорему, т. е. перейти к отношению вторых производных и т. д.

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$.

Решение. Здесь числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16 \cos 4x}{2} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = 8.$$

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$.

Решение. Здесь числитель и знаменатель представляют собой бесконечно большие функции при $x \rightarrow +\infty$. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{e^x} = 0.$$

Аналогично можно показать, что вообще

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{e^x} = 0,$$

т. е. многочлен любой степени растет медленнее показательной функции.

Кроме рассмотренных случаев неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, встречаются еще неопределенности следующих видов.

Неопределенность вида $\infty - \infty$. Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - \varphi(x)]^*$, когда $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются бесконечно большими функциями одного знака, т. е. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) = \infty$.

Этот случай преобразованием выражения $f(x) - \varphi(x)$ сводится к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$.

Решение. Так как при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\sec x \rightarrow \infty$ и $\operatorname{tg} x \rightarrow \infty$, то имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Выполним следующие преобразования:

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}.$$

При $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ числитель и знаменатель в последнем выражении одно-

* Здесь и в дальнейшем под c следует понимать как число, так и бесконечность.

временно стремятся к нулю. Таким образом, получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталья, найдем

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

Итак, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) = 0$.

Неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \varphi(x)]$, если $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) = \infty$. Этот случай также преобразованием выражения $f(x) \varphi(x)$ сводится к раскрытию неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \operatorname{tg} 2x [\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x]$.

Решение. Так как при $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ $\operatorname{tg} 2x \rightarrow \infty$ и $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x \rightarrow 0$, то имеем неопределенность вида $\infty \cdot 0$. Преобразуем данное выражение так:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \operatorname{tg} 2x [\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x] = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x}.$$

Так как здесь мы получили уже неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то можем применить правило Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} = -2.$$

Итак, окончательно:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \operatorname{tg} 2x [\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x] = -2.$$

Неопределенность вида 1^∞ . Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{\varphi(x)}$, если $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) = \infty$.

Неопределенность вида 0^0 . Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{\varphi(x)}$, если $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) = 0$.

Неопределенность вида ∞^0 . Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{\varphi(x)}$, если $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow c} \varphi(x) = 0$.

Неопределенности вида 1^∞ , 0^0 и ∞^0 приводятся к случаям неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ обычно с помощью логарифмирования выражения $[f(x)]^{\varphi(x)}$.

Пример 6. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. В этом случае $(1+x^2) \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, и мы имеем неопределенность вида ∞^0 . Обозначим $y = (1+x^2)^{1/x}$. Логарифмируя, находим

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln(1+x^2) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}.$$

Так как при $x \rightarrow +\infty$, числитель и знаменатель стремятся к бесконечности, то получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

Так как $\ln y$ функция непрерывная, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln y) = \ln(\lim_{x \rightarrow +\infty} y)$; следовательно, $\ln(\lim_{x \rightarrow +\infty} y) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$. Итак, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)^{1/x} = 1$.

Замечание. Согласно правилу Лопиталя, если существует предел отношения производных данных функций, то существует предел отношения самих функций. Если же предел отношения производных не существует, то это еще не означает, что не существует предел отношения самих функций. Рассмотрим, например, две бесконечно большие функции при $x \rightarrow +\infty$: $f(x) = x + \sin x$ и $\varphi(x) = x$. Предел их отношения при $x \rightarrow +\infty$ существует, так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

Однако, предел отношения производных данных функций

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = 1 + \cos x$$

не существует, так как $\cos x$ при $x \rightarrow +\infty$ не имеет предела.

§ 7. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЮ ГРАФИКОВ

1. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции

Напомним приведенные в гл. V § 2 п. 4 определения возрастающей и убывающей функций.

Функция $y = f(x)$, определенная на сегменте (или интервале), называется *возрастающей* на этом сегменте (или интервале), если из неравенства $x_2 > x_1$, где x_2 и x_1 — любые две точки, принадлежащие сегменту (или интервалу), следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ (см. рис. 121).

Введя обозначения $x_2 = x_1 + \Delta x$ и $f(x_2) - f(x_1) = \Delta y$, замечаем, что Δx и Δy имеют одинаковые знаки. Следовательно, для возрастающей функции отношение приращений функции и аргумента всегда положительно, т. е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$.

Функция $y = f(x)$, определенная на сегменте (или интервале), называется убывающей на этом сегменте (или интервале), если из неравенства $x_2 > x_1$, где x_2 и x_1 — любые две точки, принадлежащие сегменту, следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$ (см. рис. 121).

В этом случае приращения $\Delta x = x_2 - x_1$ и $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ имеют разные знаки и поэтому для убывающей функции отношение приращений отрицательно, т. е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции в интервале.

Теорема 1 (необходимое условие возрастания функции). *Если дифференцируемая в интервале (a, b) функция $y = f(x)$ возрастает, то ее производная не может быть отрицательной ни в одной точке данного интервала, т. е. $f'(x) \geq 0$ для $a < x < b$.*

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ функция, возрастающая в интервале (a, b) . Рассмотрим две точки x и $x + \Delta x$, принадлежащие интервалу (a, b) . Тогда, как было указано выше,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0^*$. Так как по предположению функция дифференци-

руема, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ и, следовательно, $f'(x) \geq 0$.

Подобным же образом доказывается следующая теорема.

Теорема 2 (необходимое условие убывания функции). *Если дифференцируемая в интервале (a, b) функция $y = f(x)$ убывает, то ее производная не может быть положительной ни в одной точке данного интервала, т. е. $f'(x) \leq 0$ для $a < x < b$.*

Рассмотренные теоремы можно наглядно иллюстрировать геометрически. Действительно, график возрастающей функции при движении вправо по оси абсцисс поднимается вверх. В таком случае касательные к графику образуют острые углы α с положительным направлением оси Ox , или, быть может, в некоторых точках (например, в точке x_1) параллельны оси Ox (рис. 147, а).

Так как тангенсы острых углов положительны (а в тех точках, где касательные параллельны оси Ox , равны нулю) и так как по геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$, то для возрастающей функции $f'(x) \geq 0$.

Аналогично, если функция убывает (рис. 147, б), то касательные образуют с осью Ox тупые углы α , или в некоторых точках (например, в точке x_2) параллельны оси Ox . Так как тангенсы тупых углов отрицательны, то для убывающей функции $f'(x) \leq 0$.

* Так как предел положительной функции не может быть отрицательным (см. § 1, п. 6, теорема 7).

Теорема 3 (достаточное условие возрастания функции). Если непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $y=f(x)$ в каждой внутренней точке этого сегмента имеет положительную производную, то эта функция возрастает на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$ для всех $a < x < b$. Рассмотрим два произвольных значения x_1 и x_2 из сегмента $[a, b]$, причем $x_2 > x_1$. Напишем формулу Лагранжа (91) применительно к сегменту $[x_1, x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c), \quad x_1 < c < x_2.$$

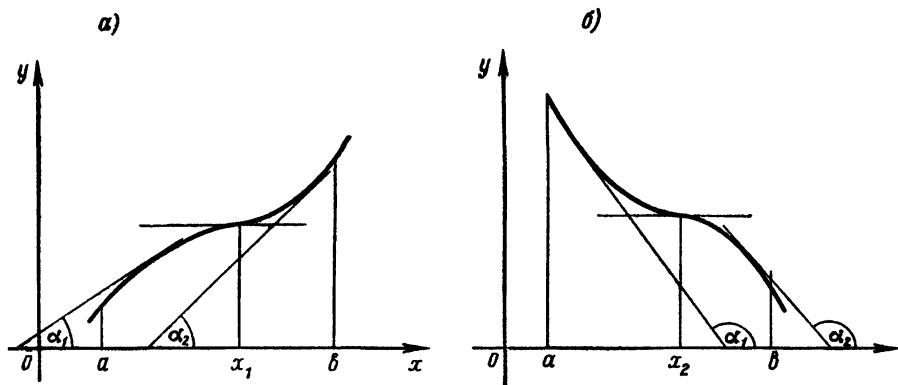


Рис. 147

Во всех точках сегмента $[a, b]$ производная $f'(x) > 0$, поэтому и в точке c $f'(c) > 0$. Так как, кроме того, $x_2 - x_1 > 0$, то произведение $(x_2 - x_1) f'(c) > 0$ и, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Отсюда $f(x_2) > f(x_1)$, т. е. функция $f(x)$ возрастает на сегменте $[a, b]$.

Подобным же образом доказывается следующая теорема.

Теорема 4 (достаточное условие убывания функции). Если непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $y=f(x)$ в каждой внутренней точке этого сегмента имеет отрицательную производную, то эта функция убывает на сегменте $[a, b]$.

Напомним, что функция только возрастающая или только убывающая в каком-либо интервале называется монотонно возрастающей или монотонно убывающей в этом интервале (см. гл. V, § 2, п. 4).

Пример. Определить интервалы монотонности функции

$$y = x^3 - 3x.$$

Решение. Производная функции равна $y' = 3x^2 - 3$. Функция возрастает для всех значений x , при которых $y' > 0$. Решая неравенство $3x^2 - 3 > 0$, находим: $x > 1$ или $x < -1$. Таким образом, функция возрастает в интервалах $-\infty < x < -1$ и $1 < x < +\infty$. Убывает функция для значений x , при которых $y' < 0$. Решая

неравенство $3x^2 - 3 < 0$, находим $x^2 < 1$, или $-1 < x < +1$. Функция убывает в интервале $-1 < x < +1$. График функции $y = x^3 - 3x$ представлен на рис. 148.

2. Максимум и минимум функции

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$, изображенный на рис. 149. Как видно из рисунка, значение функции в точке x_1 будет больше значений функции во всех «соседних» точках как слева, так и справа от x_1 . В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_1 максимум. В точке x_2 функция, очевидно, также имеет максимум.

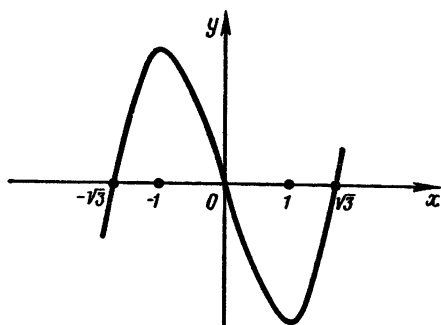


Рис. 148

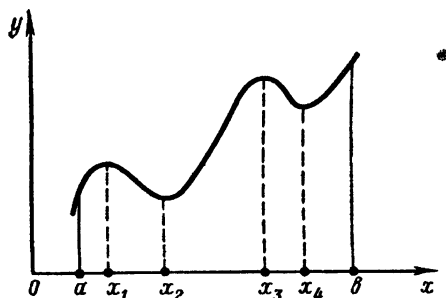


Рис. 149

Определение 1. Функция $y = f(x)$ имеет максимум в точке c , если существует такая окрестность точки c , что для всех точек $x \neq c$, принадлежащих этой окрестности, имеет место неравенство

$$f(x) < f(c). \quad (93)$$

В точке x_2 значение функции меньше всех «соседних» значений. В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_2 минимум. В точке x_4 функция, очевидно, также имеет минимум.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ имеет минимум в точке c , если существует такая окрестность точки c , что для всех точек $x \neq c$, принадлежащих этой окрестности, имеет место неравенство

$$f(x) > f(c). \quad (94)$$

Максимум и минимум объединяются общим названием *экстремум функции*. Следует отметить, что если функция имеет в точке максимум, то это не означает, что в этой точке функция имеет наибольшее значение во всей области ее определения. Из определения максимума следует только то, что это самое большее значение функции в точках, достаточно близких к точке c . Так, на рис. 149 функция в точке x_1 имеет максимум, хотя имеются точки, в которых значение функции больше, чем в точке x_1 . Аналогичное замечание можно сделать относительно минимума функции. В частности, может ока-

заться, что минимум функции будет больше максимума (см. значения функции в точках x_1 и x_4 на рис. 149).

Теорема (необходимый признак существования экстремума функции). Если дифференцируемая в точке $x=c$ функция $y=f(x)$ имеет в этой точке максимум или минимум, то ее производная при $x=c$ обращается в нуль, т. е. $f'(c)=0$.

Доказательство. Пусть, например, функция $y=f(x)$ имеет в точке c максимум. Согласно определению максимума, должна существовать окрестность точки c такая, что для всех точек x ($x \neq c$) этой окрестности

$$f(x) < f(c), \quad (95)$$

т. е. значение $f(c)$ будет наибольшим значением функции в этой окрестности. Так как по условию функция имеет в точке c производную $f'(c)$, то по теореме Ферма (п. 1, § 6) должно быть $f'(c)=0$.

Подобным же образом доказывается теорема и для случая минимума функции.

До сих пор рассматривался только случай, когда функция $y=f(x)$ имела производную в точке экстремума. Могут, однако, встретиться случаи, когда в точках экстремума функция не имеет производной. Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. $f(x)=|x|$. График этой функции изображен на рис. 134. При $x=0$ эта функция не имеет производной (см. § 1, п. 5 и 6). Но очевидно, что в точке $x=0$ функция имеет минимум.

Пример 2. $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$. Здесь $f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, и при $x=0$ производная не существует. График функции изображен на рис. 145. Несмотря на то что при $x=0$ производная $f'(0)$ не существует (терпит бесконечный разрыв), функция при $x=0$ имеет максимум.

Рассмотренные примеры позволяют дополнить сформулированный необходимый признак существования экстремума следующим образом.

Если непрерывная функция $y=f(x)$ имеет в точке $x=c$ экстремум, то производная функции $f'(x)$ обращается в этой точке в нуль или не существует.

Следует отметить, что условие $f'(c)=0$ (или $f'(c)$ не существует), будучи необходимым для существования экстремума, не является достаточным. Например, функция $f(x)=x^3$ имеет производную $f'(x)=3x^2$, обращающуюся в нуль при $x=0$, однако при $x=0$ функция не имеет экстремума (см. рис. 19).

Определение. Значение аргумента $x=c$, при котором производная обращается в нуль или терпит разрыв (в частности, обращается в бесконечность), называется критическим (критическая точка).

Таким образом, экстремум функции, если он существует, может иметь место только в критических точках. Однако, как мы видели, не во всякой критической точке функция имеет экстремум.

Рассмотрим теперь так называемые достаточные условия существования экстремума, обеспечивающие его наличие в критической точке.

Предварительно условимся для дальнейшего, в тех случаях, когда производная слева от критической точки имеет один знак, а справа от нее—другой знак, говорить, что *производная при переходе через критическую точку меняет знак*.

Теорема (достаточный признак существования экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку c (за исключением, может быть, самой точки c), и если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку c меняет знак с плюса на минус, то функция в точке c имеет максимум, а при перемене знака с минуса на плюс—минимум.

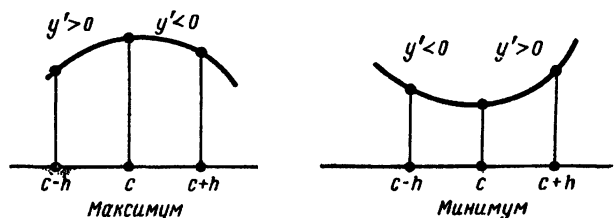


Рис. 150

Доказательство. Пусть c —критическая точка и пусть, для определенности, при переходе аргумента через точку c производная меняет знак с плюса на минус, т. е. слева от c производная положительна, а справа от c —отрицательна. Это значит, что существует достаточно малое $h > 0$ такое, что $f'(x) > 0$, если $c-h < x < c$, и $f'(x) < 0$, если $c < x < c+h$.

На основании теорем о возрастании и убывании функции заключаем, что $f(x)$ возрастает на сегменте $[c-h, c]$ и убывает на сегменте $[c, c+h]$.

Следовательно, в точке c функция будет иметь значение большее, чем значение функции во всех точках сегмента $[c-h, c+h]$, а это и означает, что в точке c функция имеет максимум.

Аналогично доказывается теорема и в случае минимума (рис. 150).

З а м е ч а н и е. Если производная $f'(x)$ не меняет знака при переходе через критическую точку, то функция в этой точке не имеет ни максимума, ни минимума.

Рассмотрим примеры на нахождение максимума и минимума функций.

Пример 1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

Решение. Эта функция определена и дифференцируема на всей числовой оси.

1. Находим производную:

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3.$$

2. Приравниваем производную нулю и находим корни производной (критические точки):

$$x^2 - 4x + 3 = 0; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Эти числа разбивают всю область определения данной функции на три интервала: $-\infty < x < 1$, $1 < x < 3$, $3 < x < +\infty$.

3. В каждом из этих интервалов производная сохраняет свой знак (так как смена знака может произойти только при переходе через критическую точку). Поэтому при исследовании знака производной в каждом интервале достаточно взять любую точку этого интервала.

В интервале $-\infty < x < 1$ берем, например, точку $x = 0$. В этой точке $f'(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$. Поэтому во всем интервале $-\infty < x < 1$ производная положительна.

Аналогично находим, что в интервале $1 < x < 3$ производная отрицательна, а в интервале $3 < x < +\infty$ производная положительна.

Так как при переходе через критическую точку $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум. Вычисляем его:

$$y_{\max} = f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = \frac{7}{3}.$$

При переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак с минуса на плюс, а следовательно, в этой точке функция имеет минимум:

$$y_{\min} = f(3) = \frac{1}{3} \cdot 27 - 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 1 = 1.$$

Полученные результаты запишем в таблицу:

x	$-\infty < x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$3 < x < +\infty$
y'	+	0	—	0	+
y	возрастает	максимум $y_{\max} = \frac{7}{3}$	убывает	минимум $y_{\min} = 1$	возрастает

График функции изображен на рис. 151.

Пример 2. $f(x) = xe^x$.

Решение. Эта функция определена и дифференцируема на всей числовой оси.

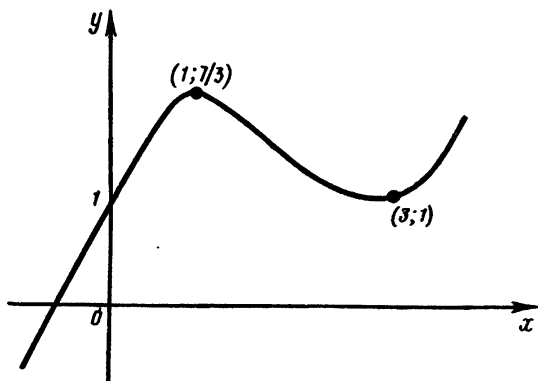


Рис. 151

1. Находим производную: $f'(x) = e^x(x+1)$.

2. Приравниваем производную нулю и находим корни производной:

$$f'(x) = 0, \quad e^x(x+1) = 0, \quad x = -1.$$

Это число разбивает всю область определения функции на два интервала: $-\infty < x < -1$, $-1 < x < +\infty$.

3. Исследуем знаки производной в каждом из этих интервалов.

В интервале $-\infty < x < -1$ берем, например, значение $x = -2$, тогда

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \\ &= e^{-2}(-2+1) = -\frac{1}{e^2} < 0. \end{aligned}$$

В интервале $-1 < x < +\infty$ для значения $x = 0$ имеем:

$$f'(0) = e^0(0+1) = e^0 = 1 > 0.$$

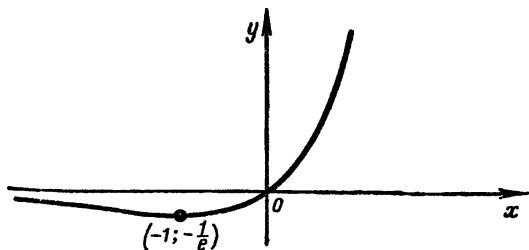


Рис. 152

Так как при переходе через точку $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс, то при $x = -1$ функция имеет минимум:

$$y_{\min} = f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,37.$$

Полученные данные запишем в таблицу:

x	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < +\infty$
y'	—	0	+
y	убывает	минимум $y_{\min} = -\frac{1}{e} \approx -0,37$	возрастает

График функции $y = xe^x$ изображен на рис. 152.

3. Достаточный признак существования экстремума, основанный на знаке второй производной

В некоторых случаях при исследовании функции на экстремум оказывается удобным следующий достаточный признак существования экстремума, основанный на знаке второй производной.

Теорема. Пусть в точке $x = c$ первая производная функции $f(x)$ равна нулю [$f'(c) = 0$], а вторая производная существует и отлична от нуля [$f''(c) \neq 0$]. В таком случае если $f''(c) < 0$, то в точке c функция имеет максимум, если же $f''(c) > 0$, то в точке c функция имеет минимум.

Доказательство. Пусть для определенности $f''(c) < 0$. Покажем, что в точке c функция имеет максимум. На основании определения второй производной имеем:

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(c + \Delta x) - f'(c)}{\Delta x}.$$

Так как по условию $f'(c) = 0$, то

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Но $f''(c) < 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x} < 0.$$

Так как предел отрицателен, то для малых по абсолютной величине значений Δx будет выполняться неравенство

$$\frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x} < 0.$$

Пусть $\Delta x < 0$; тогда $f'(c + \Delta x) > 0$; если же $\Delta x > 0$, то $f'(c + \Delta x) < 0$. Это показывает, что при переходе через точку c первая производная меняет свой знак с плюса на минус. Следовательно, на основании достаточного признака существования экстремума, рассмотренного в предыдущем пункте, функция $f(x)$ имеет в точке c максимум. Аналогично доказывается, что если $f''(c) > 0$, то в точке c функция имеет минимум.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти экстремум функции $f(x) = x - 2 \sin x$ на сегменте $[0, 2\pi]$.

Решение. 1. Находим производную $f'(x) = 1 - 2 \cos x$.

2. Приравниваем производную нулю и находим корни производной:

$$1 - 2 \cos x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{3}.$$

3. Находим вторую производную $f''(x) = 2 \sin x$ и определяем ее знак в точках $x_1 = \frac{\pi}{3}$; $x_2 = \frac{5\pi}{3}$. В точке $x_1 = \frac{\pi}{3}$ имеем: $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 0$. В точке $x_2 = \frac{5\pi}{3}$ имеем: $f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2 \sin \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3} < 0$.

Следовательно, в точке $x_1 = \frac{\pi}{3}$ функция имеет минимум:

$$y_{\min} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0,68,$$

а в точке $x_2 = \frac{5\pi}{3}$ — максимум:

$$y_{\max} = \frac{5\pi}{3} - 2 \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6,96.$$

В тех случаях, когда в критической точке вторая производная обращается в нуль или не существует, второй достаточный признак

существования экстремума не применим. В этих случаях приходится пользоваться достаточным признаком, основанным на перемене знака первой производной.

Пример 2. Найти экстремум функции $f(x) = x^4$.

Решение. Данная функция определена и дифференцируема на всей числовой оси.

1. Находим производную $f'(x) = 4x^3$.

2. Приравниваем производную нулю и находим ее корни:

$$f'(x) = 0, \quad 4x^3 = 0, \quad x = 0.$$

3. Находим вторую производную $f''(x) = 12x^2$. В критической точке $x = 0$ вторая производная тоже обращается в нуль. В этом случае рассмотренный достаточный признак не применим. Применяя первый достаточный признак, основанный на смене знака первой производной, убеждаемся, что при $x = 0$ функция имеет минимум, так как проходя через точку $x = 0$ первая производная меняет знак с минуса на плюс (см. рис. 20).

4. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на сегменте $[a, b]$. Как известно, такая функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений либо на границе сегмента, либо внутри него (гл. V, § 2, п. 3). Если наибольшее (или наименьшее) значение функции достигается во внутренней точке c сегмента, то это значение является максимумом (или минимумом) функции, так как неравенство $M = f(c) \geq f(x)$ (или $m = f(c) \leq f(x)$), имеющее место для всех точек x сегмента $[a, b]$, выполняется и для любой окрестности точки c , лежащей внутри сегмента $[a, b]$ (см. рис. 150).

Таким образом, получаем следующее **правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на сегменте $[a, b]$.**

1. Находим все критические точки функции в интервале (a, b) и вычисляем в них значение функции.

2. Вычисляем значения функции на концах сегмента — в точках $x = a$ и $x = b$.

3. Из всех этих значений выбираем наибольшее и наименьшее.

Замечание. Очевидно, если непрерывная на сегменте функция имеет во внутренней точке этого сегмента только один экстремум, то в этой точке она имеет наибольшее значение в случае максимума и наименьшее — в случае минимума.

Пример. Найти наибольшее и наименьшие значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на сегменте $[-1,5; 2,5]$.

Решение. 1. Находим все критические точки функции на интервале $(-1,5; 2,5)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad 3x^2 - 3 = 0. \quad \text{Отсюда } x_1 = -1, \quad x_2 = +1.$$

Вычисляем значения функции в этих точках:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2, \quad f(+1) = 1 - 3 = -2.$$

2. Вычисляем значения функции на концах сегмента:

$$f(-1,5) = (-1,5)^3 - 3(-1,5) = 1,125;$$

$$f(2,5) = 2,5^3 - 3 \cdot 2,5 = 8,125.$$

Таким образом, наибольшее значение функции $y_{\text{наиб}} = 8,125$ достигается на правом конце сегмента. Наименьшее значение функции $y_{\text{наим}} = -2$ и достигается в точке $x = 1$.

5. Применение теории максимума и минимума к решению задач

Изложенную теорию максимума и минимума функции можно применить к решению практических задач.

Пример 1. Из квадратного листа жести со стороной a требуется сделать открытый сверху ящик, возможно большего объема, вырезая равные квадратные уголки и загибая жечь (рис. 153). Какова должна быть сторона вырезаемых квадратных уголков?

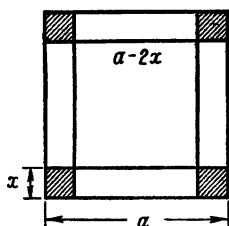


Рис. 153

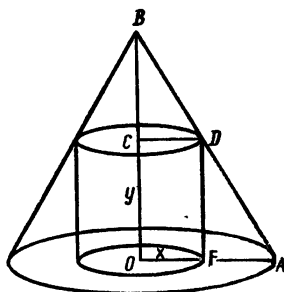


Рис. 154

Решение. Пусть сторона вырезаемого квадрата равна x , тогда сторона квадрата, образующего дно ящика, будет $a - 2x$. Объем ящика

$$V = (a - 2x)^2 \cdot x = a^2x - 4ax^2 + 4x^3.$$

Для решения этой задачи нужно найти, при каком x эта функция имеет наибольшее значение на интервале $(0, \frac{a}{2})$. Находим производную $V' = a^2 - 8ax + 12x^2$. Приравниваем производную нулю и, решая уравнение, находим критические точки, принадлежащие интервалу $(0, \frac{a}{2})$:

$$a^2 - 8ax + 12x^2 = 0.$$

Отсюда $x = \frac{a}{6}$ *. Так как при $x = \frac{a}{6}$ вторая производная $V'' =$

* Второй корень $x = \frac{a}{2}$ не принадлежит интервалу $(0, \frac{a}{2})$.

$= -8a + 24x$ отрицательна $\left(V''\left(\frac{a}{6}\right) = -8a + 24 \cdot \frac{a}{6} = -4a < 0\right)$, то в точке $x = \frac{a}{6}$ объем достигает максимума:

$$V_{\max} = \left(a - \frac{2a}{6}\right)^2 \frac{a}{6} = \frac{2}{27} a^3.$$

Согласно замечанию п. 4, этот максимум функции является ее наибольшим значением. Итак, коробка будет иметь наибольший объем, если сторона вырезанного квадрата равна $\frac{a}{6}$.

Пример 2. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в данный прямой конус (рис. 154).

Решение. Пусть высота конуса $OB = h$ и радиус основания конуса $OA = R$. Высоту цилиндра OC обозначим через y , а радиус основания OF через x . Объем цилиндра $V = \pi x^2 y$. В данном случае объем V зависит от двух переменных x и y . Однако можно составить еще уравнение, связывающее эти переменные.

Из подобия треугольников AOB и DCB находим

$$DC:CB = OA:OB \text{ или } x:(h-y) = R:h.$$

Отсюда

$$x = \frac{R(h-y)}{h}.$$

Подставляя это значение x в выражение для объема цилиндра, получаем

$$V = \frac{\pi R^2}{h^2} (h-y)^2 \cdot y.$$

Очевидно, что переменная y может принимать значения от 0 до h . Найдем наибольшее значение этой функции на интервале $(0, h)$.

Находим производную от функции V по переменной y :

$$V' = \frac{\pi R^2}{h^2} (h^2 - 4hy + 3y^2).$$

Приравниваем производную нулю и находим критические точки на интервале $(0, h)$:

$$V' = 0, \quad h^2 - 4hy + 3y^2 = 0, \quad y_1 = \frac{h}{3};$$

($y_2 = h$ не принадлежит интервалу $(0, h)$).

Так как вторая производная $V'' = \frac{\pi R^2}{h^2} (-4h + 6y)$ при $y = \frac{h}{3}$ отрицательна, то при $y = \frac{h}{3}$ объем V имеет максимум. Это максимальное значение будет наибольшим.

6. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Изучим теперь некоторые свойства графика функции, связанные с понятиями выпуклости и вогнутости.

Определение 1. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *выпуклым* в интервале (a, b) , если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале.

Определение 2. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *вогнутым* в интервале (a, b) , если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале.

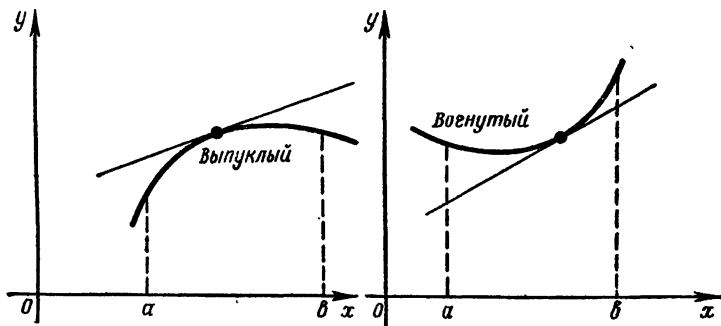


Рис. 155

На рис. 155 изображены выпуклый и вогнутый графики функций.

Так, например, полуокружность $y = +\sqrt{1-x^2}$ будет выпукла на сегменте $[-1, +1]$, а парабола $y=x^2$ вогнута в интервале $(-\infty, +\infty)$.

График функции в одних интервалах может быть выпуклым, а в других — вогнутым. Например, график функции $y = \sin x$, рассматриваемый в интервале от 0 до 2π , будет выпуклым в интервале $(0, \pi)$ и вогнутым в интервале $(\pi, 2\pi)$ (см. рис. 124).

Рассмотрим теперь достаточный признак, позволяющий устанавливать, будет ли график функции в данном интервале выпуклым или вогнутым.

Теорема. Пусть функция $y=f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ во всех точках интервала (a, b) . Если во всех точках этого интервала $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый, если же $f''(x) > 0$ — вогнутый.

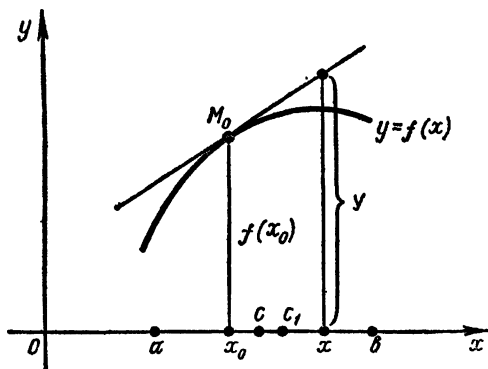


Рис. 156

Доказательство. Допустим для определенности, что $f''(x) < 0$, и докажем, что график будет выпуклым. Возьмем на графике функции произвольную точку M_0 с абсциссой x_0 , принадлежащей интервалу (a, b) , и проведем через точку M_0 касательную (рис. 156). Для доказательства теоремы мы должны установить, что график функции в интервале (a, b) расположен ниже этой касательной. Другими

словами, мы должны показать, что для одной и той же абсциссы x ордината кривой будет меньше ординаты касательной. Уравнение графика будет $y = f(x)$. Уравнение касательной в точке M_0 имеет вид

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Здесь через Y обозначена ордината касательной, соответствующая абсциссе x .

Разность ординат графика и касательной при одной и той же абсциссе x будет:

$$y - Y = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)],$$

или

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Разность $f(x) - f(x_0)$ преобразуем по формуле Лагранжа (91):

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(c),$$

где c заключено между x_0 и x .

Тогда

$$y - Y = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]. \quad (96)$$

Разность $f'(c) - f'(x_0)$ снова преобразуем по формуле (91), изменяя ее к производной $f''(x)$:

$$f'(c) - f'(x_0) = (c - x_0) f''(c_1),$$

где c_1 заключено между x_0 и c , а следовательно, между x_0 и x . Подставляя выражение для разности в равенство (96), получим $y - Y = (x - x_0)(c - x_0) f''(c_1)$. Разности $x - x_0$ и $c - x_0$ имеют одинаковый знак, так как c заключено между x_0 и x следовательно, их произведение

$$(x - x_0)(c - x_0) > 0.$$

Так как по условию $f''(x) < 0$ на интервале (a, b) , то, в частности, $f''(c_1) < 0$. Поэтому $y - Y = (x - x_0)(c - x_0) f''(c_1) < 0$. Итак, доказано, что для всех точек интервала (a, b) ордината касательной больше ординаты графика, т. е. график выпуклый.

Аналогично доказывается, что при $f''(x) > 0$ график будет вогнутый.

Определение. Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется точкой перегиба.

Рассмотрим теперь, как находятся точки перегиба графика функции.

Пусть в точке x_0 функция $y = f(x)$ непрерывна. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема (достаточный признак существования точки перегиба).

Если вторая производная $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через x_0 , то в точке с абсциссой $x = x_0$ график функции имеет точку перегиба.

Доказательство. Пусть, например, $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. В этом случае слева от x_0 график выпуклый,

а справа от x_0 — вогнутый. Следовательно, точка x_0 отделяет интервал выпуклости от интервала вогнутости, т. е. точка $(x_0, f(x_0))$ графика функции является точкой перегиба (рис. 157).

В самой точке x_0 вторая производная либо непрерывна, либо разрывна. В случае непрерывности $f''(x_0) = 0$, так как по условию теоремы $f''(x_0)$ при переходе через x_0 меняет свой знак.

Поэтому точки перегиба следует искать только среди таких точек, где вторая производная обращается в нуль, или разрывна (в частности, не определена).

Пример. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба график функции $f(x) = x^3 - 3x$.

Решение. Находим производные: $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$. Приравниваем вторую производную нулю и находим ее корень: $6x = 0$, откуда $x = 0$. Замечая, что при $x < 0$ $f''(x) = 6x < 0$, а при $x > 0$ $f''(x) = 6x > 0$, заключаем, что в интервале $(-\infty, 0)$ график функции выпуклый, а в интервале $(0, +\infty)$ — вогнутый. Следовательно, при $x = 0$ график функции имеет точку перегиба (см. рис. 148).

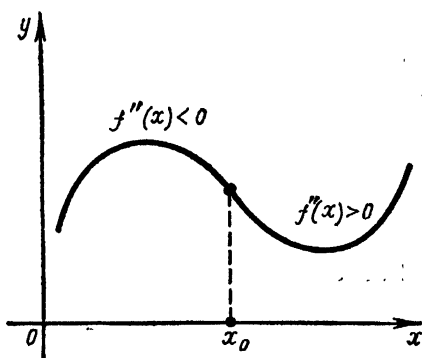


Рис. 157

7. Асимптоты графика функции

При исследовании функции важно установить форму ее графика при неограниченном удалении точки графика от начала координат или, как говорят, при удалении его переменной точки в бесконечность.

Особый интерес представляет случай, когда график функции при удалении его переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая линия, обладающая тем свойством, что расстояние от переменной точки на графике до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат*.

Рассмотрим отдельно случаи асимптот, параллельных оси Ox и не параллельных оси Oy .

Асимптоты, параллельные оси Oy . Пусть при $x \rightarrow x_0$ функция $y = f(x)$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, т. е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$. Тогда из определения асимптоты следует, что прямая $x = x_0$ является асимптотой (рис. 158). Очевидно и обратное, если прямая $x = x_0$ является асимптотой, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

* С понятием асимптоты мы встречались на примере гиперболы (гл. II, § 2, п. 4).

Таким образом, для отыскания асимптот графика функции $y = f(x)$, параллельных оси Oy , надо найти те значения $x = x_0$, при которых функция обращается в бесконечность (терпит бесконечный разрыв). Тогда асимптота, параллельная оси Oy , имеет уравнение $x = x_0$.

Пример 1. Найти асимптоту графика функции $f(x) = x + \frac{1}{x-2}$, параллельную оси Oy .

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(x + \frac{1}{x-2} \right) = \infty$, то прямая $x = 2$ будет асимптотой.

Пример 2. Найти асимптоты графика функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, параллельные оси Oy .

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} (2n+1)} \operatorname{tg} x = \infty$, то график этой функции имеет бесчисленное множество асимптот:

$$x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi, x = \frac{5}{2}\pi, \dots$$

$$x = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{3}{2}\pi, x = -\frac{5}{2}\pi, \dots \quad (\text{см. рис. 26})$$

Асимптоты, не параллельные оси Oy . Пусть график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту, не параллельную оси Oy . Тогда уравнение такой асимптоты имеет вид $y = kx + b$ (в частном случае коэффициент k

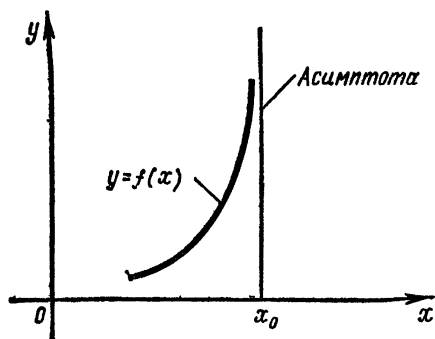


Рис. 158

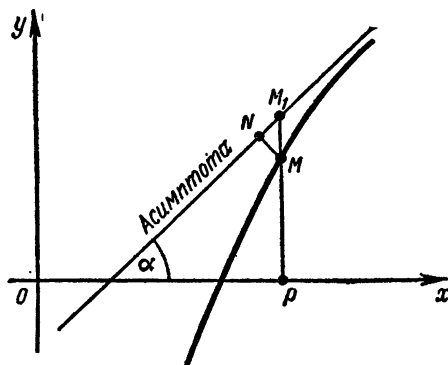


Рис. 159

может равняться нулю — горизонтальная асимптота). Для определения k и b поступим следующим образом. Опустим из точки M графика функции на асимптоту перпендикуляр MN (рис. 159).

Из определения асимптоты следует, что при $x \rightarrow +\infty$ длина $MN \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} MN = 0$. Из треугольника M_1MN имеем: $M_1M =$

$\frac{MN}{\cos \alpha}$, где α угол наклона асимптоты к оси Ox . Так как α постояенно, то M_1M стремится к нулю одновременно с MN , т. е. $\lim_{x \rightarrow +\infty} M_1M = 0$.

Так как

$$M_1 M = P M_1 - P M = y_{\text{асимпт.}} - y_{\text{графика}} = (kx + b) - f(x),$$

то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(kx + b) - f(x)] = 0. \quad (97)$$

Из (97) следует, что разность, стоящая в квадратных скобках, есть бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$: $f(x) - (kx + b) = \beta(x)$.

Делим последнее равенство почленно на x и переходим к пределу:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta(x)}{x}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta'(x)}{x} = 0$, то имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k \right] = 0.$$

Отсюда угловой коэффициент асимптоты

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}. \quad (98)$$

Определим теперь b . Так как

$$f(x) - kx - b = \beta(x),$$

то

$$b = f(x) - kx - \beta(x).$$

Переходя к пределу при $x \rightarrow +\infty$, получим

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]. \quad (99)$$

Здесь k находится по формуле (98).

Таким образом, для нахождения асимптоты, не параллельной оси Oy , надо найти пределы (98) и (99). Можно показать, что и обратно, если пределы (98) и (99) существуют, то прямая $y = kx + b$ есть асимптота.

Если хотя бы один из этих пределов не существует, то график функции $y = f(x)$ асимптоты при $x \rightarrow +\infty$ не имеет.

Аналогично находятся асимптоты при $x \rightarrow -\infty$. Заметим, что пределы вида (98) и (99) могут быть различными при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$, т. е. график функции может иметь две различные асимптоты, не параллельные оси Oy , при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Следовательно, асимптот, параллельных оси Oy , график не имеет.

Находим асимптоты, не параллельные оси Oy .

$$\begin{aligned} 1) \quad x \rightarrow +\infty; \quad k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2 \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x} \right) = \\ &= 1 - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \end{aligned}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \operatorname{arctg} x - x) = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = -2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi^*.$$

Итак, уравнение асимптоты при $x \rightarrow +\infty$: $y = x - \pi$.

$$2) \ x \rightarrow -\infty; \ k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2 \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x} \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2 \operatorname{arctg} x - x) = -2 \lim_{x \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg} x) = -2 \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$$

Уравнение асимптоты при $x \rightarrow -\infty$: $y = x + \pi$.

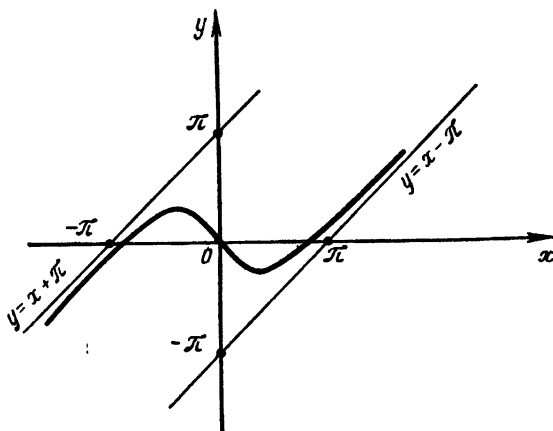


Рис. 160

Таким образом, график функции $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$ имеет две различные асимптоты, не параллельные оси Oy :

$$y = x - \pi \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$y = x + \pi \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty.$$

График функции $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$ показан на рис. 160.

8. Общая схема исследования функции и построение ее графика

На основании всего изложенного в этом параграфе можно рекомендовать следующий план исследования функций.

1. Нахождение области определения функции, интервалов непрерывности и точек разрыва.
2. Нахождение асимптот графика функции.
3. Нахождение интервалов монотонности функции и ее экстремумов (максимумов и минимумов).

* См. гл. V, § 2, п. 5,

4. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции.

5. Построение графика функции.

З а м е ч а н и е 1. При построении графика функции полезно знать также точки пересечения графика с осями координат.

З а м е ч а н и е 2. Перед построением графика полезно также установить, не является ли данная функция четной $[f(-x) = f(x)]$ или нечетной $[f(-x) = -f(x)]$.

При построении графика четной или нечетной функции рекомендуется использовать симметрию графика относительно оси ординат или начала координат.

Пример 1. Исследовать функцию $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е. 1. Функция определена и непрерывна для всех значений x .

2. Асимптоты графика функции, не параллельные оси Oy :

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - 3\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right) = 2,$$
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x - kx)], \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - 3\sqrt[3]{x^2} - 2x] =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3\sqrt[3]{x^2}) = -\infty.$$

Так как для b не существует конечного предела, то график функции асимптот, не параллельных оси Oy , при $x \rightarrow +\infty$ не имеет. Легко проверить, что и при $x \rightarrow -\infty$ график функции также не имеет асимптот, не параллельных оси Oy . Асимптот, параллельных оси Ox , также нет, так как функция $2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ непрерывна при всех значениях x .

3. Определяем интервалы монотонности функции, максимумы и минимумы.

Находим производную $f'(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

Определим критические значения аргумента:

$$2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{2(\sqrt[3]{x} - 1)}{\sqrt[3]{x}} = 0, \quad \sqrt[3]{x} - 1 = 0, \quad x = 1.$$

Кроме того, так как при $x = 0$ производная терпит бесконечный разрыв, то значение $x = 0$ будет также критическим.

Определяем знаки производной в каждом из интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$, на которые точки 0 и 1 разбивают всю область определения данной функции. Имеем:

$$(-\infty, 0): f'(-1) > 0;$$

$$(0, 1): f'\left(\frac{1}{8}\right) < 0;$$

$$(1, +\infty): f'(8) > 0.$$

Составляем таблицу

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < \infty$
y'	+	не сущ.	—	0	+
y	возрастает	максимум $y_{\max} = 0$	убывает	минимум $y_{\min} = -1$	возрастает

$$y_{\max} = f(0) = 0, \quad y_{\min} = f(1) = -1.$$

4. Определяем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика.

Находим вторую производную

$$f''(x) = -2 \left(-\frac{1}{3} \right) x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{3x \sqrt[3]{x}};$$

$f''(x)$ не обращается в нуль ни при каком значении x , но при $x=0$ не существует (имеет бесконечный разрыв).

Определяем знаки второй производной в каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и составляем таблицу

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < +\infty$
y''	+	не существует	+
график	вогнут	перегиба нет	вогнут

Находим точки пересечения графика с осями координат:

$$f(x) = 0, \quad 2x - 3\sqrt[3]{x^2} = 0, \quad 8x^3 - 27x^2 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{27}{8}.$$

При построении графика необходимо иметь в виду, что при $x \rightarrow 0$

$f'(x) \rightarrow \infty$, т. е. в начале координат график имеет вертикальную касательную (рис. 161).

Пример 2. Исследовать функцию $\frac{\ln x}{x}$ и построить ее график.

Решение. 1. Функция определена и непрерывна в интервале $0 < x < +\infty$. В граничной точке $x=0$ области определения функция имеет бесконечный разрыв,

так как $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

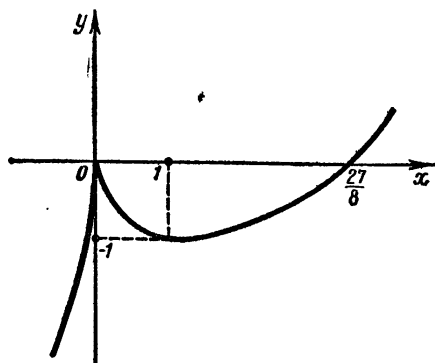


Рис. 161

2. Асимптоты графика. Так как в точке $x=0$ функция имеет бесконечный разрыв, то прямая $x=0$ (ось Oy) является асимптотой.

Найдем асимптоту, не параллельную оси Oy :

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Итак, $k=b=0$ и уравнение асимптоты будет $y=0$, т. е. асимптотой является ось Ox .

Таким образом, график имеет в качестве своих асимптот ось Ox и ось Oy .

3. Определяем интервалы монотонности и экстремумы функции.

Находим производную

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Критические значения x аргумента:

$$f'(x) = 0, \quad \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0, \quad 1 - \ln x = 0, \quad \ln x = 1, \quad x = e.$$

Исследуем знак производной в каждом из интервалов $(0, e)$, (e, ∞) , на которые точка $x=e$ разбивает всю область определения функции.

$$(0, e): \quad f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1} = 1 > 0.$$

$$(e, \infty): \quad f'(e^2) = \frac{1 - \ln e^2}{e^4} = \frac{1 - 2 \ln e}{e^4} = \frac{1 - 2}{e^4} = -\frac{1}{e^4} < 0.$$

Составляем таблицу

x	$0 < x < e$	e	$e < x < +\infty$
y'	+	0	—
y	возрастает	максимум $y_{\max} = \frac{1}{e}$	убывает

$$y_{\max} = f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \approx 0,37.$$

4. Определяем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика.

Находим вторую производную функции:

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

Приравниваем $f''(x)$ нулю и находим значения аргумента, при которых график может иметь точку перегиба:

$$f''(x) = 0, \frac{2 \ln x - 3}{x^3} = 0, 2 \ln x - 3 = 0, \ln x = \frac{3}{2}, x = e^{\frac{3}{2}}.$$

Определяем знак второй производной в каждом из интервалов $(0, e^{\frac{3}{2}})$ и $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$.

$$\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right): f''(e) = \frac{2 \ln e - 3}{e^3} = \frac{2 - 3}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0.$$

$$\left(e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right): f''(e^2) = \frac{2 \ln e^2 - 3}{e^6} = \frac{4 - 3}{e^6} = \frac{1}{e^6} > 0.$$

Составим таблицу

x	$0 < x < e^{\frac{3}{2}}$	$e^{\frac{3}{2}} \approx 4,48$	$e^{\frac{3}{2}} < x < \infty$
y''	—	0	+
график	выпуклый	т. перегиба $y = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$	вогнутый

$$y_{\text{т. пер.}} = f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} \approx 0,33.$$

Находим точки пересечения с осями координат. С осью Oy график точек пересечения не имеет, так как функция определена при $0 < x < +\infty$. Точки пересечения с осью Ox находятс я из уравнения $y = 0$, откуда

$$\frac{\ln x}{x^2} = 0, \ln x = 0, x = 1.$$

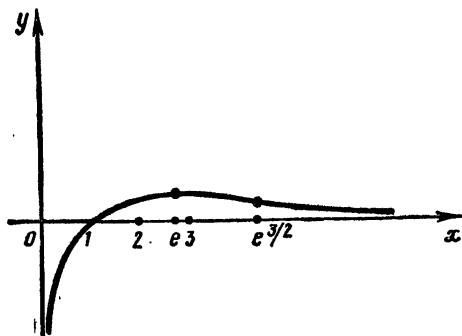


Рис. 162

На основании полученных данных строим график функции $y = \frac{\ln x}{x^2}$, изображенный на рис. 162.

§ 8. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Пусть требуется найти действительные корни уравнения

$$f(x) = 0, \quad (100)$$

т. е. такие действительные значения x , при которых его левая часть

$f(x)$ обращается в нуль. Будем считать при этом, что функция $f(x)$ непрерывна и имеет первую и вторую производные. Нахождение корней уравнения состоит из двух этапов:

- 1) нахождение грубо приближенных значений корней;
- 2) уточнение найденных значений корней.

1. Нахождение грубо приближенных значений корней графическим методом

Для нахождения грубо приближенных значений корней строят график функции $y=f(x)$. Абсциссы точек пересечения графика с осью Ox будут корнями уравнения $f(x)=0$ (рис. 163). Часто

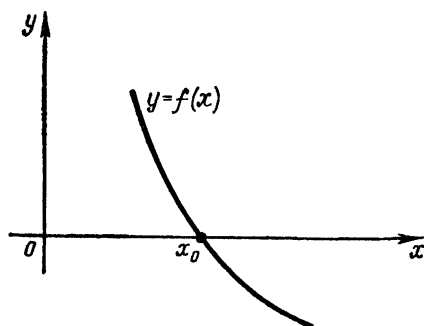


Рис. 163

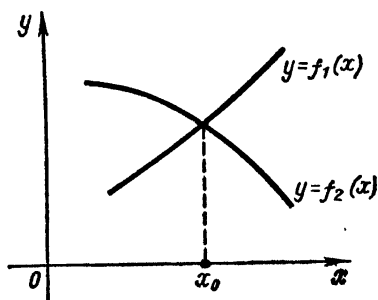


Рис. 164

прибегают к такому приему: уравнение $f(x)=0$ преобразуют к виду $f_1(x)=f_2(x)$ так, чтобы легко было построить графики функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$. Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут корнями данного уравнения (рис. 164).

2. Уточнение найденных значений корней методом хорд и касательных

Пусть графическим методом найдено, что корень уравнения (100) лежит внутри сегмента $[a, b]$. Этот сегмент выбирается настолько малым, чтобы выполнялись следующие три условия:

- а) на концах сегмента $[a, b]$ функция $f(x)$ имела значения разных знаков;
- б) на сегменте $[a, b]$ производная $f'(x)$ сохраняла постоянный знак;
- в) на сегменте $[a, b]$ вторая производная $f''(x)$ сохраняла постоянный знак.

Если на сегменте $[a, b]$ выполнены эти три условия, то график функции $f''(x)$ имеет один из четырех видов, изображенных на рис. 165*.

* Условия (а) и (б) означают, что на сегменте $[a, b]$ имеется только один корень уравнения. Условие (в) существенно для применения излагаемого метода и означает, что график функции на сегменте $[a, b]$ выпуклый или вогнутый.

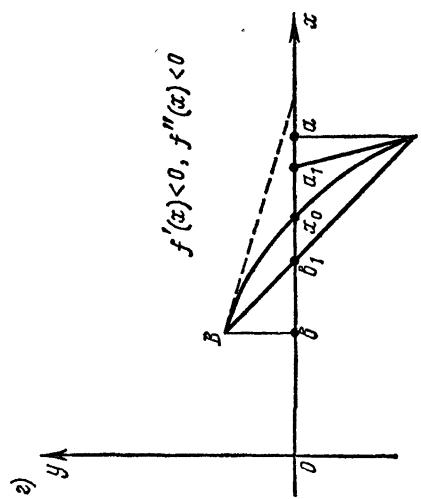
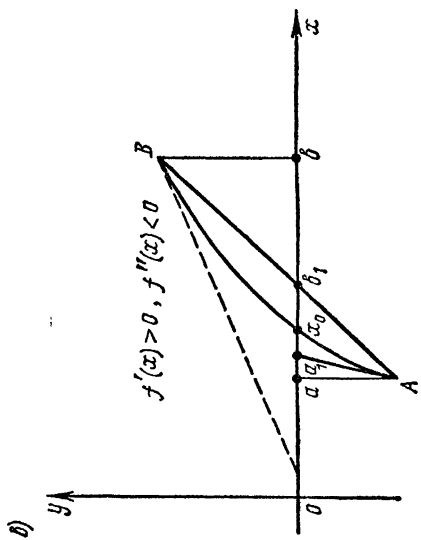
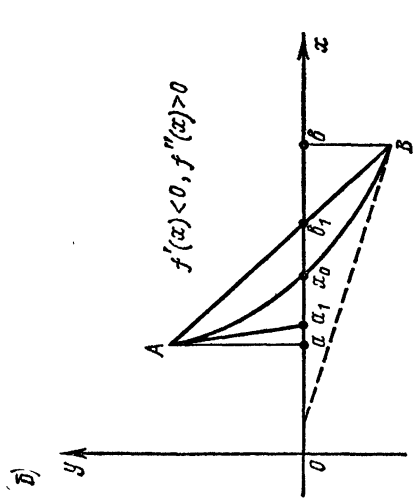
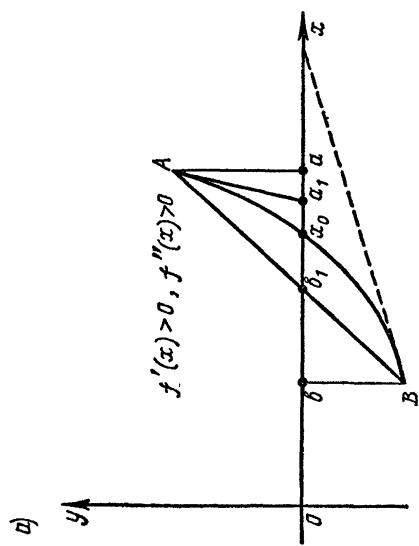


Рис. 165

Метод хорд и касательных заключается в следующем: проведем сперва хорду AB (рис. 166) и найдем абсциссу точки пересечения хорды с осью Ox .

Для этого составим уравнение прямой, проходящей через точки $A[a; f(a)]$ и $B[b; f(b)]$:

$$\frac{x-b}{a-b} = \frac{y-f(b)}{f(a)-f(b)}.$$

Точка пересечения хорды с осью Ox имеет координаты $x=b_1$ и $y=0$. Подставляя эти значения в уравнение хорды, найдем

$$b_1 = b - f(b) \cdot \frac{a-b}{f(a)-f(b)}. \quad (101)$$

Число b_1 дает приближенное значение корня.

Найдем теперь абсциссу a_1 точки пересечения касательной, проведенной из конца дуги AB с осью Ox . Из рис. 165 видно, что касательную следует проводить в том конце дуги AB , где знак

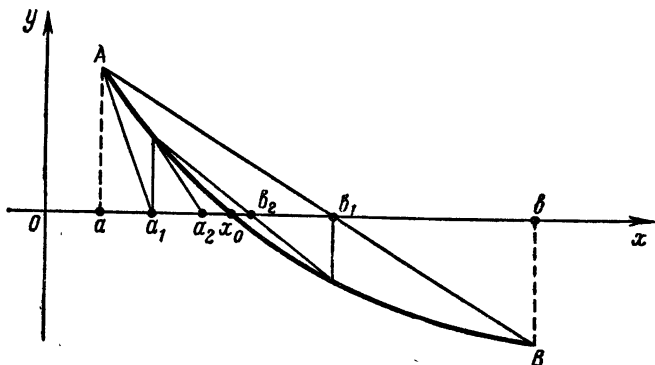


Рис. 166

функции $f(x)$ совпадает со знаком второй производной $f''(x)$. В этом случае абсцисса a_1 ее точки пересечения с осью Ox лежит внутри сегмента $[a, b]$, и корень уравнения находится между a_1 и b_1 .

Если же касательную проводить в другом конце дуги, где знак второй производной и знак функции противоположны, то точка пересечения касательной с осью Ox может оказаться лежащей вне сегмента $[a, b]$ (см. рис. 165).

В дальнейшем абсциссу того конца дуги, в котором проводится касательная, будем обозначать буквой a , а абсциссу другого конца — буквой b (см. рис. 165).

Уравнение касательной, проведенной в точке с абсциссой a (см. рис. 166), таково

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Точка пересечения касательной с осью Ox имеет координаты $x=a_1$ и $y=0$. Подставляя эти координаты в уравнение касательной, найдем

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \quad (102)$$

Число a_1 , так же как и ранее полученное число b_1 , дает приближенное значение корня. Истинное значение корня лежит между a_1 и b_1 . Применим к новому сегменту $[a_1, b_1]$ снова формулы (101) и (102). При этом касательную следует проводить в точке с абсциссой a_1 , так как в этой точке $f''(x)$ и $f'(x)$ имеют одинаковый знак (см. рис. 166). Получим:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 - f(b_1) \frac{a_1 - b_1}{f(a_1) - f(b_1)}, \\ a_2 &= a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}. \end{aligned} \quad (103)$$

Здесь a_2 и b_2 — новые приближенные значения корня, расположенные ближе к корню, чем a_1 и b_1 (см. рис. 166).

Действуя таким образом дальше, мы будем получать новые более точные приближения (a_3, b_3) , (a_4, b_4) , ..., (a_n, b_n) :

$$\left. \begin{aligned} b_n &= b_{n-1} - f(b_{n-1}) \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{f(a_{n-1}) - f(b_{n-1})}, \\ a_n &= a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}, \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

причем при любом n корень уравнения $f(x) = 0$ содержится между a_n и b_n . Если x_0 — точное значение корня, то погрешность приближения $|x_0 - a_n|$ или $|x_0 - b_n|$ не превосходит $|a_n - b_n|$:

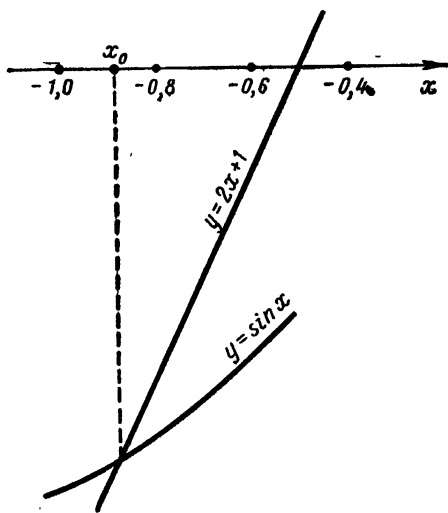


Рис. 167

$$\begin{aligned} |x_0 - a_n| &< |a_n - b_n|, \\ |x_0 - b_n| &< |a_n - b_n|. \end{aligned}$$

При вычислении корня x_0 задается какая-либо допустимая погрешность ε (т. е. ищут число, отличающееся от x_0 не более чем на ε). Таким образом, процесс получения последовательных приближений, указанный в методе хорд и касательных, следует приостановить, как только разность $|a_n - b_n|$ будет меньше допустимой погрешности. Все вычисления следует проводить с одним или двумя дополнительными знаками для того, чтобы ошибка при округлении в процессе вычислений не превысила допустимой погрешности.

Пример. Вычислить с точностью до 0,001 корень уравнения

$$2x + 1 - \sin x = 0.$$

Решение. 1. Находим грубое приближенное значение корня. Для этого представим уравнение $2x + 1 - \sin x = 0$ в виде

$$2x + 1 = \sin x.$$

Построим графики функций $y=2x+1$ и $y=\sin x$ (рис. 167). Из рисунка находим, что уравнение имеет единственный корень, лежащий на сегменте $[-1,0; -0,8]$. Значения $x=-1,0$ и $x=-0,8$ являются грубыми приближенными значениями корня.

2. Уточняем найденные грубые приближенные значения. В нашем случае $f(x)=2x+1-\sin x$. Очевидно, что на сегменте $[-1,0; -0,8]$

$$f'(x)=2-\cos x > 0 \quad \text{и} \quad f''(x)=\sin x < 0.$$

Так как

$$f(-0,8)=2 \cdot (-0,8)+1-\sin(-0,8) \approx -1,6+1+0,7174 \approx 0,1174;$$

$$f(-1)=2 \cdot (-1)+1-\sin(-1) \approx -2+1+0,8415 \approx -0,1585,$$

то принимаем $b=-0,8$ и $a=-1$ (при $a=-1$ знак функции совпадает со знаком второй производной).

Применяя формулы (101), (102), (103) и (104), последовательно находим приближения $a_1, b_1; a_2, b_2$ и т. д.*

Вычисляем

$$f'(a)=2-\cos a=2-\cos(-1)=2-0,5403=1,4597.$$

Находим:

$$a_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}=-1-\frac{-0,1585}{1,4597}=-0,8914;$$

$$b_1=b-f(b)\frac{a-b}{f(a)-f(b)}=-0,8-0,1174 \cdot \frac{(-1+0,8)}{-0,1585-0,1174}=-0,8850.$$

Вычисляем $f(a_1), f(b_1)$ и $f'(a_1)$:

$$\begin{aligned} f(a_1) &= 2a_1+1-\sin a_1=2(-0,8914)+1+\sin 0,8914= \\ &= -1,7828+1+0,7779 \approx -0,0049; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(b_1) &= 2b_1+1-\sin b_1=2(-0,8850)+1+\sin 0,8850= \\ &= -1,7700+1+0,7739 \approx 0,0039; \end{aligned}$$

$$f'(a_1)=2-\cos a_1=2-\cos(-0,8914)=2-0,6282=1,3718.$$

По формулам (103) находим следующие приближения:

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}=-0,8914-\frac{-0,0049}{1,3718}=-0,8878;$$

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1-f(b_1)\frac{a_1-b_1}{f(a_1)-f(b_1)}=-0,8850-0,0039 \cdot \frac{-0,8914+0,8850}{-0,0049-0,0039}= \\ &= -0,8881. \end{aligned}$$

Так как разность

$$|a_2-b_2|=0,0003$$

меньше допустимой погрешности 0,001, то дальнейшие вычисления можно прекратить и принять $x_0 \approx -0,888$.

* Все вычисления проводим с одним дополнительным знаком.

§ 9. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА

Пусть нам известны значения $y_0, y_1, \dots, y_n$ функции $y=f(x)$, которые она принимает в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$: $y_i=f(x_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$). Требуется найти многочлен степени n

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

значения которого в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ совпадают со значениями функций $y=f(x)$: $P_n(x_i)=f(x_i)=y_i$ ($i=1, 2, \dots, n$). Так поставленную задачу называют *задачей интерполирования*, а многочлен $P_n(x)$ — *интерполяционным многочленом*. Принимая интерполяционный многочлен $P_n(x)$ за приближенное аналитическое выражение функции $y=f(x)$: $f(x) \approx P_n(x)$, мы можем, например, находить приближенные значения функции $f(x)$ в точках x , лежащих между $x_0, x_1, \dots, x_n$. Покажем теперь, что задача интерполяции имеет единственное решение. Для простоты ограничимся случаем интерполяционного многочлена второй степени

$$P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, \quad (105)$$

который в точках x_0, x_1, x_2 (узлы интерполяции) принимает соответственно значения y_0, y_1, y_2 :

$$P_2(x_i) = y_i \quad (i=0, 1, 2).$$

Покажем, что при этих условиях коэффициенты a_0, a_1, a_2 определяются однозначно. В самом деле, подставляя в уравнение (105) $x=x_0, x=x_1, x=x_2$, получим для нахождения коэффициентов a_0, a_1, a_2 систему трех уравнений первой степени:

$$\left. \begin{aligned} a_0x_0^2 + a_1x_0 + a_2 &= y_0, \\ a_0x_1^2 + a_1x_1 + a_2 &= y_1, \\ a_0x_2^2 + a_1x_2 + a_2 &= y_2. \end{aligned} \right\}$$

Эта система имеет единственное решение, так как ее определитель

$$D = \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_1 - x_2) \neq 0$$

(числа x_0, x_1 и x_2 различны).

Замечание. Так как графиком квадратного трехчлена $y = a_0x^2 + a_1x + a_2$ является парабола, ось симметрии которой параллельна оси Oy (см. гл. II, § 2, п. 7), то тем самым мы доказали, что через три точки $M_0(x_0; y_0); M_1(x_1; y_1); M_2(x_2; y_2)$ можно провести единственную параболу, ось симметрии которой параллельна оси Oy *.

В общем случае для многочлена степени n получим систему из $n+1$ уравнения с неизвестными $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Решение этой

* В частном случае, если точки M_0, M_1 и M_2 лежат на одной прямой, то $a_0=0$ и вместо квадратного трехчлена получается линейная функция $y=a_1x+a_2$.

системы связано с громоздкими вычислениями. Поэтому интерполяционный многочлен $P_n(x)$ будем искать в другой форме, позволяющей проще определить неизвестные коэффициенты:

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) + a_1(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n) + \\ + a_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) + \dots + a_k(x-x_0)(x-x_1)\dots \\ \dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots \\ \dots(x-x_{n-1}). \quad (106)$$

Для случая $n=2$ интерполяционный многочлен запишется в виде

$$P_2(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2) + a_1(x-x_0)(x-x_2) + a_2(x-x_0)(x-x_1). \quad (107)$$

Покажем, как находятся его коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 . Так как по условию

$$P_2(x_0) = y_0, \quad P_2(x_1) = y_1, \quad P_2(x_2) = y_2,$$

то подставляя последовательно в равенство (107) x_0 , x_1 , x_2 , получим:

$$P_2(x_0) = y_0 = a_0(x_0-x_1)(x_0-x_2), \\ P_2(x_1) = y_1 = a_1(x_1-x_0)(x_1-x_2), \\ P_2(x_2) = y_2 = a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1).$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \quad a_1 = \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \quad a_2 = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Подставляя найденные значения a_0 , a_1 и a_2 в равенство (107), получим искомый интерполяционный многочлен, который принимается за приближенное аналитическое выражение функции

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \quad (108)$$

Аналогично, интерполяционный многочлен третьей степени имеет вид

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}. \quad (109)$$

Формулы (108) и (109) называются *интерполяционными формулами Лагранжа* для случая $n=2$ и $n=3$.

Пример. Нижеследующая таблица дает значения функции $\sin x$ для некоторых значений x (в радианах). Найти $\sin 0,57$.

x	0,40	0,50	0,65
$\sin x$	0,3894	0,4794	0,6052

Решение. Здесь: $x_0 = 0,40$, $x_1 = 0,50$, $x_2 = 0,65$;

$$y_0 = 0,3894, y_1 = 0,4794, y_2 = 0,6052.$$

Применяя интерполяционную формулу Лагранжа (108), при $x = 0,57$ найдем:

$$\begin{aligned} \sin 0,57 &= 0,3894 \cdot \frac{(0,57 - 0,50)(0,57 - 0,65)}{(0,40 - 0,50)(0,40 - 0,65)} + \\ &+ 0,4794 \cdot \frac{(0,57 - 0,40)(0,57 - 0,65)}{(0,50 - 0,40)(0,50 - 0,65)} + 0,6052 \cdot \frac{(0,57 - 0,40)(0,57 - 0,50)}{(0,65 - 0,40)(0,65 - 0,50)} = \\ &= -0,0872 + 0,4347 + 0,1920 = 0,5395. \end{aligned}$$

Заметим, что табличное значение с четырьмя верными знаками будет $\sin 0,57 = 0,5396$.

ГЛАВА VII

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

1. Понятия первообразной и неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении мы решали следующую основную задачу: по данной функции найти ее производную. Многочисленные вопросы науки и техники приводят к постановке обратной задачи: для данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой равнялась бы заданной функции $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x). \quad (1)$$

Поставленную задачу можно сформулировать в следующей равносильной ей форме: для данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, дифференциал которой равнялся бы заданному выражению $f(x) dx$:

$$dF(x) = f(x) dx. \quad (2)$$

Функция $F(x)$, связанная с функцией $f(x)$ соотношением (1) или (2), называется ее первообразной.

Таким образом, мы пришли к следующему определению.

Определение. Первообразной функцией от данной функции $f(x)$ называется функция, производная которой равна данной функции или, что то же самое, дифференциал которой равен выражению $f(x) dx$.

Так, например, первообразной от функции $f(x) = x^2$ будет функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$ или, что то же самое, $dF(x) = d\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 dx$.

Отыскание по данной функции ее первообразной составляет одну из основных задач интегрального исчисления.

Естественно, возникает следующий вопрос: для всякой ли функции существует первообразная?

Утвердительный ответ на этот вопрос для достаточно широкого класса функций дает следующая теорема, принимаемая нами пока без доказательства.

Теорема 1. *Любая непрерывная на сегменте функция имеет на этом сегменте первообразную*.*

Если функция, для которой мы ищем первообразную, имеет точки разрыва, то мы будем ее рассматривать только в тех интервалах, где она непрерывна.

* Доказательство этой теоремы будет дано в гл. VIII, § 2, п. 3.

Задача отыскания по данной функции ее первообразной решается не однозначно. В самом деле, если, например, $f(x) = x^2$, то первообразной для нее является не только $\frac{x^3}{3}$, но также и $\frac{x^3}{3} + 6$, и $\frac{x^3}{3} + 9$, и вообще $\frac{x^3}{3} + C$, где C — некоторая произвольно выбранная постоянная. Поэтому, естественно, возникает вопрос об отыскании всех первообразных для данной функции.

Исчерпывающий ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2. Если функция $F(x)$ есть первообразная от функции $f(x)$ на сегменте $a \leq x \leq b$, то всякая другая первообразная от $f(x)$ отличается от $F(x)$ на постоянное слагаемое, т. е. может быть представлена в виде $F(x) + C$, где C — постоянная.

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ — любая другая первообразная функция от $f(x)$, тогда $\Phi'(x) = F'(x) = f(x)$. Но если две функции на сегменте имеют равные производные, то разность этих функций постоянна на данном сегменте (см. гл. VI, § 6, п. 3), т. е. $\Phi(x) - F(x) = C$, где C — постоянная. Таким образом, $\Phi(x) = F(x) + C$. Тем самым теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что выражение $F(x) + C$, где $F(x)$ — некоторая первообразная от функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная, охватывает совокупность всех первообразных от данной функции.

Введем теперь понятие неопределенного интеграла.

Если $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом.

Неопределенный интеграл от функции обозначается символом $\int f(x) dx$ (читается: «неопределенный интеграл $f(x)$ на dx »). Следовательно,

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (3)$$

Здесь $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x) dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*, а символ $\int$ — *знаком неопределенного интеграла*. Под знаком интеграла мы пишем не производную искомой функции, а ее дифференциал.

Так как, например, функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является одной из первообразных от функции $f(x) = x^2$, то на основании формулы (3) получим

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Действие отыскания неопределенного интеграла или, что то же самое, нахождение всех первообразных от данной функции, называется *интегрированием* этой функции.

Из самого определения первообразной следует, что дифференциал этой первообразной равен подынтегральному выражению.

Так как это имеет место для любой первообразной от данной функции, то кратко это можно выразить следующим образом.

Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е.

$$d \int f(x) dx = f(x) dx. \quad (4)$$

Отметим еще одно свойство, которое, как и первое, устанавливает связь между операциями дифференцирования и интегрирования.

Пусть $F(x)$ первообразная от $f(x)$. Тогда

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Но $f(x) dx = dF(x)$. Поэтому равенство (3) часто записывают в виде

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (5)$$

Таким образом, *неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.*

Например: $\int dx = x + C$, $\int d \cos x = \cos x + C$.

Указанные свойства означают, что дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными действиями.

2. Геометрический смысл неопределенного интеграла

Пусть требуется найти кривую $y = F(x)$, зная, что тангенс угла наклона касательной в каждой ее точке есть заданная функция $f(x)$ абсциссы этой точки. Согласно геометрическому смыслу производной (см. гл. VI, § 1, п. 6), тангенс угла наклона касательной в данной точке кривой $y = F(x)$ равен значению производной $F'(x)$. Значит, нам нужно найти такую функцию $F(x)$, для которой

$$F'(x) = f(x). \quad (6)$$

Соотношение (6) показывает, что искомая функция $F(x)$ является первообразной от $f(x)$. Следовательно, задача свелась к основной задаче интегрального исчисления — к нахождению первообразной от данной функции.

Таким образом, $y = \int f(x) dx$ или $y = F(x) + C$.

Мы видим, что условию задачи удовлетворяет не одна кривая, а семейство кривых. Причем, если $y = F(x)$ есть одна из таких кривых, то всякая другая может быть получена из нее параллельным переносом вдоль оси Oy (рис. 168).

Для того чтобы из данного семейства кривых выделить одну определенную кривую, нужно к условию задачи присоединить дополнительное условие, например потребовать, чтобы кривая проходила через данную точку $(x_0; y_0)$. Такое условие называется *начальным*. Задание начального условия позволит выделить из

семейства всех кривых вполне определенную, именно ту кривую, которая проходит через точку $(x_0; y_0)$. Координаты этой точки должны удовлетворять уравнению искомой кривой $y = F(x) + C$, т. е. $y_0 = F(x_0) + C$. Из этого условия однозначно определяем C : $C = y_0 - F(x_0)$.

Пример. Через точку $M(1; 2)$ провести кривую, у которой угловой коэффициент касательной в каждой точке с абсциссой x равен x^2 .

Решение. Имеем $y' = x^2$. Следовательно,

$$y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Итак, кривые, для которых в точках с абсциссой x тангенс угла наклона касательной равен x^2 , образуют семейство кубических парабол $y = \frac{x^3}{3} + C$ (рис. 169). Из этого семейства кривых нам нужно выбрать ту кривую, которая проходит через точку $M(1; 2)$ (началь-

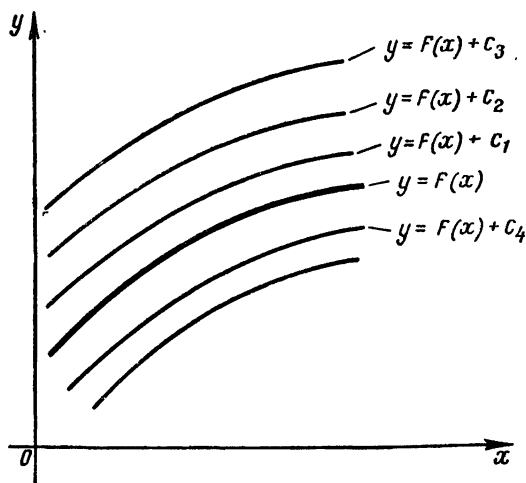


Рис. 168

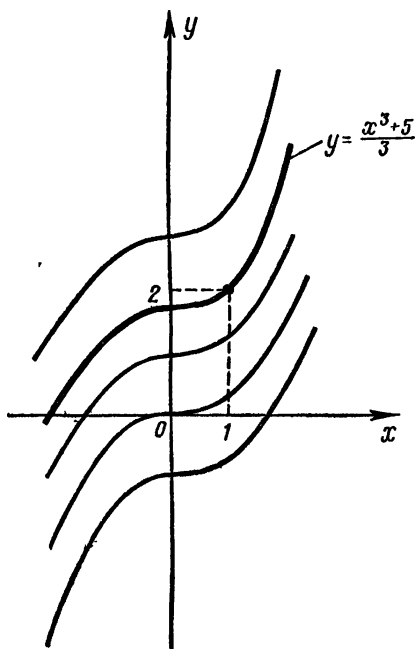


Рис. 169

ное условие). Это дает $2 = \frac{1^3}{3} + C$, откуда $C = \frac{5}{3}$. Таким образом, уравнение искомой кривой будет $y = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}$.

Рассмотренная задача позволяет выяснить геометрический смысл неопределенного интеграла.

Назовем график первообразной функции от $f(x)$ *интегральной кривой*. Таким образом, если $F'(x) = f(x)$, то график функции $y = F(x)$ есть интегральная кривая.

Неопределенный интеграл геометрически представляется семейством всех интегральных кривых.

Все кривые из этого семейства $y = F(x) + C$ могут быть получены из одной интегральной кривой параллельным сдвигом в направлении оси Oy .

3. Таблица основных интегралов

Отыскание первообразной от данной функции есть задача значительно более трудная, чем задача нахождения по данной функции ее производной. В дифференциальном исчислении мы нашли производные основных элементарных функций (см. гл. VI), установили правила дифференцирования суммы, произведения, частного, а также сложной функции.

Эти правила позволили нам определять производные любых элементарных функций. Для отыскания первообразных от элементарных функций таких простых и универсальных правил и рецептов, как в дифференциальном исчислении, не существует. Так, например, нет никаких определенных правил для нахождения первообразных от произведения, частного двух элементарных функций, даже если первообразную каждой из этих элементарных функций мы умеем найти.

Методы интегрирования функций (т. е. нахождения первообразных) сводятся к указанию ряда приемов, выполнение которых во многих случаях приводит к цели.

Для облегчения интегрирования составляется таблица так называемых основных интегралов. Эта таблица получается из основных формул дифференциального исчисления.

Вот эта таблица.

$$\text{I. } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1)$$

В частности, при $n = 0$:

$$\int dx = x + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$\text{III. } \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\text{IV. } \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\text{V. } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\text{VI. } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\text{VII. } \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$\text{VIII. } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C.$$

$$\text{IX. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\text{X. } \int e^x dx = e^x + C.$$

$$\text{XI. } \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$\text{XII. } \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$\text{XIII. } \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$\text{XIV. } \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Вывод этих формул сводится к проверке того, что дифференциал правой части равен подынтегральному выражению в левой части равенства, и не представляет труда для всех формул, за исключением второй.

Докажем справедливость формулы (II). Подынтегральная функция $\frac{1}{x}$ определена и непрерывна для всех значений x , отличных от нуля.

Если $x > 0$, то $|x| = x$ и $\ln|x| = \ln x$. По известной формуле дифференциального исчисления имеем: $d \ln|x| = d \ln x = \frac{dx}{x}$. Поэтому для $x > 0$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln|x| + C.$$

Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $\ln|x| = \ln(-x)$. Но $d \ln(-x) = \frac{-1}{-x} dx = \frac{dx}{x}$. Следовательно, для $x < 0$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C = \ln|x| + C.$$

Таким образом, формула (II) остается справедливой в обоих случаях.

4. Основные свойства неопределенного интеграла

Приведем два свойства неопределенного интеграла, которые позволяют значительно расширить возможности применения формул таблицы основных интегралов.

Свойство А. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждого слагаемого в отдельности, т. е.*

$$\int [f(x) + g(x) - \varphi(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx - \int \varphi(x) dx. \quad (A)$$

Свойство В. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла, т. е.*

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx. \quad (B)$$

(предполагается, что постоянная $k \neq 0$).

Равенства (А) и (В) следует понимать в том смысле, что левая и правая их части отличаются на постоянное слагаемое. Поэтому, чтобы установить справедливость этих равенств, достаточно показать, что производная (или дифференциал) левой части равна производной (или дифференциалу) правой части (см. гл. VI, § 6, п. 3).

Докажем, например, справедливость равенства (В). Дифференцируя левую часть равенства (В) и применяя формулу (4), имеем

$$d \int k f(x) dx = k f(x) dx.$$

Дифференцируя правую часть равенства (В), получим

$$d \left(k \int f(x) dx \right) = k d \int f(x) dx = k f(x) dx.$$

Итак,

$$d \int kf(x) dx = d \left(k \int f(x) dx \right),$$

откуда следует равенство (В).

Пример. Найти $\int (x^3 + 3 \sin x - 8) dx$.

Решение. Применяя свойства (А) и (В), имеем:

$$\int (x^3 + 3 \sin x - 8) dx = \int x^3 dx + 3 \int \sin x dx - 8 \int dx.$$

Но $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C_1 = \frac{x^4}{4} + C_1$ (см. формулу (I)).

По формуле (III) $3 \int \sin x dx = 3(-\cos x + C_2) = -3 \cos x + 3C_2$.

$$8 \int dx = 8(x + C_3) = 8x + 8C_3.$$

Таким образом,

$$\int (x^3 + 3 \sin x - 8) dx = \frac{x^4}{4} - 3 \cos x - 8x + (C_1 + 3C_2 - 8C_3).$$

При каждом интегрировании мы получали свою произвольную постоянную. Но в конечном итоге мы пишем только одну произвольную постоянную, так как если C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, то и $C = C_1 + 3C_2 - 8C_3$ также является произвольной постоянной.

Поэтому окончательно:

$$\int (x^3 + 3 \sin x - 8) dx = \frac{x^4}{4} - 3 \cos x - 8x + C.$$

Правильность полученного результата нетрудно проверить дифференцированием. Действительно,

$$d \left(\frac{x^4}{4} - 3 \cos x - 8x + C \right) = (x^3 + 3 \sin x - 8) dx.$$

§ 2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Укажем теперь несколько приемов, которые во многих случаях позволяют сводить заданные интегралы к табличным. Такими приемами являются: интегрирование методом разложения, интегрирование методом замены переменной и интегрирование по частям.

1. Интегрирование методом разложения

Этот метод основан на разложении подынтегральной функции на сумму функций, от каждой из которых первообразную можно найти с помощью других методов.

Приведем простейшие примеры.

Пример 1. Найти $\int \frac{x^3 + 4x + 2}{2x} dx$.

Решение. Так как $\frac{x^3+4x+2}{2x} = \frac{1}{2}x^2 + 2 + \frac{1}{x}$, то $\int \frac{x^3+4x+2}{2x} dx = \int \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \int x^2 dx + 2 \int dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + C = \frac{x^3}{6} + 2x + \ln|x| + C$.

Проверка:

$$d\left(\frac{x^3}{6} + 2x + \ln|x| + C\right) = \left(\frac{x^2}{2} + 2 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^3+4x+2}{2x} dx.$$

В дальнейшем мы проверки проводить не будем. Однако рекомендуем читателям на первых порах ее проводить в целях самоконтроля.

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \end{aligned}$$

Удачно разложив подынтегральное выражение, мы свели интеграл к табличным интегралам (формулы (V) и (VI)).

Перейдем теперь к рассмотрению других методов интегрирования.

2. Интегрирование методом замены переменной

Во многих случаях удается введением вместо переменной интегрирования x новой переменной z свести данный интеграл $\int f(x) dx$ к новому интегралу, который или содержится в таблице основных интегралов, или легко вычисляется другим способом. Этот метод интегрирования получил название метода *замены переменной* или метода *интегрирования подстановкой*.

Введем вместо x новую переменную z , связанную с x соотношением $x = \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — непрерывная монотонная функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'(z)$. Покажем, что имеет место равенство

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz. \quad (7)$$

Формула (7) называется *формулой замены переменной*. Для доказательства справедливости формулы (7), очевидно, достаточно убедиться, что дифференциалы обеих ее частей равны.

Дифференцируя левую часть соотношения (7), имеем

$$d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

Но так как $x = \varphi(z)$, то $dx = \varphi'(z) dz$. Поэтому

$$d \int f(x) dx = f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz. \quad (8)$$

С другой стороны, дифференцируя правую часть соотношения (7), имеем

$$d \int f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz = f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz. \quad (9)$$

Соотношения (8) и (9) показывают, что

$$d \int f(x) dx = d \int f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz.$$

Тем самым справедливость формулы (7) доказана.

Допустим, что интеграл, стоящий в правой части соотношения (7), найден. Пусть

$$\int f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz = \Phi(z) + C.$$

Отсюда легко найти искомый интеграл в виде функции от x . Для этого разрешим уравнение $x = \varphi(z)$ относительно z , т. е. найдем обратную функцию $z = \omega(x)$ и подставим ее в $\Phi(z)$ *:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz = \Phi(z) + C = \Phi[\omega(x)] + C.$$

З а м е ч а н и е. Формулу (7) легко запомнить. Ее правая часть получается, если в интеграле $\int f(x) dx$ заменить x на $\varphi(z)$, а dx на $\varphi'(z) dz$.

Приведем примеры.

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Р е ш е н и е. Положим $x = az$, находим $dx = a dz$. Применяя формулу (7), получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a dz}{\sqrt{a^2 - a^2 z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}};$$

но $\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \arcsin z + C$, согласно формуле VIII, § 1, п. 3. Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \arcsin z + C.$$

Возвращаясь снова к переменной x , получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad (\text{VIII}') \quad (8)$$

Применяя ту же замену переменной $x = az$, легко получить формулу

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \quad (\text{VII}') \quad (9)$$

* Существование обратной функции вытекает из монотонности и непрерывности функции $x = \varphi(z)$.

Пример 2. Найти $\int \sin ax dx$.

Решение. Полагая $x = \frac{z}{a}$, $dx = \frac{dz}{a}$ и применяя формулу (7), имеем

$$\int \sin ax dx = \int \sin z \frac{dz}{a} = \frac{1}{a} \int \sin z dz = -\frac{1}{a} \cos z + C = -\frac{1}{a} \cos ax + C.$$

Рассмотрим еще один способ применения формулы замены переменной. Если под интегралом стоит сложная функция, умноженная на производную от внутренней функции, т. е. интеграл имеет вид $\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$, то этот интеграл часто можно упростить, если заменить внутреннюю функцию новой переменной $z = \varphi(x)$. В самом деле, применяя тогда формулу (7) замены переменной, получим

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f(z) dz.$$

Заметим, что полученная формула отличается от формулы (7) только обозначением независимых переменных.

Пример 3. Найти $\int \operatorname{tg} x dx$.

Решение. Имеем $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. Замечая, что $\sin x dx = -d \cos x$, положим $z = \cos x$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{(\cos x)' dx}{\cos x} = -\int \frac{dz}{z} = -\ln |z| + C = \\ &= -\ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C. \quad (\text{XV})$$

Аналогично находим

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C. \quad (\text{XVI})$$

С приобретением навыка при интегрировании с помощью замены переменной можно не производить в простейших интегралах подробно всех выкладок.

Пример 4. Найти $\int \sqrt[3]{1+x^2} x dx$.

Решение. Замечая, что $d(1+x^2) = 2x dx$, получим $x dx = \frac{1}{2} d(1+x^2)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{1+x^2} x dx &= \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \\ &+ C = \frac{3 \sqrt[3]{(1+x^2)^4}}{8} + C. \end{aligned}$$

Часто применяют одновременно метод интегрирования разложением и метод замены переменной.

Рассмотрим интегралы вида

$$\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx, \quad \int \sin mx \cdot \sin nx \, dx, \quad \int \cos mx \cdot \cos nx \, dx.$$

Эти интегралы вычисляются методом разложения на основании следующих тригонометрических тождеств:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{\sin (m+n)x + \sin (m-n)x}{2};$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{\cos (m-n)x - \cos (m+n)x}{2};$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{\cos (m+n)x + \cos (m-n)x}{2}.$$

Пример 5. $\int \sin 2x \cdot \cos 6x \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin (2+6)x + \sin (2-6)x] \, dx =$
 $= \frac{1}{2} \int \sin 8x \, dx - \frac{1}{2} \int \sin 4x \, dx = \frac{1}{16} \int \sin 8x \, d(8x) - \frac{1}{8} \int \sin 4x \, d(4x) =$
 $= -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{8} \cos 4x + C.$

3. Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — две функции от x , имеющие непрерывные производные. Из дифференциального вычисления мы знаем (см. гл. VI, формула (65')), что

$$d(uv) = u \, dv + v \, du. \quad (10)$$

Интегрируя обе части равенства (10), имеем

$$\int d(uv) = \int u \, dv + \int v \, du,$$

или

$$\int u \, dv = \int d(uv) - \int v \, du.$$

Но $\int d(uv) = uv + C$, поэтому

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du. \quad (11)$$

В формуле (11) произвольной постоянной C мы не пишем, так как в правой части формулы остался неопределенный интеграл, содержащий произвольную постоянную.

Формула (11) называется формулой *интегрирования по частям*. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u \, dv$ к вычислению интеграла $\int v \, du$, который во многих случаях оказывается более простым.

Поясним применение этого метода примерами.

Пример 1. Найти $\int x \sin x \, dx$.

Решение. Здесь перед нами несколько возможностей. Например, можно положить $u = \sin x$, а $x dx = dv$; можно положить $u = x$, а $\sin x dx = dv$.

Полагая $u = \sin x$, $dv = x dx$, найдем $du = \cos x dx$, $v = \frac{x^2}{2}$.*

Применяя формулу (11), получаем

$$\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x dx.$$

Это разбиение подынтегрального выражения на произведение двух множителей следует признать неудачным, так как оно приводит к более сложному интегралу.

Положим $u = x$, $dv = \sin x dx$; отсюда найдем $du = dx$, $v = -\cos x$.

Применяя формулу (11), имеем

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx.$$

Но $\int \cos x dx = \sin x + C$. Поэтому окончательно получаем

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Иногда для получения окончательного результата нужно интегрирование по частям применять последовательно несколько раз.

Укажем на некоторые часто встречающиеся интегралы, которые вычисляются методом интегрирования по частям.

I. Интегралы вида

$$\int P(x) e^{kx} dx, \quad \int P(x) \sin kx dx, \quad \int P(x) \cos kx dx,$$

где $P(x)$ — многочлен, а k — некоторое число.

Интегралы этих типов берутся по частям, если положить $u = P(x)$.

Пример 2. Найти $\int (x^2 - 2x + 7) e^{2x} dx$.

Решение. Положим $u = x^2 - 2x + 7$, $dv = e^{2x} dx$; тогда $du = (2x - 2) dx$, $v = \frac{1}{2} e^{2x}$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x + 7) e^{2x} dx &= \frac{1}{2} (x^2 - 2x + 7) e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} (2x - 2) dx = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - 2x + 7) e^{2x} - \int (x - 1) e^{2x} dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл является интегралом того же типа, что и данный интеграл, но степень многочлена $x - 1$ на единицу ниже степени многочлена $x^2 - 2x + 7$.

* $v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$. За v выбираем одну из первообразных от функции x .

Применяем к интегралу $\int (x-1)e^{2x} dx$ снова интегрирование по частям, полагая $u = x-1$, $dv = e^{2x} dx$; тогда $du = dx$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Имеем

$$\int (x-1)e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x + 7)e^{2x} dx &= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 7)e^{2x} - \left[\frac{1}{2}(x-1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} \right] + \\ &+ C = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 8\frac{1}{2})e^{2x} + C. \end{aligned}$$

II. Интегралы вида

$$\begin{aligned} \int P(x) \ln x dx, \quad \int P(x) \arcsin x dx, \quad \int P(x) \arccos x dx, \\ \int P(x) \operatorname{arctg} x dx, \quad \int P(x) \operatorname{arcctg} x dx, \end{aligned}$$

где $P(x)$ — многочлен относительно x .

Во всех этих случаях за u при интегрировании по частям принимают функцию, являющуюся множителем при $P(x)$.

Пример 3. Найти $\int (4x^3 + 6x - 7) \ln x dx$.

Решение. Положим $u = \ln x$, $dv = (4x^3 + 6x - 7)dx$; тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = x^4 + 3x^2 - 7x$.

Формула (11) дает:

$$\begin{aligned} \int (4x^3 + 6x - 7) \ln x dx &= (x^4 + 3x^2 - 7x) \ln x - \int \frac{x^4 + 3x^2 - 7x}{x} dx = \\ &= (x^4 + 3x^2 - 7x) \ln x - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 7x \right) + C. \end{aligned}$$

III. Интегралы вида $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int e^{ax} \sin bx dx$, где a и b — числа. Эти интегралы находятся двукратным интегрированием по частям.

Рассмотрим пример.

Пример 4. Найти $\int e^{2x} \cos 3x dx$.

Решение. Положим $u = e^{2x}$, $dv = \cos 3x dx$ *, откуда $du = 2e^{2x} dx$, $v = \frac{1}{3} \sin 3x$.

Тогда

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x dx.$$

К последнему интегралу снова применим интегрирование по частям, положив $u = e^{2x}$, $dv = \sin 3x dx$, тогда $du = 2e^{2x} dx$, $v = -\frac{1}{3} \cos 3x$.

* Можно также принять $u = \cos 3x$, $dv = e^{2x} dx$.

Следовательно,

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx,$$

Таким образом,

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx \right),$$

или

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \left(\sin 3x + \frac{2}{3} \cos 3x \right) - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos 3x dx.$$

В правой части последнего соотношения стоит искомый интеграл $\int e^{2x} \cos 3x dx$. Переносим его в левую часть, получим

$$\left(1 + \frac{4}{9} \right) \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \left(\sin 3x + \frac{2}{3} \cos 3x \right).$$

Отсюда

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x} (3 \sin 3x + 2 \cos 3x)}{13}.$$

Полученная функция есть одна из первообразных от функции $e^{2x} \cos 3x$. Чтобы найти все первообразные, остается к правой части прибавить произвольную постоянную C :

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x} (3 \sin 3x + 2 \cos 3x)}{13} + C.$$

Перейдем теперь к интегрированию некоторых видов элементарных функций. При этом мы систематически будем пользоваться изложенными в этом параграфе общими методами интегрирования.

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Некоторые сведения о многочленах

В этом пункте мы кратко рассмотрим некоторые сведения о многочленах, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Корнем многочлена $P(x)$ называют всякое число α (действительное или комплексное), обращающее многочлен в нуль, т. е. такое, что $P(\alpha) = 0$. Так, например, для многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 8$ число $\alpha = 2$ является корнем, так как $2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 - 8 = 0$.

Имеет место следующая теорема, которую принимаем без доказательства.

Всякий многочлен степени n может быть представлен в виде произведения n линейных множителей вида $x - \alpha$ и постоянного числа a_0 — коэффициента при старшей степени x , т. е.

$$P(x) = a_0 (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n). \quad (12)$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, очевидно, являются корнями многочлена $P(x)$.

Пример 1. Легко проверить, что

$$5x^4 - 40x^3 + 115x^2 - 140x + 60 = 5(x-2)(x-2)(x-1)(x-3).$$

Пример 2. Многочлен

$$x^3 + x^2 + 9x + 9 = (x+1)(x-3i)(x+3i).$$

Среди линейных множителей, на которые разложен многочлен, могут быть одинаковые. Объединяя в разложении (12) одинаковые сомножители, мы можем его записать в виде

$$P(x) = a_0(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}\dots(x-l)^{k_s}, \quad (12')$$

где все корни $a, b, \dots, l$ различны и $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$.

Корень a многочлена $P(x)$, для которого линейный множитель в разложении (12') встречается k_1 раз, называется *корнем кратности k_1* . Корень кратности единицы называется *простым*.

Так, например, многочлен $P(x) = 4(x-2)^3(x+1)^2(x-5)$ имеет следующие корни: $a=2$, $b=-1$, $c=5$, причем 2 есть корень кратности 3; (-1) — корень кратности 2; 5 — простой корень.

В алгебре доказывается, что *если многочлен с действительными коэффициентами имеет корнем комплексное число $\gamma = \alpha + \beta i$ кратности k , то сопряженное комплексное число $\bar{\gamma} = \alpha - \beta i$ также является корнем многочлена той же кратности*.

Отсюда следует, что если в разложении многочлена на множители имеется множитель $(x-\gamma)^k$, соответствующий комплексному корню $\gamma = \alpha + \beta i$, то в этом разложении имеется множитель $(x-\bar{\gamma})^k$, соответствующий сопряженному корню $\bar{\gamma} = \alpha - \beta i$. Перемножим эти два множителя, соответствующие сопряженным корням:

$$\begin{aligned} (x-\gamma)^k(x-\bar{\gamma})^k &= [x-(\alpha+\beta i)]^k[x-(\alpha-\beta i)]^k = \\ &= \{[(x-\alpha)-\beta i] \cdot [(x-\alpha)+\beta i]\}^k = (x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)^k = (x^2+px+q)^k, \end{aligned}$$

где $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$.

Таким образом, произведение линейных множителей, соответствующих сопряженным корням, можно заменить квадратным трехчленом с действительными коэффициентами.

Все вышеизложенное позволяет высказать следующее окончательное предложение, с помощью которого удастся избежать мнимых чисел при разложении многочлена на множители.

Всякий многочлен с действительными коэффициентами можно представить в следующей форме:

$$P(x) = a_0(x-a)^{t_1}(x-b)^{t_2}\dots(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}\dots$$

В этом разложении линейные множители соответствуют действительным корням, а квадратные трехчлены соответствуют комплексным корням многочлена. Постоянные $a_0, a, b, \dots, p_1, q_1, \dots$ — действительные числа.

2. Рациональные дроби.

Выделение правильной рациональной дроби

Как мы знаем (см. гл. 1, § 4, п. 7), *дробной рациональной функцией* или просто *рациональной дробью* называется функция, равная частному от деления двух многочленов:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени m , а $Q_n(x)$ — многочлен степени n .

Например: $R(x) = \frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x - 1}$.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя; в противном случае рациональная дробь называется *неправильной*. Приведенная выше рациональная дробь *неправильна*.

Задача настоящего параграфа заключается в изложении методов интегрирования рациональных дробей.

Отметим прежде всего, что *всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби*.

В самом деле, пусть $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — неправильная рациональная дробь, т. е. степень $P(x)$ больше или равна степени $Q(x)$. Разделив числитель на знаменатель, получим тождество

$$P(x) - Q(x)L(x) = r(x),$$

где $L(x)$ и $r(x)$ — многочлены, причем степень остатка $r(x)$ меньше степени знаменателя дроби $Q(x)$.

Отсюда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)},$$

где $\frac{r(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь.

Например, пусть $R(x) = \frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x - 1}$. Разделив $x^4 + 5x^3 - 6x + 5$ на $x^3 + 2x - 1$, получим частное $L(x) = x + 5$ и остаток $r(x) = -2x^2 - 15x + 10$.

Следовательно,

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x - 1} = x + 5 + \frac{-2x^2 - 15x + 10}{x^3 + 2x - 1}.$$

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ сводится к интегрированию многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{r(x)}{Q(x)}$:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left[L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} \right] dx = \int L(x) dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} dx.$$

Так как многочлен мы интегрировать умеем, то остается рассмотреть интегрирование правильных рациональных дробей.

Как мы увидим ниже (см. п. 4), всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа так называемых *простейших* дробей следующих четырех типов:

$$\begin{aligned} \text{I. } & \frac{A}{x-a}; & \text{II. } & \frac{A}{(x-a)^n} \quad (n=2, 3, \dots); \\ \text{III. } & \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; & \text{IV. } & \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \quad (n=2, 3, \dots), \end{aligned}$$

где A, a, p, q, M и N — действительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $\frac{p^2}{4}-q < 0$. Поэтому если мы научимся интегрировать простейшие дроби и разлагать правильную рациональную дробь на сумму простейших, то задача интегрирования рациональных дробей будет решена.

3. Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование простейших дробей I и II типов не представляет никакого труда. В самом деле:

$$\begin{aligned} \text{I. } & \int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C. \\ \text{II. } & \int \frac{A dx}{(x-a)^n} = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к интегрированию рациональных дробей III и IV типов.

$$\text{III. } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx.$$

Рассмотрим отдельно знаменатель x^2+px+q и дополним x^2+px до полного квадрата:

$$x^2+px+q = x^2 + 2 \frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4} + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Так как по условию трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, то выражение $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Введем обозначение $q - \frac{p^2}{4} = a^2$. Применим теперь к интегралу замену переменной, положив $t = x + \frac{p}{2}$ *. Отсюда

$$x = t - \frac{p}{2}, \quad dx = dt, \quad x^2+px+q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = t^2 + a^2.$$

* Эту подстановку легко запомнить, если заметить, что t равно половине производной знаменателя: $t = \frac{1}{2} (x^2+px+q)' = x + \frac{p}{2}$.

Следовательно,

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2} dt = M \int \frac{t dt}{t^2+a^2} + \\ + \left(N-\frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2} \ln(t^2+a^2) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Заменяя, наконец, t и a их выражениями, получим

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{4}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Пример. Найти

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10} dx.$$

Решение. Введем новую переменную t , положив ее равной половине производной знаменателя (см. сноску на стр. 305). Тогда

$$t = \frac{1}{2}(x^2+2x+10)' = x+1, \quad x = t-1, \quad dx = dt.$$

$$x^2+2x+10 = (t-1)^2+2(t-1)+10 = t^2+9.$$

Следовательно,

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10} dx = \int \frac{3(t-1)+5}{t^2+9} dt = 3 \int \frac{t dt}{t^2+9} + 2 \int \frac{dt}{t^2+9} = \\ = \frac{3}{2} \ln(t^2+9) + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+10) + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C.$$

$$\text{IV. } \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx.$$

Введем, как и в случае III, новую переменную t , положив $t = x + \frac{p}{2}$. Это дает:

$$x = t - \frac{p}{2}, \quad dx = dt, \quad x^2+px+q = t^2+a^2,$$

где, как и выше, $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$.

Следовательно,

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx = M \int \frac{t dt}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}. \quad (13)$$

Первый интеграл соотношения (13) легко вычисляется.

$$\int \frac{t dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2} \int (t^2+a^2)^{-n} d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-n)} (t^2+a^2)^{-n+1} + C.$$

Итак, остается вычислить интеграл $I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}$. Запишем этот интеграл в виде

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2 + a^2) - t^2}{(t^2 + a^2)^n} dt = \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^n} \right].$$

Замечая, что $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n-1}} = I_{n-1}$, получим

$$I_n = \frac{1}{a^2} \left[I_{n-1} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^n} \right]. \quad (*)$$

К интегралу $\int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^n}$ применим интегрирование по частям, полагая $u = t$, $du = dt$, $dv = \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^n}$, $v = \frac{1}{2(1-n)(t^2 + a^2)^{n-1}}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^n} &= \frac{t}{2(1-n)(t^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n-1}} = \\ &= \frac{t}{2(1-n)(t^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Подставляя найденный интеграл в формулу (*), получим

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{a^2} \left[I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1} \right] = \\ &= \frac{1}{a^2} \left[\frac{3-2n}{2-2n} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} \right]. \end{aligned}$$

Итак,

$$I_n = \frac{1}{a^2} \left[\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} \right]. \quad (**)$$

Полученная формула называется формулой приведения. Покажем ее применение на примере.

Пример. Найти $I_3 = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^3}$.

Решение. Здесь $a = 1$, $n = 3$. Применяя формулу (**), найдем

$$I_3 = \frac{1}{1^2} \left[\frac{2 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 3 - 2} I_2 + \frac{t}{2(3-1)(t^2 + 1)^2} \right] = \frac{3}{4} I_2 + \frac{t}{4(t^2 + 1)^2}.$$

Но по той же формуле (**)

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \left[\frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} I_1 + \frac{t}{2(2-1)(t^2 + 1)} \right] = \frac{1}{2} I_1 + \frac{t}{2(t^2 + 1)}.$$

Так как

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C,$$

то

$$I_3 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2 + 1)} + C.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{3}{4} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} \right] + \frac{t}{4(t^2+1)^2} + C = \\ &= \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3t}{8(t^2+1)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} t + C. \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы закончить вопрос об интегрировании рациональных дробей, нам остается выяснить, как правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших.

4. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби

Выше (см. п. 2) мы видели, что интегрирование рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби. Мы сейчас выясним, каким образом всякая правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть разложена на простейшие дроби. При разложении правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на простейшие дроби существенное значение имеет разложение знаменателя дроби $Q(x)$ на произведение линейных и квадратных множителей (см. п. 1).

Пусть для определенности знаменатель $Q(x)$ разлагается на множители следующим образом:

$$Q(x) = (x-a)^k (x-b)^l (x^2+px+q)^m,$$

где квадратный трехчлен не имеет действительных корней. Тогда имеет место следующая теорема, которую приводим без доказательства.

Теорема. Правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x) = (x-a)^k (x-b)^l (x^2+px+q)^m$, можно единственным образом разложить в сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \\ &+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}, \end{aligned} \quad (14)$$

где A_i, B_i, M_i, N_i — действительные числа ($i=1, 2, \dots$)

Из формулы (14) видим, что линейным множителям знаменателя $Q(x)$ соответствуют простейшие дроби I и II типа, а квадратным множителям соответствуют простейшие дроби III и IV типа. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратному), равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби на множители. Правило разложения правильной рациональной дроби остается справедливой при любом конечном числе линейных и квадратных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q(x)$.

5. Метод неопределенных коэффициентов

Одним из наиболее простых методов определения коэффициентов в разложении правильной дроби на простейшие является метод неопределенных коэффициентов.

Поясним применение этого метода на примерах.

Пример 1. Разложить на простейшие дроби

$$\frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}.$$

Решение. Применим формулу (14):

$$\frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 2}, \quad (15)$$

где A_1 , A_2 , M и N — пока неизвестные числа.

Приводим правую часть тождества (15) к общему знаменателю:

$$\frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A_1(x-1)(x^2 + 2x + 2) + A_2(x^2 + 2x + 2) + (Mx + N)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}.$$

В этом тождестве знаменатели дробей одинаковы. Следовательно, числители должны быть тождественно равны:

$$x^2 - 5x + 9 = A_1(x-1)(x^2 + 2x + 2) + A_2(x^2 + 2x + 2) + (Mx + N)(x-1)^2.$$

Раскрыв скобки и расположив многочлен в правой части последнего равенства по убывающим степеням x , получим

$$x^2 - 5x + 9 = (A_1 + M)x^3 + (A_1 + A_2 - 2M + N)x^2 + (2A_2 + M - 2N)x + (-2A_1 + 2A_2 + N).$$

Два многочлена тогда и только тогда тождественно равны друг другу, когда коэффициенты при одинаковых степенях x равны. Приравнявая друг другу коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях x , получим систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x^3: \quad A_1 + M = 0; \\ \text{при } x^2: \quad A_1 + A_2 - 2M + N = 1; \\ \text{при } x: \quad 2A_2 + M - 2N = -5; \\ \text{свободный член: } -2A_1 + 2A_2 + N = 9. \end{array} \right\}$$

Решив эту систему, получим*

$$A_1 = -\frac{7}{5}, \quad A_2 = 1, \quad M = \frac{7}{5}, \quad N = \frac{21}{5}.$$

Подставив в формулу (15) вместо A_1 , A_2 , M и N найденные значения, получим окончательно

$$\frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} = -\frac{7}{5(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{7x + 21}{5(x^2 + 2x + 2)}. \quad (16)$$

* Так как разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших всегда возможно и единственно, то система уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения всегда имеет единственное решение.

Пример 2. Разложить на простейшие дроби

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{(x-2)^2(x+3)}.$$

Решение. Так как знаменатель имеет только действительные корни, то разложение дроби согласно формуле (14) имеет вид

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{B_1}{x+3}. \quad (17)$$

Приведем правую часть соотношения (17) к общему знаменателю:

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A_1(x-2)(x+3) + A_2(x+3) + B_1(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)}.$$

Приравнявая числители, получаем

$$x^2 + 2x + 2 = A_1(x-2)(x+3) + A_2(x+3) + B_1(x-2)^2.$$

Расположим многочлен в правой части по убывающим степеням x :

$$x^2 + 2x + 2 = (A_1 + B_1)x^2 + (A_1 + A_2 - 4B_1)x + (-6A_1 + 3A_2 + 4B_1).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях в правой и левой частях равенства, получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} A_1 + B_1 &= 1, \\ A_1 + A_2 - 4B_1 &= 2, \\ -6A_1 + 3A_2 + 4B_1 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему, найдем $A_1 = \frac{4}{5}$, $A_2 = 2$, $B_1 = \frac{1}{5}$.

Подставив найденные значения коэффициентов в соотношение (17), получим

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{4}{5(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{5(x+3)}. \quad (18)$$

Пример 3. Разложить на простейшие дроби

$$\frac{2x^2 + 10x - 18}{(x-1)(x+2)(x-3)}.$$

Решение. Применяя формулу (14), имеем тождество

$$\frac{2x^2 + 10x - 18}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}.$$

Приводя дроби в правой части к общему знаменателю и приравнявая после этого числители правой и левой частей, получим тождество

$$2x^2 + 10x - 18 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2), \quad (19)$$

откуда

$$2x^2 + 10x - 18 = (A + B + C)x^2 + (-A - 4B + C)x + (-6A + 3B - 2C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} A + B + C &= 2, \\ -A - 4B + C &= 10, \\ -6A + 3B - 2C &= -18, \end{aligned} \right\}$$

из которой находим $A = 1$; $B = -2$, $C = 3$. Следовательно,

$$\frac{2x^2 + 10x - 18}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-3}.$$

Часто нахождение коэффициентов разложения можно значительно упростить. В самом деле, рассмотрим только что приведенный пример. Полученное там выражение (19)

$$2x^2 + 10x - 18 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2)$$

есть тождество, справедливое при любом значении x .

Выбираем такие значения x , при которых выражение (19) примет наиболее простой вид. Здесь проще всего за x принять один из корней знаменателя.

Полагая $x = 1$, имеем $-6 = -6A$, откуда $A = 1$.

Аналогично, полагая $x = -2$, найдем $-30 = 15B$, $B = -2$.

При $x = 3$ $30 = 10C$, $C = 3$.

Указанный метод особенно удобен в случае, когда знаменатель $Q(x)$ правильной рациональной дроби имеет только действительные простые корни.

На практике часто комбинируются оба рассмотренных выше приема.

Пример 4. Разложить на простейшие дроби

$$\frac{x^2 + x + 13}{(x-1)(x^2+4)}.$$

Решение. Применяя формулу (14), получим

$$\frac{x^2 + x + 13}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx + N}{x^2+4}.$$

Приводя дроби в правой части равенства к общему знаменателю и приравнивая после этого числители правой и левой частей, получим

$$x^2 + x + 13 = A(x^2 + 4) + (Mx + N)(x-1), \quad (20)$$

или

$$x^2 + x + 13 = (A + M)x^2 + (-M + N)x + 4A - N. \quad (20')$$

Полагая в формуле (20) $x = 1$, имеем $15 = 5A$, откуда $A = 3$.

Приравнивая коэффициенты при x^2 и x и замечая, что $A = 3$, получаем

$$\left. \begin{aligned} 3 + M &= 1, \\ -M + N &= 1, \end{aligned} \right\}$$

откуда $M = -2$, $N = -1$.

Следовательно,

$$\frac{x^2+x+13}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{3}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+4}.$$

6. Интегрирование рациональных дробей

Все вышеизложенное в предыдущих пунктах позволяет нам сформулировать основные правила интегрирования рациональной дроби.

1. Если рациональная дробь неправильна, то ее представляют в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (см. п. 2).

Этим самым интегрирование неправильной рациональной дроби сводят к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

2. Разлагают знаменатель правильной дроби на множители.

3. Правильную рациональную дробь разлагают на сумму простейших дробей. Этим самым интегрирование правильной рациональной дроби сводят к интегрированию простейших дробей.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти $\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12} dx$.

Решение. Под интегралом стоит неправильная рациональная дробь. Выделяя целую часть, получим

$$\frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12} = x-2 + \frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12} dx = \\ &= \int \left[x-2 + \frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12} \right] dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12} dx. \end{aligned}$$

Замечая, что $x^3-x^2-8x+12 = (x-2)^2(x+3)$, разложим правильную рациональную дробь

$$\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12} = \frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}$$

на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12} = \frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{4}{5(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{5(x+3)}$$

(см. формулу (18)). Поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12} dx &= \int \left[\frac{4}{5(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{5(x+3)} \right] dx = \\ &= \frac{4}{5} \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{5} \ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 30x - 22}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx = \\ = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{4}{5} \ln |x - 2| - \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{5} \ln |x + 3| + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x - 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} dx$.

Решение. Под интегралом стоит правильная рациональная дробь. Разлагая ее на простейшие дроби (см. формулу (16)), получим

$$\frac{x^2 - 5x + 9}{(x - 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} = -\frac{7}{5(x - 1)} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{7x + 21}{5(x^2 + 2x + 2)}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x - 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} dx = -\frac{7}{5} \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{dx}{(x - 1)^2} + \frac{7}{5} \int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Что касается последнего интеграла в правой части равенства, то он берется, как мы знаем (см. п. 3), подстановкой $t = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)'$. Это дает: $t = x + 1$, $x = t - 1$, $dx = dt$, $x^2 + 2x + 2 = t^2 + 1$. Тогда

$$\int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{t + 2}{t^2 + 1} dt = \int \frac{t dt}{t^2 + 1} + 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + \\ + 2 \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + 2 \operatorname{arctg}(x + 1) + C.$$

Таким образом, имеем

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x - 1)^2 (x^2 + 2x + 2)} dx = -\frac{7}{5} \ln |x - 1| - \frac{1}{x - 1} + \frac{7}{10} \ln(x^2 + 2x + 2) + \\ + \frac{14}{5} \operatorname{arctg}(x + 1) + C.$$

§ 4. Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$, где m и n — целые числа

Рассмотрим вначале случай, когда одно из чисел m или n нечетно. В этом случае интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций. Сущность метода интегрирования ясна из следующих примеров.

Пример 1. Найти $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$.

Решение. Замечая, что $\sin x dx = -d \cos x$, сделаем замену переменной, положив $z = \cos x$. Это дает $dz = -\sin x dx$, и, следовательно, так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - z^2$, получим

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \cdot \sin x dx = -\int (1 - z^2)^2 z^4 dz = \\ = -\int (z^4 - 2z^6 + z^8) dz = -\frac{z^5}{5} + \frac{2z^7}{7} - \frac{z^9}{9} + C = \\ = \frac{-\cos^5 x}{5} + \frac{2 \cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.

Решение. Так как $\cos x dx = d \sin x$, то полагая $z = \sin x$, получим $dz = \cos x dx$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - z^2$, $\sin^2 x = z^2$, и

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{1 - z^2}{z^2} dz = \int \left(\frac{1}{z^2} - 1 \right) dz = \\ &= -\frac{1}{z} - z + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.\end{aligned}$$

Замечание. Этот же метод применим и в том случае, когда одно из чисел m или n нечетно и положительно, а другое—любое действительное число.

Пример 3. Найти $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx$.

Решение. Имеем: $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx = \int \cos^{2/3} x \sin^2 x \sin x dx$. Полагаем $\cos x = z$. Тогда $dz = -\sin x dx$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx &= -\int z^{2/3} (1 - z^2) dz = -\int (z^{2/3} - z^{8/3}) dz = \\ &= -\frac{3z^{5/3}}{5} + \frac{3z^{11/3}}{11} + C = 3z^{5/3} \left(\frac{z^2}{11} - \frac{1}{5} \right) + \\ &+ C = 3 \cos x \sqrt[3]{\cos^2 x} \left(\frac{\cos^2 x}{11} - \frac{1}{5} \right) + C.\end{aligned}$$

Пусть теперь оба показателя m и n —четные неотрицательные числа (в частности, одно из них может быть равным нулю).

Заменяя $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x \cos x$ по формулам

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

мы добьемся того, что произведение $\sin^n x \cdot \cos^m x$ заменится суммой произведений подобного вида, но с меньшими показателями степеней. Метод интегрирования ясен из следующих примеров.

Пример 4. Найти $\int \cos^3 x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \cos^3 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Пример 5. Найти $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^2 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)^2 (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx - \\ &- \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d \sin 2x = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.\end{aligned}$$

Замечание. Как мы знаем, первообразные от одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. Это обстоятельство следует иметь в виду (особенно при интегрировании тригонометрических функций), так как в зависимости от метода интегрирования мы можем получать различные по форме ответы.

Так, например, $\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$. Но, с другой стороны, $\int \sin 2x \, dx = \int 2 \sin x \cos x \, dx = 2 \int \sin x \, d \sin x = \sin^2 x + C$.

Таким образом, $-\frac{1}{2} \cos 2x$ и $\sin^2 x$ являются первообразными для одной и той же функции $\sin 2x$ и, как легко видеть, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое:

$$-\frac{1}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) = -\frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 x) = -\frac{1}{2} + \sin^2 x.$$

Для дальнейшего изучения методов интегрирования тригонометрических функций нам понадобятся новые понятия, изложенные в следующем пункте.

2. Рациональные функции двух переменных

Многочленом относительно двух переменных u и v называется сумма произведений вида $Au^n v^m$, где n и m — целые неотрицательные числа.

Например, выражения $3u^2v + 5u^5v^4 - 5v^3 + 6$, $5v^3 + 4u$ являются многочленами относительно u и v .

Частное от деления двух многочленов относительно u и v называется *рациональной функцией* от u и v , или *рациональным выражением* относительно u и v .

Например, дроби $\frac{u^2 + 3v}{u^3 + 4v^2}$, $\frac{2u^2 - v^2}{4v}$, $\frac{3}{u^2 + v^3}$ являются рациональными выражениями относительно u и v . Рациональную функцию от u и v обозначают $R(u; v)$.

Легко заметить, что сумма, разность, произведение и частное нескольких рациональных функций от u и v есть тоже рациональная функция от u и v .

Рациональным выражением относительно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называется рациональная функция от u и v , в которую вместо u подставлено $\varphi(x)$, а вместо v — $\psi(x)$. Рациональное выражение относительно $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ обозначают $R(\varphi(x); \psi(x))$.

Пример 1. $\frac{\sqrt{x+4} - x}{x^2 + 3\sqrt{(x+4)^3}}$ — рациональное выражение относительно x и $\sqrt{x+4}$.

Пример 2. $\frac{\sin x + \cos^3 x}{\sin^3 x + 2 \cos^2 x}$ — рациональное выражение относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Заметим, что если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — рациональные функции от x , то $R(\varphi(x); \psi(x))$ также является рациональной функцией от x .

3. Интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x) dx$

В этом пункте мы рассмотрим общий метод нахождения интегралов вида

$$\int R(\sin x; \cos x) dx,$$

где $R(\sin x; \cos x)$ — рациональное выражение относительно $\sin x$ и $\cos x$. Такими интегралами, например, являются интегралы

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x + 2} dx, \quad \int \sin^3 x \cos^2 x dx, \quad \int \frac{dx}{\sin x}.$$

Наоборот, интеграл $\int \sin^{7/4} x \cos^2 x dx$ не является интегралом указанного вида, так как под интегралом стоит функция, не рациональная относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Покажем, что всякий интеграл вида $\int R(\sin x; \cos x) dx$ можно свести к интегралу от рациональной функции. Для этого вместо x введем новую переменную z , связанную с переменной x соотношением

$$z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \quad (21)$$

Тогда $\sin x$ и $\cos x$ выразятся рационально через z . В самом деле, применяя формулы, известные из тригонометрии, имеем

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2z}{1 + z^2}.$$

Аналогично

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}.$$

Наконец, учитывая, что $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, найдем $x = 2 \operatorname{arctg} z$, $dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$.

Итак, если положить $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, то

$$\sin x = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{1 + z^2}. \quad (22)$$

Формулы (22) показывают, что $\sin x$, $\cos x$ и dx рационально выражаются через z . Подставляя выражения $\sin x$, $\cos x$ и dx через z , получим

$$\int R(\sin x; \cos x) dx = \int R\left(\frac{2z}{1 + z^2}; \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right) \frac{2}{1 + z^2} dz.$$

Последний интеграл является интегралом от рациональной функции переменной z и может быть вычислен методами, рассмотренными в § 3.

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение. Полагая $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ и применяя формулы (22), имеем

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dz}{\frac{1+z^2}{2z}} = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Решение. Полагая $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, находим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{2dz}{\frac{1+z^2}{1-z^2}} = 2 \int \frac{dz}{1-z^2} = \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + C = \ln \left| \frac{1+\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C = \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, \quad (\text{XVII})$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \quad (\text{XVIII})$$

Эти формулы рекомендуется запомнить.

Хотя подстановкой $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ интеграл $\int R(\sin x; \cos x) dx$ всегда приводится к интегралу от рациональной функции, но очень часто это ведет к слишком громоздким вычислениям. Поэтому во многих случаях целесообразнее пользоваться другими методами нахождения этого интеграла. Так, например, если $R(\sin x, \cos x) = \sin^n x \cos^m x$, где m и n — целые числа, то удобнее пользоваться методами, изложенными в п. 1.

Укажем еще на один частный случай функции $R(\sin x; \cos x)$, при котором применением другой подстановки значительно сокращают вычисления.

Рассмотрим интеграл от функции, рационально зависящей только от $\operatorname{tg} x$: $\int R(\operatorname{tg} x) dx$.

Этот интеграл можно взять заменой переменной $\operatorname{tg} x = z$. В самом деле, так как $x = \operatorname{arctg} z$ и $dx = \frac{dz}{1+z^2}$, то

$$\int (\operatorname{tg} x) dx = \int R(z) \frac{dz}{1+z^2}.$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле является рациональной функцией от z .

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1}$.

Решение. Сделаем замену переменной, положив $z = \operatorname{tg} x$. Тогда $x = \operatorname{arctg} z$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1} &= \int \frac{dz}{(1+z)(1+z^2)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{z+1} + \frac{1-z}{1+z^2} \right) dz = \frac{1}{2} \ln |z+1| + \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z - \frac{1}{4} \ln(1+z^2) + C = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x + 1| + \frac{1}{2} x - \\ &- \frac{1}{4} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x + 1| + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + \frac{1}{2} x + C. \end{aligned}$$

Пример 4. $\int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \frac{z^3 dz}{1+z^2} = \int \left(z - \frac{z}{1+z^2} \right) dz = \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) +$
 $+ C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\cos^2 x} + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} +$
 $+ \ln |\cos x| + C.$

Замечание. Такой же подстановкой берутся интегралы $\int R(\sin x; \cos x) dx$, если $\sin x$ и $\cos x$ входят только в четных степенях. Это следует из того, что $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются рационально через $\operatorname{tg} x$:

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Пример 5. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{1}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{2+z^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} + C =$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C.$

§ 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные выражения.

1. Интегралы вида $\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx$

Интегралы вида

$$\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx \quad (23)$$

где n — целое число, а $R(x; \sqrt[n]{ax+b})$ — рациональное выражение относительно x и $\sqrt[n]{ax+b}$, могут быть сведены к интегралам от рациональных функций. В самом деле, сделаем в интеграле (23)

замену переменной, положив $ax + b = z^n$; тогда $x = \frac{z^n - b}{a}$, $dx = \frac{nz^{n-1}}{a} dz$, $\sqrt[n]{ax + b} = z$.

Следовательно,

$$\int R(x; \sqrt[n]{ax + b}) dx = \int R\left(\frac{z^n - b}{a}; z\right) \frac{nz^{n-1}}{a} dz.$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства, есть интеграл от рациональной функции относительно переменной интегрирования z и, следовательно, может быть найден приемами, изложенными в § 3.

Пример 1. Найти $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x}} dx$.

Решение. Здесь $ax + b = x$, $n = 2$. Полагаем $x = z^2$, откуда $dx = 2z dz$.

Следовательно,

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x}} dx = \int \frac{(1 - z) 2z dz}{z^2 - 2z} = 2 \int \frac{(1 - z) dz}{z - 2}.$$

Таким образом, мы свели наш интеграл к интегралу от рациональной функции.

$$2 \int \frac{(1 - z) dz}{z - 2} = 2 \int \left(-1 - \frac{1}{z - 2} \right) dz = -2z - 2 \ln |z - 2| + C.$$

Подставляя вместо z его выражение через x , т. е. $z = \sqrt{x}$, имеем

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x}} dx = -2(\sqrt{x} + \ln |\sqrt{x} - 2|) + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{2x + \sqrt[4]{2x - 3}}{3\sqrt[4]{2x - 3} + \sqrt[4]{(2x - 3)^3}} dx$.

Решение. Приводя в подынтегральном выражении радикалы к одному показателю, убеждаемся, что оно рационально зависит от x и от $\sqrt[4]{2x - 3}$:

$$\frac{2x + \sqrt[4]{2x - 3}}{3\sqrt[4]{2x - 3} + \sqrt[4]{(2x - 3)^3}} = \frac{2x + (\sqrt[4]{2x - 3})^2}{3\sqrt[4]{2x - 3} + (\sqrt[4]{2x - 3})^3}.$$

Здесь $n = 4$, поэтому полагаем $2x - 3 = z^4$. Отсюда $x = \frac{z^4 + 3}{2}$, $dx = 2z^3 dz$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + \sqrt[4]{2x - 3}}{3\sqrt[4]{2x - 3} + \sqrt[4]{(2x - 3)^3}} dx &= \int \frac{(z^4 + 3 + z^2) 2z^3 dz}{3z + z^3} = 2 \int \frac{z^6 + z^4 + 3z^3}{3 + z^2} dz = \\ &= 2 \int \left(z^4 - 2z^2 + 9 - \frac{27}{3 + z^2} \right) dz = \\ &= 2 \left(\frac{z^5}{5} - \frac{2z^3}{3} + 9z - \frac{27}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{3}} \right) + C, \text{ где } z = \sqrt[4]{2x - 3}. \end{aligned}$$

Интегралы более общего вида:

$$\int R\left(x; \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad (24)$$

где R — рациональное выражение от x и $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, приводятся к интегралам от рациональной функции подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$.

2. Интеграл вида
$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} dx.$$

Частными видами этих интегралов являются интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}.$$

Первый интеграл табличный:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (\text{VIII}')$$

Для вычисления второго интеграла сделаем замену переменной, полагая $\sqrt{x^2+m} = -x+t$. Возведя обе части равенства в квадрат, получим $x^2+m = x^2-2xt+t^2$. Отсюда

$$x = \frac{t^2-m}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+m}{2t^2} dt.$$

Так как, кроме того, $\sqrt{x^2+m} = -x+t = -\frac{t^2-m}{2t} + t = \frac{t^2+m}{2t}$, то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \int \frac{\frac{t^2+m}{2t^2} dt}{\frac{t^2+m}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C.$$

Но так как $t = \sqrt{x^2+m} + x$, то окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln |x + \sqrt{x^2+m}| + C. \quad (\text{XIX})$$

Этот интеграл часто встречается, поэтому формулу (XIX) необходимо запомнить.

Перейдем теперь к интегралам вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} dx$. Эти интегралы заменой переменной $t = \frac{1}{2}(Ax^2+Bx+C)'$ приводятся к интегралам вида $\int \frac{Dt+E}{\sqrt{At^2+m}} dt$.

Вычисление последнего интеграла при $A > 0$ сводится к интегралу вида (XIX), а при $A < 0$ — к интегралу вида (VIII').

Пример 1. Найти $\int \frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}} dx$.

Решение. Полагая $t = \frac{1}{2}(6-2x-x^2)'$, имеем: $t = -1-x$,
 $x = -1-t$, $dx = -dt$ и $6-2x-x^2 = 6-2(-1-t)-(-1-t)^2 = 7-t^2$.
 Таким образом,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}} dx &= \int \frac{-1-t+5}{\sqrt{7-t^2}} (-dt) = \int \frac{t-4}{\sqrt{7-t^2}} dt = \int \frac{t dt}{\sqrt{7-t^2}} - \\ &- 4 \int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} = -\sqrt{7-t^2} - 4 \arcsin \frac{t}{\sqrt{7}} + C = \\ &= -\sqrt{6-2x-x^2} + 4 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{7}} + C.\end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

Решение. Полагаем: $t = \frac{1}{2}(x^2+4x+5)' = x+2$. Тогда $x = t-2$,
 $dx = dt$, $x^2+4x+5 = (t-2)^2+4(t-2)+5 = t^2+1$.
 Следовательно,

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} &= \int \frac{(t-2) dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{t dt}{\sqrt{t^2+1}} - 2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \\ &= \sqrt{t^2+1} - 2 \ln |t + \sqrt{t^2+1}| + C = \sqrt{x^2+4x+5} - \\ &- 2 \ln |x+2 + \sqrt{x^2+4x+5}| + C.\end{aligned}$$

3. Интегралы видов $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$ и $\int \sqrt{x^2+m} dx$

Рассмотрим, например, второй интеграл

$$\int \sqrt{x^2+m} dx = \int \frac{x^2+m}{\sqrt{x^2+m}} dx = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+m}} + m \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}. \quad (25)$$

По формуле (XIX) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln |x + \sqrt{x^2+m}| + C$.

Для вычисления интеграла $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+m}}$ применим метод интегрирования по частям, полагая $u = x$, $dv = \frac{x dx}{\sqrt{x^2+m}}$; тогда $du = dx$,
 $v = \sqrt{x^2+m}$.

Следовательно,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+m}} = x \sqrt{x^2+m} - \int \sqrt{x^2+m} dx.$$

Подставляя найденные значения интегралов в равенство (25), получим

$$\int \sqrt{x^2+m} dx = x \sqrt{x^2+m} - \int \sqrt{x^2+m} dx + m \ln |x + \sqrt{x^2+m}|.$$

В правой и в левой частях последнего соотношения стоит иско-
мый интеграл $\int \sqrt{x^2+m} dx$. Переносим его в левую часть, найдем

$$\int \sqrt{x^2+m} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2+m} + m \ln |x + \sqrt{x^2+m}|) + C.$$

Аналогичным приемом можно показать, что

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C.$$

4. Интегралы вида $\int R(x; \sqrt{Ax^2+Bx+C}) dx$,

где $R(x; \sqrt{Ax^2+Bx+C})$ — рациональное выражение относи-
тельно x и $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$.

Подстановкой $t = \frac{1}{2} (Ax^2+Bx+C)' = Ax + \frac{B}{2}$ подкоренное выра-
жение сведется к сумме или разности квадратов, и интеграл
 $\int R(x; \sqrt{Ax^2+Bx+C}) dx$ сведется в зависимости от коэффициентов
 A, B и C к одному из следующих интегралов:

$$\text{I. } \int R(t; \sqrt{a^2-t^2}) dt, \text{ II. } \int R(t; \sqrt{a^2+t^2}) dt, \text{ III. } \int R(t; \sqrt{t^2-a^2}) dt.$$

Эти интегралы находятся с помощью следующих подстановок:

$$t = a \sin z \text{ для интеграла I типа;}$$

$$t = a \operatorname{tg} z \text{ для интеграла II типа;}$$

$$t = \frac{a}{\cos z} \text{ для интеграла III типа.}$$

Пример 1. Найти $\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3} dx$.

Решение. Прежде всего в интеграле сделаем подстановку
 $t = \frac{1}{2} (x^2+2x-3)' = x+1, x=t-1, dx=dt$. Тогда $x^2+2x-3 =$
 $= (t-1)^2+2(t-1)-3 = t^2-4$.
Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3} dt = \int \frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3} dt.$$

Интеграл в правой части последнего равенства есть интеграл
III типа. Для его вычисления положим

$$t = \frac{2}{\cos z}. \text{ Тогда } dt = \frac{2 \sin z}{\cos^2 z} dz, \sqrt{t^2-4} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 z} - 4} =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{1}{\cos^2 z} - 1} = 2 \operatorname{tg} z. \text{ Таким образом,}$$

$$\int \frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3} dt = \int \frac{2 \operatorname{tg} z}{\left(\frac{2}{\cos z}\right)^3} \cdot \frac{2 \sin z}{\cos^2 z} dz = \frac{1}{2} \int \sin^3 z dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1-\cos 2z}{2} dz = \frac{1}{4} \left(z - \frac{\sin 2z}{2} \right) + C = \frac{1}{4} (z - \sin z \cos z) + C.$$

Так как $t = \frac{2}{\cos z}$, то $\cos z = \frac{2}{t}$, $z = \arccos\left(\frac{2}{t}\right)$, $\sin z = \sqrt{1 - \cos^2 z} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{t}\right)^2} = \frac{\sqrt{t^2 - 4}}{t}$. Поэтому

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{(x+1)^3} dx = \int \frac{\sqrt{t^2 - 4}}{t^3} dt = \frac{1}{4} \left[\arccos\left(\frac{2}{t}\right) - \frac{2\sqrt{t^2 - 4}}{t^2} \right] + C.$$

Возвращаясь к переменной x ($t = x + 1$), получим

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{(x+1)^3} dx = \frac{1}{4} \left[\arccos \frac{2}{x+1} - \frac{2\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{(x+1)^2} \right] + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$.

Решение. Интеграл $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$ — I типа. Положим $x = 2 \sin t$.

Тогда $dx = 2 \cos t dt$, $4 - x^2 = 4 - 4 \sin^2 t = 4 \cos^2 t$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{\sqrt{4 \cos^2 t}}{(2 \sin t)^2} 2 \cos t dt = \int \operatorname{ctg}^2 t dt = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = \\ &= -\operatorname{ctg} t - t + C. \end{aligned}$$

Так как $\sin t = \frac{x}{2}$, то $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$, $t = \arcsin \frac{x}{2}$.

Поэтому

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

Заметим, что интеграл $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx$, рассмотренный в п. 3, относится к I типу и может быть вычислен подстановкой $x = a \sin t$.

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{(\sqrt{4+x^2})^3}$.

Решение. Это интеграл II типа. Полагаем $x = 2 \operatorname{tg} t$. Отсюда

$dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 t + 4} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}} = \frac{2}{\cos t}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\sqrt{4+x^2})^3} dx &= \int \frac{\frac{2dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{2}{\cos t}\right)^3} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{4} \sin t + C = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} + C = \frac{1}{4} \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}} + C = \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C. \end{aligned}$$

§ 6. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О МЕТОДАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ИНТЕГРАЛЫ, НЕ БЕРУЩИЕСЯ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ

1. Общие замечания

Мы разобрали наиболее важные методы интегрирования, охватывающие обширный класс элементарных функций. Однако следует заметить, что на практике не всегда следует действовать по трафарету.

Так, например, интеграл $\int \frac{3x^2+4x-1}{x^3+2x^2-x-2} dx$ можно было бы взять обычным методом интегрирования рациональных функций, разложив подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{3x^2+4x-1}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{3x^2+4x-1}{(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Однако при внимательном рассмотрении подынтегральной функции мы замечаем, что числитель $3x^2+4x-1$ является производной знаменателя. Поэтому

$$\int \frac{3x^2+4x-1}{x^3+2x^2-x-2} dx = \int \frac{d(x^3+2x^2-x-2)}{x^3+2x^2-x-2} = \ln |x^3+2x^2-x-2| + C.$$

Нахождение многих интегралов часто сводится к ранее известным. Поэтому для практического интегрирования можно рекомендовать различные справочники, содержащие обширные таблицы интегралов. Например, справочник по математике И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева, а также таблицы интегралов Рыжика.

2. Понятие об интегралах, не берущихся в элементарных функциях

Как мы видели в дифференциальном исчислении, производная от любой элементарной функции есть функция элементарная. Другое дело операция, обратная дифференцированию, — интегрирование. Можно привести многочисленные примеры таких элементарных функций, первообразная от которых хотя и существует, но не является элементарной функцией. Так, например, хотя по теореме существования для функций e^{-x^2} , $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$ существуют первообразные, но они не выражаются в элементарных функциях. Несмотря на это, все эти первообразные хорошо изучены и для них составлены подробные таблицы, помогающие практически использовать эти функции. В дальнейшем мы познакомимся с методами вычисления значений таких функций.

Так, например, большое значение в различных приложениях играет первообразная $\Phi(x)$ от функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, удовлетворяющая дополнительному условию $\Phi(0)=0$. Эта функция, в частности, встречается в теории вероятностей и называется интегралом вероятностей. Для нее составлены таблицы значений для различных значений аргумента x .

Если первообразная для некоторой функции не является элементарной функцией, то говорят, что интеграл не берется в элементарных функциях.

ГЛАВА VIII

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ОПРЕДЕЛЕННОМУ ИНТЕГРАЛУ

1. Задача о площади

В элементарной геометрии рассматривались площади плоских фигур, ограниченных прямолинейными отрезками, а также площадь круга и его частей. Поставим задачу о вычислении площади плоской фигуры K , ограниченной произвольной замкнутой линией (рис. 170).

Вначале рассмотрим частный случай, когда фигура K лежит в плоскости Oxy и ограничена кривой AB , отрезком CD оси абсцисс и двумя прямыми CA и DB , проведенными в концах отрезка параллельно оси Oy (рис. 171). Назовем эту фигуру *криволинейной трапецией*, а отрезок CD — ее основанием. Предположим,

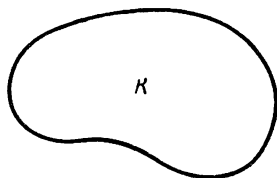


Рис. 170

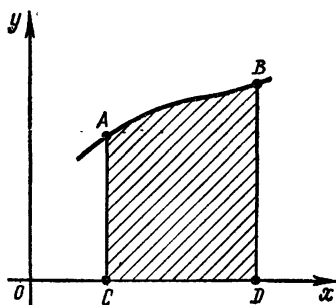


Рис. 171

что точки C и D имеют абсциссы соответственно a и b ($b > a$) и что кривая AB относительно выбранной системы координат задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная и положительная на сегменте $[a, b]$ функция.

Разобьем сегмент $[a, b]$ на части с помощью $n-1$ точек деления с абсциссами

$$x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1}.$$

Кроме того, для единообразия записи положим $a = x_0$ и $b = x_n$. Точки деления разбивают сегмент $[a, b]$ на n малых сегментов:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

Проведя через точки деления прямые, параллельные оси Oy , мы разобьем криволинейную трапецию на n малых криволинейных трапеций (рис. 172). Ясно, что площадь всей криволинейной трапеции равна сумме площадей всех n малых криволинейных трапеций.

Поэтому если обозначить через S площадь всей криволинейной трапеции, а через ΔS_i — площадь малой криволинейной трапеции с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ (i принимает значения от 1 до n), то

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_i + \dots + \Delta S_n, \quad (1)$$

или, в более короткой записи,

$$S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i, \quad (2)$$

где буква $\sum$ (сигма) есть знак суммы, а символ $\sum_{i=1}^n$ означает, что суммируются n слагаемых при изменении индекса i от 1 до n *.

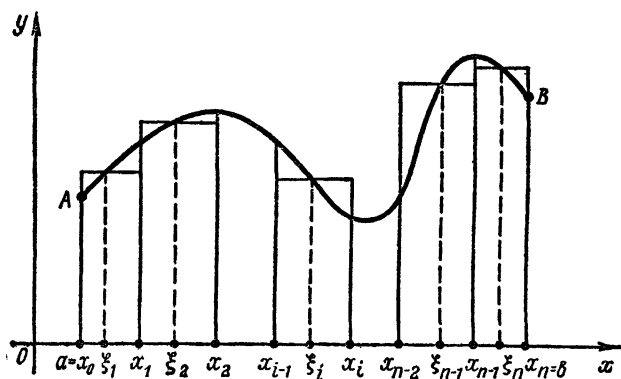


Рис. 172

Но вычислить площади этих малых трапеций так же трудно, как и площадь большой. Поэтому мы поступим следующим образом: в каждом из малых сегментов $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$) и построим в этой точке ординату кривой $f(\xi_i)$ (см. рис. 172 и 173).

Заменим теперь каждую малую криволинейную трапецию с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) прямоугольником с тем же основанием и с высотой, равной $f(\xi_i)$ (см. рис. 173).

Площадь этого прямоугольника равна

$$f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}),$$

так как $x_i - x_{i-1}$ — длина малого сегмента $[x_{i-1}, x_i]$. Приняв площадь этого прямоугольника за приближенное значение площади малой криволинейной трапеции, получим

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}). \quad (3)$$

* Например, $\sum_{i=1}^5 \sin i x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x$.

Заменив площадь каждой малой криволинейной трапеции площадью прямоугольника с тем же основанием, но с высотой, равной ординате кривой в некоторой произвольной точке основания, получим ступенчатую фигуру, показанную на рис. 172. Площадь этой ступенчатой фигуры дает нам приближенное значение площади криволинейной трапеции. Поэтому для площади S криволинейной трапеции получаем следующее приближенное равенство:

$$S \approx f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}),$$

или в более короткой записи,

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (4)$$

Обозначим через λ наибольшую из длин малых сегментов:

$$\lambda = \text{наиб. } \{(x_1 - x_0); (x_2 - x_1); \dots; (x_n - x_{n-1})\}.$$

С уменьшением λ точность приближенной формулы (4) увеличивается. Поэтому вполне естественно за точное значение площади S криволинейной трапеции принять предел суммы площадей ступенчатых фигур при условии, что наибольшая длина λ малых сегментов стремится к нулю. Таким образом,

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (5)$$

Если, кроме того, обозначить $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, то формула (5) примет следующий окончательный вид:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (6)$$

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции привело нас к нахождению предела некоторой суммы вида (6).

Возвращаясь к задаче о вычислении площади плоской области K , ограниченной произвольной замкнутой линией, заметим, что эта задача может быть сведена к задаче нахождения криволинейных трапеций. Например, на рис. 174 площадь области, ограниченной контуром $AnBmA$, можно найти как разность площадей криволинейных трапеций $A_1B_1BmA_1$ и $A_1B_1BnAA_1$.

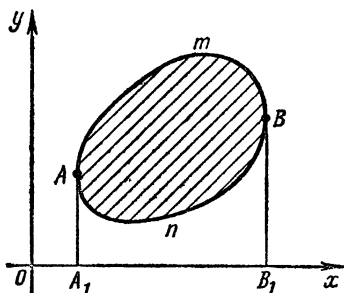


Рис. 174

2. Задача о работе переменной силы

Если материальная точка под действием силы F , не меняющейся ни по величине, ни по направлению, переместилась на расстояние l в направлении действия силы, то работа силы, как известно из механики, равна произведению величины силы F на перемещение l , т. е.

$$E = F \cdot l. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь случай, когда сила $\mathbf{F}$ меняется по своей численной величине, хотя и сохраняет постоянное направление. Пусть под действием этой силы материальная точка перемещается по прямой, направленной вдоль линии действия силы. Поставим задачу о вычислении работы силы $\mathbf{F}$.

Примем прямую, вдоль которой перемещается материальная точка, за ось Ox . Пусть начальная и конечная точки пути имеют абсциссы соответственно a и b ($a < b$). В каждой точке сегмента $[a, b]$

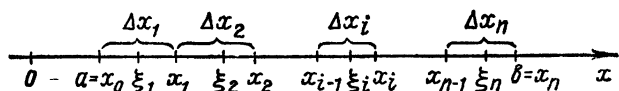


Рис. 175

величина силы имеет определенное значение, т. е. является некоторой функцией абсциссы: $F = f(x)$. Эту функцию будем считать непрерывной. Разобьем сегмент $[a, b]$ между начальной и конечной точкой пути на n малых сегментов (рис. 175)

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

(здесь $a = x_0$, $b = x_n$), длины которых соответственно равны:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

Работа на всем пути $[a, b]$ равна сумме работ на всех малых участках пути. Обозначив искомую работу на всем пути через E , а работу на малом участке $[x_{i-1}, x_i]$ — через ΔE_i , имеем

$$E = \sum_{i=1}^n \Delta E_i.$$

Но определить работу на малом участке так же трудно, как на всем пути, так как сила не постоянна. Однако, если сегменты $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения брать достаточно мелкими, то вследствие предположения о непрерывности функции $F = f(x)$ сила на каждом из малых участков пути изменится незначительно. Выберем в каждом малом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ по точке ξ_i ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$) и предположим, что в каждом малом сегменте величина силы имеет постоянное значение, равное ее значению в точке ξ_i : $F_i = f(\xi_i)$.

В этом предположении работа силы на отрезке пути $[x_{i-1}, x_i]$ согласно формуле (7) будет равна

$$F_i \Delta x_i = f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Но в действительности на малом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ сила непостоянна, поэтому выражение $f(\xi_i) \Delta x_i$ дает нам лишь приближенное значение работы на этом малом участке. Таким образом, на участке $[x_{i-1}, x_i]$

$$\Delta E_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i,$$

а на всем пути $[a, b]$

$$E \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (8)$$

Это приближенное равенство будет тем точнее, чем меньше Δx_i . Поэтому за точное значение работы естественно принять предел суммы (8) при условии, что наибольшая длина λ малых перемещений стремится к нулю, т. е.

$$E = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (9)$$

§ 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Если отвлечься от конкретного содержания задач, разобранных в § 1, то легко заметить, что при их решении применялся один и тот же прием, сводившийся, в конечном счете, к нахождению предела определенного вида сумм.

Решение каждой задачи было связано с некоторым действием, производимым над заданной на сегменте непрерывной функцией. В частности, в задаче о нахождении площади криволинейной трапеции такой функцией являлась переменная ордината кривой, в задаче о нахождении работы — переменная сила. К нахождению предела сумм, аналогичных рассмотренным выше, приводит целый ряд задач естествознания. Поэтому вполне естественно изучить этот процесс независимо от конкретного содержания той или иной задачи.

1. Интегральная сумма. Определенный интеграл

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$. Выполним следующие действия.

1. С помощью точек деления $x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1}$ разобьем сегмент $[a, b]$ на n «малых» сегментов (см. рис. 175):

$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, где $x_0 = a, x_n = b$.

2. В каждом из малых сегментов $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) выберем произвольную точку $\xi_i, x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ и умножим значение функции $f(x)$ в точке ξ_i на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего сегмента:

$$f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (10)$$

3. Составим сумму σ_n всех таких произведений:

$$\sigma_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_i) \Delta x_i + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n,$$

или в сокращенной записи:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (11)$$

Сумма вида (11) называется *интегральной суммой*.

4. Назовем наибольшую из длин малых сегментов $[x_{i-1}, x_i]$ *шагом разбиения* и обозначим его через λ .

Пусть число n сегментов разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ неограниченно растет и $\lambda \rightarrow 0$. Если при этом интегральная сумма σ_n имеет предел I , который не зависит ни от способа разбиения сегмента $[a, b]$ на малые сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, ни от выбора точек ξ_i в каждом из них, то это число I называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x) dx$ (читается так: «определенный интеграл от a до b от $f(x)$ на dx).

Таким образом,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (12)$$

Числа a и b называют соответственно *нижней и верхней границами интегрирования**, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, x — *переменной интегрирования*, а сегмент $[a, b]$ — *сегментом интегрирования* (или областью интегрирования).

Таким образом, приходим к следующему определению.

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма, когда шаг разбиения стремится к нулю.

Функция $f(x)$, для которой на сегменте $[a, b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, называется *интегрируемой* на этом сегменте.

Сделаем некоторые важные замечания.

Замечание 1. Для заданной функции $f(x)$ и заданного сегмента $[a, b]$ мы, очевидно, имеем бесконечное множество интегральных сумм. Значения этих интегральных сумм зависят как от выбора точек деления $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}$, так и от выбора промежуточных точек ξ_i .

Замечание 2. Если функция $y = f(x)$ не отрицательна на сегменте $[a, b]$, то как интегральная сумма, так и ее слагаемые, имеют простой геометрический смысл. В самом деле, произведение $f(\xi_i) \Delta x_i$ численно равно площади прямоугольника, имеющего основанием сегмент $[x_{i-1}, x_i]$, а высотой — ординату кривой в точке ξ_i (см. рис. 173). Построив над каждым малым сегментом прямоугольник с высотой $f(\xi_i)$, получим ступенчатую фигуру, площадь которой равна интегральной сумме σ_n , соответствующей данному разбиению сегмента $[a, b]$ на части и данному выбору точек ξ_i (см. рис. 172).

Возвращаясь теперь к задачам § 1, мы видим, что:

* Границы интегрирования называются также пределами интегрирования.

1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, где $f(x) \geq 0$ для всех x на сегменте $[a, b]$, численно равна определенному интегралу от функции $f(x)$, взятому по сегменту $[a, b]$:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Этот факт, выражающий геометрический смысл определенного интеграла, кратко формулируется так: определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

2. Работа E переменной силы, величина которой $F=f(x)$, равна определенному интегралу от силы, т. е.

$$E = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Рассмотрим пример на вычисление определенного интеграла.

Пример. Вычислить интеграл $\int_a^b 1 \cdot dx$.

Решение. Разобьем сегмент $[a, b]$ на n произвольных частей точками деления $x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}$ и построим соответствующую интегральную сумму. Так как подынтегральная функция постоянна и тождественно равна единице, то при любом выборе промежуточных точек ξ_i будем иметь:

$$\sigma_n = 1 \cdot \Delta x_1 + \dots + 1 \cdot \Delta x_i + \dots + 1 \cdot \Delta x_n = (x_1 - a) + \dots + (x_i - x_{i-1}) + \dots + (b - x_{n-1}) = b - a.$$

Таким образом, любая интегральная сумма для данной функции равна $b-a$, а следовательно, и ее предел (т. е. определенный интеграл) также равен $b-a$:

$$\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a. \quad (13)$$

Замечание 3. Интегральная сумма (11), очевидно, не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент данной функции. Следовательно, и ее предел, т. е. определенный интеграл, не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(t) dt$$

и т. д.

Замечание 4. При определении интеграла $\int_a^b f(x) dx$ мы исходили из предположения, что нижняя граница a меньше верхней границы b ($a < b$). Обобщим понятие определенного интеграла на

случай, когда $a > b$ и $a = b$. При $a > b$ по определению полагаем

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (14)$$

Это кратко выражают так: *при перестановке границ интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный.*

Определенный интеграл с равными нижней и верхней границами по определению принимается равным нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (15)$$

В связи с определением определенного интеграла возникает вопрос, при каких условиях существует предел интегральной суммы, т. е. существует определенный интеграл.

Имеет место теорема существования, которую мы приведем без доказательства.

Теорема существования определенного интеграла. *Всякая непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция интегрируема, т. е. для такой функции существует предел интегральных сумм при стремлении шага разбиения к нулю.*

Таким образом, для интегрируемости функции достаточно ее непрерывности на данном сегменте. Однако, определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций. Например, можно доказать, что для всякой ограниченной на сегменте функции, имеющей на нем конечное число точек разрыва, существует определенный интеграл.

2. Свойства определенного интеграла

Установим теперь, исходя из определения интеграла, его простейшие свойства. При этом подынтегральную функцию будем считать непрерывной.

I. *Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла, т. е. если k —некоторое число, то*

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx. \quad (16)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_a^b kf(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[k \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right] = \\ &= k \cdot \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = k \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались тем свойством, что постоянный множитель можно вынести за знак предела.

II. *Определенный интеграл от суммы нескольких функций равен сумме определенных интегралов от слагаемых.*

Например, для двух слагаемых $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеем:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (17)$$

Действительно, согласно определению интеграла имеем:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + \varphi(x)] dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) + \varphi(\xi_i)] \Delta x_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \Delta x_i \right] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \\ &+ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Совокупность свойств I и II называется свойством *линейности*.

III. *Если сегмент интегрирования $[a, b]$ разбит на две части $[a, c]$ и $[c, b]$, то*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (18)$$

Действительно, предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения сегмента $[a, b]$ на части и от выбора промежуточных точек ξ_i . Это позволяет при составлении каждой интегральной суммы включить точку c в число точек разбиения. Пусть $c = x_k$. Тогда интегральная сумма будет состоять из двух частей, одна из которых относится к сегменту $[a, c]$, а другая — к сегменту $[c, b]$:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

или

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Геометрически свойство III выражает тот факт, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a, c]$ и $[c, b]$ (рис. 176).

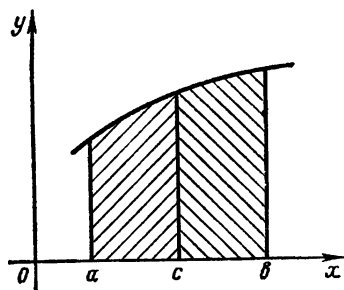


Рис. 176

З а м е ч а н и е. Свойство III было нами сформулировано в предположении, что $a < c < b$. Однако равенство (18) имеет место для любых чисел a , b и c . В самом деле, пусть для определенности $c < a < b$. Тогда, применяя свойство III к сегменту $[c, b]^*$, имеем

$$\int_c^b f(x) dx = \int_c^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx.$$

Но

$$\int_c^a f(x) dx = - \int_a^c f(x) dx,$$

(см. формулу (14)), поэтому

$$\int_c^b f(x) dx = - \int_a^c f(x) dx + \int_a^b f(x) dx,$$

или

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Свойство III часто называется свойством *аддитивности*.

IV. Если на сегменте $[a, b]$ $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

В самом деле, так как $f(\xi_i) \geq 0$ и $\Delta x_i > 0$ для любых i , то интегральная сумма $\sum_{i=0}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$. Поэтому и предел интегральной суммы при $\lambda \rightarrow 0$, т. е. $\int_a^b f(x) dx$, также неотрицателен.

Можно доказать, что если на сегменте $[a, b]$ непрерывная функция $f(x) \geq 0$ и хотя бы в одной точке этого сегмента $f(x) > 0$, то имеет место строгое неравенство

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

V. Если на сегменте $[a, b]$ две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \geq \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (19)$$

Иными словами, неравенство можно почленно интегрировать.

В самом деле, разность $f(x) - \varphi(x) \geq 0$, поэтому согласно свойству IV

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx \geq 0.$$

* При этом мы предполагаем, что функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[c, b]$.

Но, так как по свойствам I и II

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx,$$

то

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \geq 0,$$

откуда

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Это свойство имеет простой геометрический смысл. Пусть для определенности обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ неотрицательны на сегменте $[a, b]$. Тогда криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$, содержит криволинейную трапецию, ограниченную кривой $y=\varphi(x)$ (рис. 177). Поэтому площадь первой фигуры не меньше площади второй фигуры. Исходя из геометрического смысла определенного интеграла,

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

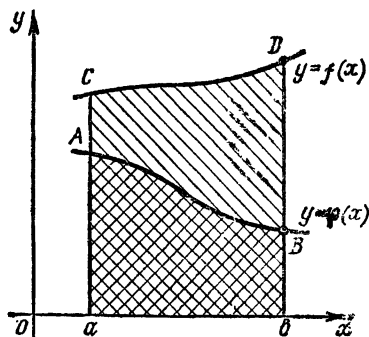


Рис. 177

В частности, так как всегда $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, то из свойства V следует, что

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Отсюда имеем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (20)$$

VI. Теорема о среднем значении. Если $f(x)$ — непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция, то существует такая точка ξ этого сегмента, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b-a). \quad (21)$$

Обозначим через m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Тогда для любого x $a \leq x \leq b$,

$$m \leq f(x) \leq M. \quad (22)$$

Применяя свойства V и I, из неравенства (22) получим

$$m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx.$$

Но $\int_a^b dx = b - a$ (см. п. 1, пример). Следовательно,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (23)$$

Разделив все члены двойного неравенства (23) на $b-a$, получим

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M.$$

Введя обозначение

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \mu, \quad (24)$$

получим

$$m \leq \mu \leq M.$$

Таким образом, число μ является промежуточным числом между наименьшим значением m функции $f(x)$ и ее наибольшим значением M . Так как непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между m и M (см. гл. V, § 2, п. 3), то найдется такое значение ξ на сегменте $[a, b]$, для которого $f(\xi) = \mu$.

Подставляя в формулу (24) вместо μ равное ему значение $f(\xi)$, получим

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(\xi),$$

или

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b-a).$$

Итак, *определенный интеграл от непрерывной функции равен значению подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке, умноженному на длину сегмента интегрирования.*

Теорема о среднем допускает наглядное геометрическое толкование. Пусть $f(x) \geq 0$ на сегменте $[a, b]$. Интеграл $\int_a^b f(x) dx$ числен-

но равен площади криволинейной трапеции (рис. 178). Рассмотрим прямоугольник $aABb$ с тем же основанием $[a, b]$, что и у криволинейной трапеции, и с высотой, равной $f(\xi)$. Произведение $f(\xi)(b-a)$ численно равно площади прямоугольника. Следовательно, криволинейная трапеция равновелика прямоугольнику с тем же основанием и с высотой, равной ординате кривой в некоторой промежуточной точке ξ основания.

Значение функции в точке ξ , определяемое из формулы (21), называется средним значением функции на сегменте.

3. Производная интеграла по переменной верхней границе

Пусть $y = f(x)$ — функция, непрерывная на сегменте $[a, b]$. Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x) dx$. При заданной подын-

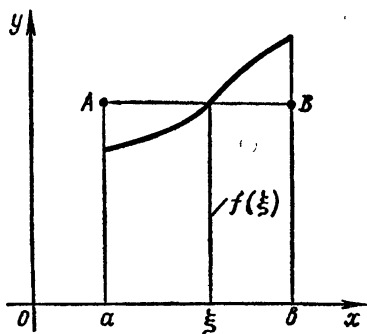


Рис. 178

тегральной функции значение интеграла зависит от обеих границ интегрирования a и b . Если мы закрепим нижнюю границу a и будем изменять верхнюю границу b , то интеграл будет функцией своей верхней границы. Чтобы подчеркнуть, что верхняя граница переменная, мы обозначим ее вместо b через x . Переменную интегрирования, чтобы не смешивать ее с верхней границей, обозначим через t ; ясно, что значение интеграла от этого не изменится (см. замечание 3 в п. 1). Таким образом, интеграл с переменной верхней границей является некоторой функцией x :

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Эта функция обладает замечательным свойством, выраженным в следующей теореме.

Теорема. Производная от интеграла по верхней границе равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена верхней границей:

$$\frac{d \int_a^x f(t) dt}{dx} = f(x). \quad (25)$$

Доказательство. Для нахождения производной функции $I(x) = \int_a^x f(t) dt$ дадим x приращение Δx . Тогда новое значение функции будет равно

$$I(x + \Delta x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt.$$

Следовательно, приращение функции $I(x)$ при переходе из точки x в точку $x + \Delta x$ окажется равным

$$\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt.$$

Но, так как по свойству аддитивности

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt,$$

то

$$\Delta I = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Применим к последнему интегралу теорему о среднем:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c) \Delta x,$$

где c заключено между x и $x + \Delta x$. Таким образом, приращение ΔI функции $I(x)$ равно $f(c) \Delta x$:

$$\Delta I = f(c) \Delta x.$$

Согласно определению производной, имеем

$$\frac{d \int_a^x f(t) dt}{dx} = \frac{dI(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c).$$

Так как $\Delta x \rightarrow 0$, то $x + \Delta x \rightarrow x$, а следовательно, и c стремится к x . Согласно условию, подынтегральная функция $f(t)$ непрерывна в точке x . Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x).$$

Следовательно,

$$\frac{d \int_a^x f(t) dt}{dx} = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема о производной интеграла по верхней границе является одной из основных теорем математического анализа. Эта теорема вскрывает глубокую связь между операциями определенного интегрирования и дифференцирования. Теорема о производной интеграла

по верхней границе показывает, что функция $\int_a^x f(t) dt$ является первообразной для $f(x)$. Но интеграл $\int_a^x f(t) dt$ существует для любого

значения x , в силу теоремы существования определенного интеграла от непрерывной функции.

Таким образом, имеет место следующая теорема существования первообразной для непрерывной функции: *всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет первообразные, одной из которых является интеграл*

$$\int_a^x f(t) dt.$$

Замечание 1. Исходя из геометрического смысла интеграла, как

площади, замечаем, что $I(x) = \int_a^x f(t) dt$

выражает переменную площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, x]$ (рис. 179). Следовательно, на

основании только что изложенного,

можно сказать, что эта переменная площадь является первообразной для ординаты $y = f(x)$ линии, ограничивающей эту криволинейную трапецию.

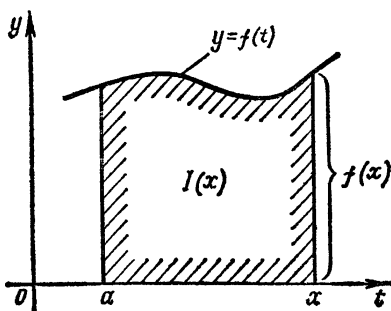


Рис. 179

Замечание 2. При $f(x) > 0$ функция $I(x) = \int_a^x f(t) dt$ — возрастающая, так как с возрастанием x площадь криволинейной трапеции возрастает.

4. Формула Ньютона — Лейбница

Вычисление определенного интеграла, как предела интегральных сумм, сложно даже для простейших функций. Теорема о производной интеграла по верхней границе позволяет установить простой метод вычисления определенных интегралов, минуя суммирование и переход к пределу. Этот новый метод вычисления определенного интеграла выражается формулой Ньютона — Лейбница, к выводу которой мы приступим*.

В предыдущем пункте мы установили, что функция

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt$$

является первообразной для непрерывной подынтегральной функции $f(x)$. Как известно, всякая другая первообразная для функции $f(x)$ отличается от $I(x)$ только постоянным слагаемым. Поэтому, если $F(x)$ — другая первообразная для $f(x)$, то $I(x) = F(x) + C$, или

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C. \quad (26)$$

* И. Ньютон (1642—1727) — великий английский математик, физик и астроном.
Г. Лейбниц (1646—1716) — великий немецкий математик.

Постоянную C легко найти, если заметить, что $I(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, как интеграл с равными границами интегрирования. Поэтому, подставляя в соотношение (26) $x=a$, получим

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C = 0.$$

Отсюда $C = -F(a)$ и, следовательно, $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$. В частности, при $x=b$ имеем $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

Это и есть формула Ньютона — Лейбница.

Она показывает, что, для того чтобы вычислить определенный интеграл, нужно найти какую-либо первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$ и взять разность значений этой первообразной, вычисленных для значений x , равных верхней и нижней границам интегрирования. Короче говоря, *определенный интеграл равен приращению первообразной от подынтегральной функции на сегменте интегрирования.*

Разность $F(b) - F(a)$ символически обозначают $F(x) \Big|_a^b$:

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Применяя этот символ, мы можем записать формулу Ньютона — Лейбница в таком виде:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (27)$$

Рассмотрим несколько простейших примеров.

Пример 1. Вычислить $\int_1^2 e^x dx$.

Решение. Одной из первообразных от подынтегральной функции является функция e^x . Поэтому, применяя формулу (27) Ньютона — Лейбница, получим

$$\int_1^2 e^x dx = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e^1 = e(e-1).$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. По формуле (27) Ньютона—Лейбница

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Замечание. Формула Ньютона—Лейбница была выведена в предположении, что подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна. Для разрывных функций формула Ньютона—Лейбница может не иметь места.

5. Замена переменной в определенном интеграле

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$.

Решение. Найдем вначале первообразную от подынтегральной функции, сделав замену переменной по формуле $\sqrt{x+1}=t$. Тогда $x=t^2-1$, $dx=2t dt$ и, следовательно,

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \int \frac{(t^2-1) \cdot 2t dt}{t} = 2 \int (t^2-1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) + C.$$

Возвращаясь к переменной x , получим

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = 2 \left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \sqrt{x+1} \right) + C.$$

Таким образом, одной из первообразных от функции $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ является функция

$$2 \left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \sqrt{x+1} \right).$$

Следовательно, применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} &= 2 \left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \sqrt{x+1} \right) \Big|_3^8 = 2 \left(\frac{\sqrt{(8+1)^3}}{3} - \sqrt{8+1} \right) - \\ &\quad - 2 \left(\frac{\sqrt{(3+1)^3}}{3} - \sqrt{3+1} \right) = 10 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Покажем, что можно упростить вычисление определенного интеграла, не возвращаясь от переменной t вновь к переменной x .

Предположим, что нужно вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, где $f(x)$ —непрерывная функция на сегменте $[a, b]$. Перейдем от переменной x к переменной t , положив

$$x = \varphi(t). \quad (28)$$

Пусть значению $t = \alpha$ по формуле (28) соответствует значение $x = a$, а значению $t = \beta$ по той же формуле — значение $x = b$:

$$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b. \quad (29)$$

Предположим, кроме того, что:

1) функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на сегменте $\alpha \leq t \leq \beta$;

2) при изменении t от α до β значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы сегмента $a \leq x \leq b$.

При этих условиях имеет место следующая формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

В самом деле, пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$. Тогда по формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (30)$$

Теперь покажем, что если в первообразной $F(x)$ положить $x = \varphi(t)$, то функция $F[\varphi(t)]$ будет первообразной для подынтегральной функции преобразованного интеграла, т.е. для функции $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$. Действительно, применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{dF[\varphi(t)]}{dt} = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x) \cdot \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t).$$

Поэтому по той же формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)].$$

Но так как по условию $\varphi(\beta) = b$, а $\varphi(\alpha) = a$, то $F[\varphi(\beta)] = F(b)$, а $F[\varphi(\alpha)] = F(a)$. Поэтому

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F(b) - F(a). \quad (30')$$

Сравнивая равенства (30) и (30'), приходим к формуле замены переменной:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (31)$$

Рассмотрим примеры.

Вернемся к примеру 1, приведенному в начале этого параграфа, и найдем вновь $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$.

Положим $\sqrt{x+1}=t$ или $x=t^2-1$. В данном случае $a=3$, $b=8$. При $x=a=3$ $t=\sqrt{3+1}=2$; при $x=b=8$ $t=\sqrt{8+1}=3$. Итак, $\alpha=2$, $\beta=3$. Следовательно, по формуле (31) замены переменной имеем

$$\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \int_2^3 2(t^2-1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 = 2 \left(\frac{3^3}{3} - 3 \right) - 2 \left(\frac{2^3}{3} - 2 \right) = 10 \frac{2}{3}.$$

Пример 2. Найти $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx$.

Решение. Полагая $x=a \sin t$, получим $dx=a \cos t dt$. При $x=0$ $0=\sin t$, $t=\arcsin 0=0$; при $x=a$ $1=\sin t$, $t=\frac{\pi}{2}$. Итак, $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, применяя формулу замены переменной, найдем

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

Заметим, что часто вместо замены переменной $x=\varphi(t)$ употребляют обратную замену $t=\psi(x)$; однако при этом необходимо, чтобы функция, обратная функции $t=\psi(x)$, существовала и чтобы для этой обратной функции выполнялись условия, при которых была выведена формула замены переменной.

Пример 3. Найти $\int_{\ln 2}^{2 \ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

Решение. Полагаем $\sqrt{e^x-1}=t$. При этом легко убеждаемся, что обратная функция $x=\ln(1+t^2)$ существует и удовлетворяет условиям, при которых была выведена формула замены переменной. Находим $dx=\frac{2t dt}{1+t^2}$. При $x=\ln 2$ $t=1$; при $x=2 \ln 2$ $t=\sqrt{3}$. Итак, $\alpha=1$, $\beta=\sqrt{3}$. Применяя формулу замены переменной, получим

$$\int_{\ln 2}^{2 \ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t dt}{t(1+t^2)} = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} t \Big|_1^{\sqrt{3}} = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

6. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — две функции, непрерывные со своими первыми производными на сегменте $[a, b]$

Возьмем дифференциал от их произведения:

$$d[u(x)v(x)] = u(x)dv(x) + v(x)du(x) = u(x)v'(x)dx + v(x)u'(x)dx.$$

Интегрируя это тождество в пределах от a до b , получим

$$\int_a^b d[u(x)v(x)] = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx. \quad (32)$$

Но по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b d[u(x)v(x)] = u(x)v(x) \Big|_a^b.$$

Таким образом, равенство (32) примет следующий вид:

$$u(x)v(x) \Big|_a^b = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

откуда

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \quad (33)$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле*.

Так как $du = u'(x)dx$ и $dv = v'(x)dx$, то формулу (33) можно записать в следующем более компактном виде:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (34)$$

При этом следует иметь в виду, что границы интегрирования относятся к независимой переменной x .

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить $\int_0^\pi x \cos x dx$.

Решение. Положим $x = u$, $\cos x dx = dv$. Тогда $du = dx$, $v = \sin x$. Применяя формулу интегрирования по частям, найдем

$$\int_0^\pi x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = \cos x \Big|_0^\pi = -2,$$

так как $x \cdot \sin x \Big|_0^\pi = \pi \cdot \sin \pi - 0 \cdot \sin 0 = 0$.

Пример 2. Найти $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. Положим $\ln x = u$, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = dv$, откуда $du = \frac{dx}{x}$, $v = 2\sqrt{x}$. Следовательно, по формуле интегрирования по частям.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e 2\sqrt{x} \frac{dx}{x} = 2\sqrt{e} \ln e - 2\sqrt{1} \ln 1 - 4\sqrt{x} \Big|_1^e =$$

$$= 2\sqrt{e} - (4\sqrt{e} - 4) = 2(2 - \sqrt{e}).$$

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Вычисление площади в декартовых координатах

Как мы видели (см. § 2, п. 1), если на сегменте $[a, b]$, функция $y = f(x)$ непрерывна и положительна, то криволинейная трапеция с основанием $[a, b]$, ограниченная сверху графиком этой функции, имеет площадь S , которую можно найти по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad (35)$$

или кратко

$$S = \int_a^b y dx. \quad (35')$$

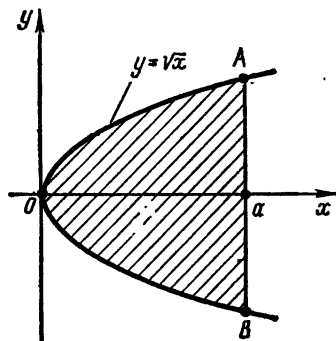


Рис. 180

Пример 1. Вычислить площадь сегмента параболы, т. е. фигуры, ограниченной дугой параболы $x = y^2$ и отрезком AB прямой $x = a$ (рис. 180).

Решение. Исходя из симметрии сегмента параболы относительно оси Ox , найдем его площадь S , как удвоенную площадь криволинейной трапеции OAA' :

$$S = 2 \int_0^a y dx = 2 \int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{4a^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{4}{3} a\sqrt{a}.$$

Пример 2. Определить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение. Из симметрии эллипса относительно осей вытекает, что искомая площадь S равна учетверенной площади криволинейной трапеции OAB (см. рис. 45):

$$S = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Но, согласно примеру 2 § 2, п. 5, $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{4}$. Следова-

тельно,

$$S = 4 \frac{b}{a} \frac{\pi a^2}{4} = \pi ab.$$

В частности, если $a = b = R$, то эллипс превращается в окружность радиуса R , и мы приходим к известной формуле для площади круга: $S = \pi R^2$.

Пусть теперь на сегменте $[a, b]$ $f(x) < 0$ (рис. 181). Криволинейная трапеция с основанием $[a, b]$, ограниченная снизу кривой $y = f(x)$, лежит ниже оси Ox . Из соображений симметрии заключаем, что ее

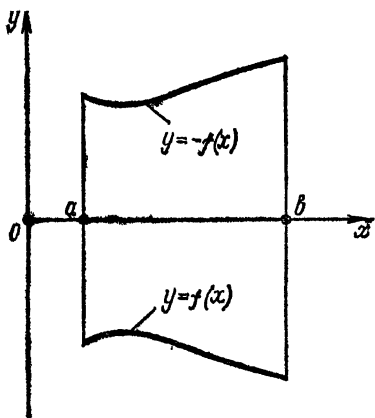


Рис. 181

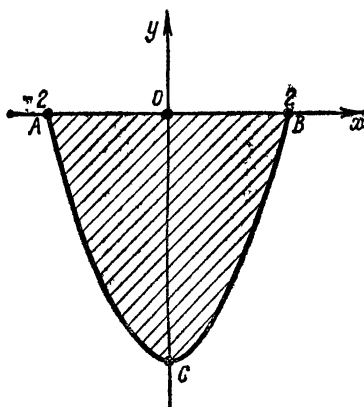


Рис. 182

площадь S равна площади другой криволинейной трапеции, имеющей то же основание, но ограниченной сверху кривой $y = -f(x)$ (см. рис. 181). Так как по условию $f(x) < 0$, то $-f(x) > 0$ и, применяя формулу (35), найдем

$$S = \int_a^b [-f(x)] dx = - \int_a^b f(x) dx. \quad (36)$$

Так выражается площадь криволинейной трапеции в случае отрицательной подынтегральной функции.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4$ и осью абсцисс (рис. 182).

Решение. Парабола $y = x^2 - 4$ пересекается с осью абсцисс в точках $A(-2; 0)$ и $B(2; 0)$. Следовательно, надо найти площадь S криволинейной трапеции ACB , основанием которой служит сегмент $[-2, 2]$. Так как на этом сегменте $y \leq 0$, то для нахождения площади S пользуемся формулой (36):

$$S = - \int_a^b f(x) dx = - \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}.$$

Формулы (35) и (36) можно объединить в одну:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (37)$$

Эта формула остается справедливой также и в том случае, когда функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ меняет знак, т. е. имеет на этом сегменте как положительные, так и отрицательные значения.

Пример 4. Вычислить площадь S фигуры $OABCD$, ограниченной косинусоидой $y = \cos x$, осями координат и прямой $x = \pi$ (рис. 183).

Решение. По формуле (37) имеем

$$S = \int_0^{\pi} |\cos x| dx.$$

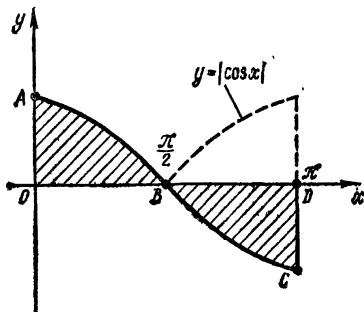


Рис. 183

Так как функция $\cos x$ в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ положительна, а в интервале $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ отрицательна, то

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\cos x, & \text{если } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2. \end{aligned}$$

Вычислим теперь площадь фигуры, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, снизу кривой $y = \varphi(x)$ ($f(x) \geq \varphi(x)$) и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 177). Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций $aCDB$ и $aABb$:

$$\begin{aligned} \text{пл. } ACDB &= \text{пл. } aCDB - \text{пл. } aABb = \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx. \end{aligned} \quad (38)$$

Формула (38) справедлива при любом расположении графиков функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ при условии $f(x) \geq \varphi(x)$.

Пример 5. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной кривыми $y = -x^2$ и $y = e^x$, осью ординат и прямой $x = 1$ (рис. 184).

Решение. В данном примере $f(x) = e^x$, $\varphi(x) = -x^2$, $f(x) > \varphi(x)$, $a=0$, $b=1$. Следовательно, по формуле (38) получим

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx = \int_0^1 [e^x - (-x^2)] dx = \int_0^1 (e^x + x^2) dx = \\ = \left(e^x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = e + \frac{1}{3} - 1 = e - \frac{2}{3}.$$

В заключение рассмотрим пример на вычисление площади фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически.

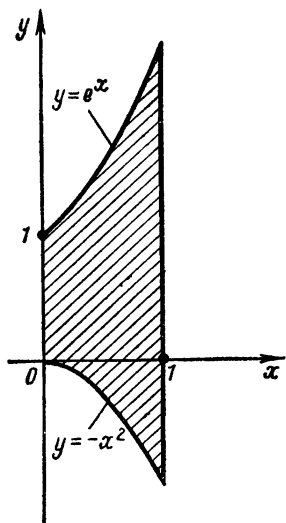


Рис. 184

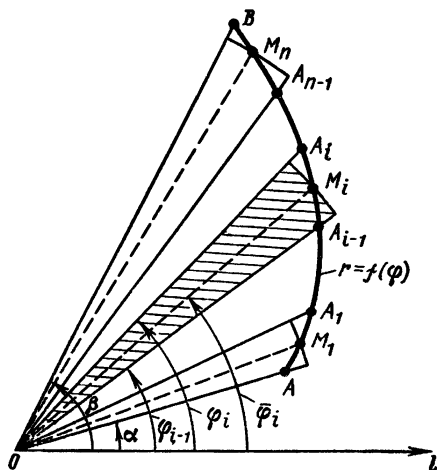


Рис. 185

Пример 6. Определить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной аркой циклоиды: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (см. рис. 139).

Решение. Искомая площадь S равна $\int_0^{2\pi} y dx$. Сделаем в этом интеграле замену переменной, положив $x = a(t - \sin t)$. Тогда $dx = a(1 - \cos t) dt$. На основании уравнений циклоиды $y = a(1 - \cos t)$. Заметив, кроме того, что при $x=0$ $t=0$ и при $x=2\pi a$ $t=2\pi$, найдем:

$$S = \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = \\ = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \left(t - 2 \sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

2. Вычисление площади в полярных координатах

Пусть дан криволинейный сектор OAB (рис. 185), ограниченный радиусами-векторами OA и OB и кривой, уравнение которой задано в полярных координатах: $r = f(\varphi)$. При этом предположим, что

$r = f(\varphi)$ — непрерывная функция для всех φ , удовлетворяющих условию: $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

Пусть радиус-вектор OA образует с полярной осью угол α , а радиус-вектор OB — угол β . Разобьем угол AOB на части с помощью лучей, выходящих из полюса O и составляющих с полярной осью последовательно углы

$$\alpha < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{i-1} < \varphi_i < \dots < \varphi_{n-1} < \beta.$$

Кроме того, обозначим $\alpha = \varphi_0$ и $\beta = \varphi_n$. Через $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_{n-1}$ обозначим точки пересечения лучей с кривой.

Криволинейный сектор AOB разобьется на n малых криволинейных секторов (см. рис. 185) $AOA_1, A_1OA_2, \dots, A_{i-1}OA_i, \dots, A_{n-1}OB$. Углы $AOA_1, A_1OA_2, \dots, A_{i-1}OA_i, \dots, A_{n-1}OB$ соответственно равны $\Delta\varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_0, \Delta\varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1, \dots, \Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, \dots, \Delta\varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$. Если обозначить через S площадь всего криволинейного сектора, а через Δs_i — площадь малого криволинейного сектора, ограниченного лучами OA_{i-1} и OA_i , то $S = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \dots$

$\dots + \Delta s_i + \dots + \Delta s_n$ или $S = \sum_{i=1}^n \Delta s_i$. Вычислить площадь малого криволинейного сектора так же трудно, как и площадь большого. Поэтому мы поступим следующим образом: внутри каждого малого сектора $A_{i-1}OA_i$ проведем луч под углом $\bar{\varphi}_i$ ($\varphi_{i-1} \leq \bar{\varphi}_i \leq \varphi_i$). Точку пересечения этого луча с кривой обозначим через M_i . Тогда $OM_i = r_i = f(\bar{\varphi}_i)$. Заменим теперь каждый малый криволинейный сектор $A_{i-1}OA_i$ круговым сектором, описанным из вершины O радиусом $r_i = f(\bar{\varphi}_i)$ (см. рис. 185). Площадь каждого такого кругового сектора равна $\frac{OM_i^2}{2} \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} f^2(\bar{\varphi}_i) \Delta\varphi_i$ и дает приближенное значение площади малого криволинейного сектора.

Таким образом, имеем следующее приближенное равенство:

$$\Delta s_i \approx \frac{1}{2} f^2(\bar{\varphi}_i) \Delta\varphi_i.$$

Заменив площадь каждого криволинейного сектора площадью соответствующего кругового сектора, получим фигуру, состоящую из ряда круговых секторов.

Площадь этой фигуры дает нам приближенное значение площади S криволинейного сектора. Поэтому для его площади получим приближенное равенство

$$S \approx \frac{1}{2} f^2(\bar{\varphi}_1) \Delta\varphi_1 + \frac{1}{2} f^2(\bar{\varphi}_2) \Delta\varphi_2 + \dots + \frac{1}{2} f^2(\bar{\varphi}_i) \Delta\varphi_i + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} f^2(\bar{\varphi}_n) \Delta\varphi_n,$$

или в сокращенной записи

$$S \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\bar{\varphi}_i) \Delta\varphi_i.$$

Точность этого приближенного равенства повышается с уменьшением $\Delta\varphi_i$. Поэтому точное значение площади S криволинейного сектора получится как предел площади фигуры, составленной из круговых секторов, при условии, что все $\Delta\varphi_i$ стремятся к нулю. Таким образом,

$$S = \lim_{\Delta\varphi_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\bar{\varphi}_i) \Delta\varphi_i.$$

Так как $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f^2(\bar{\varphi}_i) \Delta\varphi_i$ есть интегральная сумма для непрерывной функции $\frac{1}{2} f^2(\varphi)$, заданной для значений φ , заключенных между α и β , то ее предел есть определенный интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f^2(\varphi) d\varphi.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi, \quad (39)$$

или в сокращенной записи

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi. \quad (40)$$

Пример. Определить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos \varphi)$ (см. рис. 31).

Решение. Применяя формулу (40) при $\alpha = 0$ и $\beta = 2\pi$, найдем:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} a^2 \left(\varphi + 2 \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2} \pi a^2. \end{aligned}$$

3. Вычисление объема тела по известным поперечным сечениям

Рассмотрим некоторое тело, объем V которого мы хотим определить (рис. 186). Предположим, что нам известны площади сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными оси Ox . Эти сечения будем называть *поперечными*. Положение поперечного сечения определяется абсциссой x точки его пересечения с осью Ox .

С изменением x будет, вообще говоря, изменяться площадь сечения. Следовательно, площадь сечения будет некоторой функцией x , которую мы обозначим через $s(x)$ и будем считать известной. Обо-

значим далее через a и b абсциссы крайних сечений тела*. Для вычисления объема V тела поступим следующим образом: разобьем сегмент $[a, b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

и через точки деления проведем плоскости, перпендикулярные

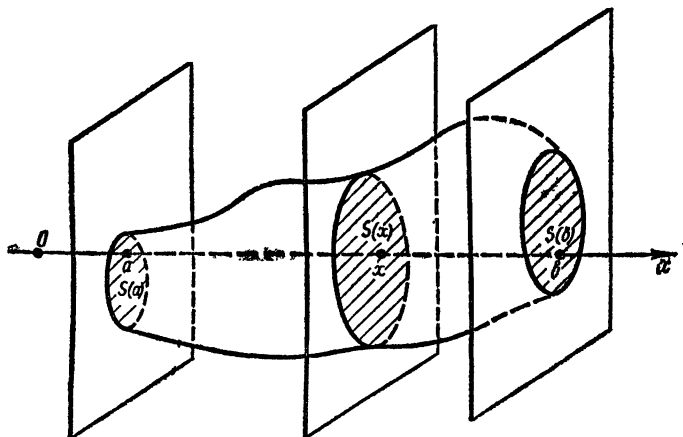


Рис. 186

оси Ox . Эти плоскости раскроют тело на n слоев (рис. 187). Обозначим объем слоя, заключенного между плоскостями, проведенными через точки x_{i-1} и x_i через Δv_i . Тогда $V = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \dots + \Delta v_n$ или

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta v_i. \quad (41)$$

Рассмотрим один из слоев, образованный сечениями с абсциссами x_{i-1} и x_i . Его объем Δv_i приблизительно равен объему прямого цилиндра, высота которого равна длине отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, т. е.

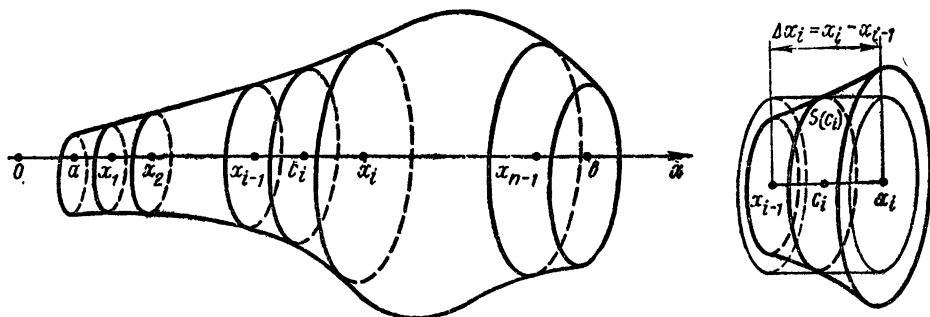


Рис. 187

* Оба эти сечения, или одно из них, в частных случаях могут сводиться к точкам.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а основание совпадает с поперечным сечением тела, соответствующим какой-либо абсциссе c_i , где $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$ (см. рис. 187) и, следовательно, имеет площадь $s(c_i)$.

Объем такого цилиндра равен, как и объем кругового цилиндра, произведению площади основания на высоту: $s(c_i) \Delta x_i$. Таким образом, $\Delta v_i \approx s(c_i) \Delta x_i$. Поэтому для объема нашего тела получим следующее приближенное равенство:

$$V \approx \sum_{i=1}^n s(c_i) \Delta x_i.$$

Точность этого приближенного равенства увеличивается с уменьшением шага разбиения λ отрезка $[a, b]$. Поэтому точное значение объема получим, устремляя шаг разбиения к нулю. Итак,

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n s(c_i) \Delta x_i.$$

Сумма $\sum_{i=1}^n s(c_i) \Delta x_i$ есть интегральная сумма для функции $s(x)$. Поэтому

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n s(c_i) \Delta x_i = \int_a^b s(x) dx.$$

Следовательно,

$$V = \int_a^b s(x) dx. \quad (42)$$

В этой формуле $s(x)$ означает площадь поперечного сечения, а a и b — абсциссы крайних точек сечения тела.

Пример. Определить объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Пересекая эллипсоид плоскостью $x=h$, получим эллипс

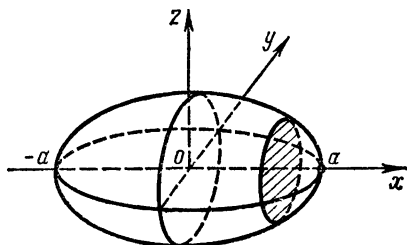


Рис. 188

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} &= 1, \\ x &= h \end{aligned} \right\}$$

с полуосями $b \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}$ и $c \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}$ (рис. 188). Следова-

тельно (см. п. 1, пример 2), площадь сечения $s(h) = \pi b c \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)$. Поэтому по формуле (42), в которой x заменяем на h , по-

лучим

$$V = \int_{-a}^a s(h) dh = \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right) dh = \pi bc \left(h - \frac{h^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi abc. \quad (43)$$

В частности, при $a=b=c=R$ получаем шар радиуса R , объем которого равен $\frac{4}{3} \pi R^3$.

4. Объем тела вращения

Рассмотрим криволинейную трапецию с основанием $[a, b]$, ограниченную непрерывной кривой $y=f(x)$. Определим объем тела, образованного вращением трапеции вокруг оси Ox (рис. 189). Поперечными сечениями будут круги с радиусами, равными модулю

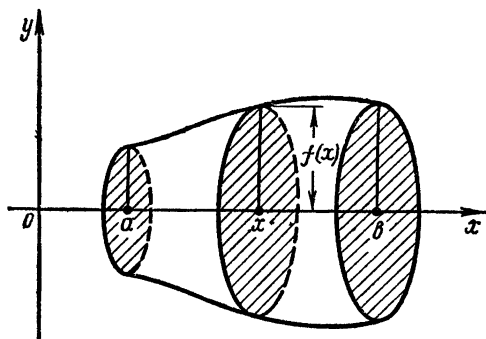


Рис. 189

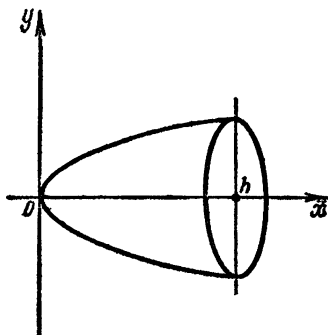


Рис. 190

ординаты y вращающейся кривой. Следовательно, площадь сечения

$$s(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2.$$

Применяя формулу (42), найдем объем тела вращения

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx, \quad (44)$$

или сокращенно

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (45)$$

Пример. Определить объем тела, ограниченного поверхностью вращения параболы $y^2=x$ вокруг оси Ox и плоскостью $x=h$ (рис. 190).

Решение. Применяя формулу (45), найдем:

$$V = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \frac{\pi h^2}{2}.$$

5. Длина дуги кривой

В элементарной геометрии измерялись длины прямолинейных отрезков, а также длина окружности и ее частей. За длину окружности принимался предел периметров правильных вписанных в окружность многоугольников при неограниченном увеличении числа их сторон. Обобщим это определение на случай любой кривой.

Пусть в пространстве задана дуга $\widehat{AB}$ (рис. 191). Разобьем ее точками $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ на n частей. Соединив соседние точки

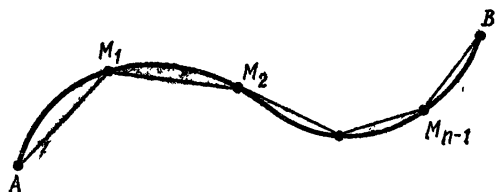


Рис. 191

деления отрезками, получим ломаную, вписанную в дугу $\widehat{AB}$. Эта ломаная состоит из звеньев $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{i-1}M_i, \dots, M_{n-1}M_n$, где M_0 совпадает с точкой A , а M_n — с точкой B .

Примем для длин этих звеньев следующие обозначения: дл. $M_0M_1 = \Delta L_1$, дл. $M_1M_2 = \Delta L_2, \dots$, дл. $M_{i-1}M_i = \Delta L_i, \dots$, дл. $M_{n-1}M_n = \Delta L_n$. Тогда периметр L_n этой ломаной

$$L_n = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \dots + \Delta L_i + \dots + \Delta L_n,$$

или, в сокращенной записи,

$$L_n = \sum_{i=1}^n \Delta L_i. \quad (46)$$

Очевидно, с уменьшением длин звеньев ΔL_i ломаной она по своей форме приближается к дуге $\widehat{AB}$. Поэтому естественно ввести следующее определение.

Длиной l дуги $\widehat{AB}$ называется предел, к которому стремится периметр вписанной в эту дугу ломаной, когда число ее звеньев неограниченно растет, а наибольшая из длин звеньев стремится к нулю:

$$l = \lim_{\max \Delta L_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta L_i. \quad (47)$$

При этом предполагается, что предел (47) существует и не зависит от выбора вписанных ломаных.

Кривые, для которых предел (47) существует, называются *прямыми*. Мы сейчас покажем, что при выполнении некоторых ограничений, наложенных на кривые, этот предел всегда существует.

Рассмотрим сначала вопрос о длине дуги плоской кривой, заданной уравнением в явном виде.

Теорема. Пусть кривая $\widehat{AB}$ задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция, имеющая непрерывную первую производную во

всех точках сегмента $[a, b]$. Тогда дуга $\overline{AB}$ имеет длину, равную

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Доказательство. Разобьем дугу $\overline{AB}$ точками $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ на n частей (рис. 192). Пусть эти точки имеют соответственно абсциссы $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, причем

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Впишем в дугу $\overline{AB}$ ломаную $M_0 M_1 M_2 \dots M_{i-1} M_i \dots M_{n-1} M_n$. Тогда периметр этой ломаной будет равен

$$\sum_{i=1}^n \Delta L_i,$$

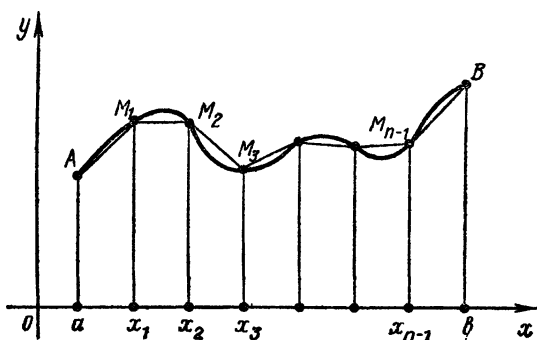


Рис. 192

где ΔL_i — длина звена $M_{i-1} M_i$. Согласно формуле расстояния между двумя точками $M_{i-1}(x_{i-1}; y_{i-1})$ и $M_i(x_i; y_i)$ на плоскости

$$\Delta L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2},$$

где $y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Но по формуле о конечном приращении (гл. VI, § 6, п. 3), примененной к сегменту $[x_{i-1}, x_i]$,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}), \text{ причем } x_{i-1} < c_i < x_i.$$

Следовательно,

$$\Delta L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)(x_i - x_{i-1})]^2} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} (x_i - x_{i-1}),$$

или

$$\Delta L_i = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i, \quad (48)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Поэтому периметр ломаной

$$\sum_{i=1}^n \Delta L_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} \Delta x_i. \quad (48')$$

Итак, периметр ломанной оказался равным интегральной сумме, составленной для функции $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$. Эта функция непрерывна на сегменте $[a, b]$ вследствие предположения о непрерывности $f'(x)$. Следовательно, по теореме существования определенного интеграла интегральная сумма (48) имеет предел, равный $\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$ при условии, что шаг разбиения λ стремится к нулю.

Длина кривой l равна пределу периметра $\sum_{i=1}^n \Delta L_i$ вписанной в нее ломаной при условии, что наибольшая из длин звеньев ΔL_i стремится к нулю. Заметив, что при $\Delta L_i \rightarrow 0$ также и $\Delta x_i \rightarrow 0^*$, получим

$$l = \lim_{\max \Delta L_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta L_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1+[f'(c_i)]^2} = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$$

Таким образом,

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx, \quad (49)$$

или, в сокращенной записи,

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx. \quad (50)$$

Пример 1. Вычислить длину дуги цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ для $0 \leq x \leq 1$ (см. гл. V, § 2, п. 6, рис. 128).

Решение. Находим $y' = (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$. Следовательно, $1+y'^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$. Применяя формулу (50), получим

$$l = \int_0^1 \sqrt{\operatorname{ch}^2 x} dx = \int_0^1 \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x \Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{sh} 0 = \operatorname{sh} 1.$$

Пусть теперь кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. При этом предположим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ и их производные непрерывны и $x'(t) > 0$. Сделаем в интеграле формулы (49) замену переменной, положив $x = x(t)$. Так как при этом $y = y(t)$, то по правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, найдем $y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ и, замечая, что $dx = x'(t) dt$, получим

$$\sqrt{1+y'_x{}^2} dx = \sqrt{1 + \left[\frac{y'(t)}{x'(t)} \right]^2} x'(t) dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

* $\Delta L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$ и, следовательно, $|\Delta x_i| < \Delta L_i$.

Следовательно,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y_x'^2} dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \quad (51)$$

где $a = x(\alpha)$ и $b = x(\beta)$.

Замечание. Формула (51) справедлива и в том случае, когда производная $x'(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$ либо отрицательна, либо не сохраняет знак.

Пример 2. Определить длину одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\text{см. рис. 139})$$

Решение. Так как $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = a \sqrt{2(1 - \cos t)} = \\ &= 2a \sin \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Применяя формулу (51), получим

$$l = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a \cos \pi + 4a \cos 0 = 4a + 4a = 8a.$$

Рассмотрим, как выражается длина дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, предполагая, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на сегменте $[\alpha, \beta]$. Эту кривую можно задать параметрически, принимая за параметр полярный угол φ . Действительно, так как между декартовыми и полярными координатами существует зависимость $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то, принимая во внимание, что $r = r(\varphi)$, получим

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\varphi) \cdot \cos \varphi, \\ y &= r(\varphi) \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \right\}$$

Так как $x' = r' \cos \varphi - r \sin \varphi$, $y' = r' \sin \varphi + r \cos \varphi$, то, применяя формулу (51), получим

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2 + (y')^2} d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2} d\varphi.$$

После очевидных упрощений получим

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi. \quad (52)$$

Пример 3. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$ (см. рис. 31).

Решение. Кардиоида симметрична относительно полярной оси. Изменяя полярный угол φ от 0 до π , мы получим по формуле (52)

половину длины кардиоиды:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= \int_0^{\pi} \sqrt{[a(1 + \cos \varphi)]^2 + \{[a(1 + \cos \varphi)]'\}^2} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = \\ &= 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 4a \sin \frac{\pi}{2} = 4a. \end{aligned}$$

Вся длина кардиоиды $l = 2 \cdot 4a = 8a$.

Можно показать, что для длины дуги пространственной кривой, заданной уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, имеет место формула, аналогичная формуле (51):

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt. \quad (53)$$

Пример 4. Определить длину одного витка винтовой линии: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (см. рис. 140).

Решение. Применяя формулу (53) для длины пространственной кривой, имеем

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

6. Дифференциал дуги

Пусть в формуле (49) для длины дуги нижняя граница a остается постоянной, а верхняя граница изменяется. Чтобы подчеркнуть это, обозначим верхнюю границу буквой x , а переменную интегрирования, чтобы не смешивать ее с верхней границей, — буквой t . Если при этом учесть, что длина дуги l будет функцией верхней границы, то формулу (49) можно записать в следующем виде:

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

Согласно теореме о производной интеграла по верхней границе эта функция дифференцируема, и ее производная

$$l'(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}. \quad (54)$$

Отсюда дифференциал дуги

$$dl(x) = l'(x) dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

или, в сокращенной записи,

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (55)$$

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то $dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$, или

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (56)$$

Пользуясь формулой (56) и учитывая, что дифференциал функции равен приращению ординаты касательной (см. гл. VI, § 3, п. 1), приходим к следующему геометрическому смыслу дифференциала дуги (рис. 193): *дифференциал дуги dl равен длине отрезка касательной от точки касания M с абсциссой x до точки M_1 с абсциссой $x + dx$.*

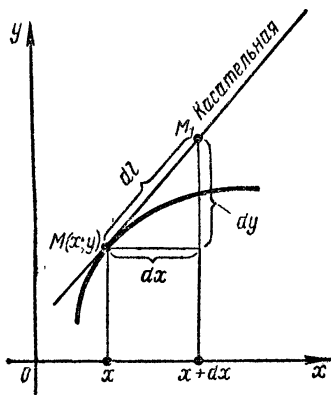


Рис. 193

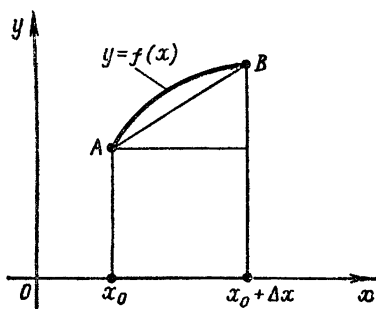


Рис. 194

В гл. VI (§ 5, п. 4) была использована теорема, принятая без доказательства, о пределе отношения длины дуги к длине стягивающей ее хорды. Докажем теперь эту теорему. Для простоты доказательства ограничимся случаем плоской кривой, заданной уравнением $y = f(x)$.

Теорема. Пусть дуга задана уравнением $y = f(x)$, причем $f(x)$ и $f'(x)$ — непрерывные функции. Тогда предел отношения длины этой дуги к длине стягивающей ее хорды равен единице при стремлении длины хорды к нулю.

Доказательство. Рассмотрим участок дуги кривой между точками A и B с абсциссами x_0 и $x_0 + \Delta x$ (рис. 194). Длина дуги

$$l = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Применяя теорему о среднем (см. формулу (21)), получим

$$l = \sqrt{1 + [f'(c_1)]^2} \Delta x, \text{ где } x_0 < c_1 < x_0 + \Delta x.$$

С другой стороны, длина стягивающей хорды $AB = \sqrt{1 + [f'(c_2)]^2} \Delta x$, где $x_0 < c_2 < x_0 + \Delta x$ (см. формулу (48)). Замечая, что при $\Delta x \rightarrow 0$ c_1 и c_2 стремятся к x_0 , получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{l}{AB} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + [f'(c_1)]^2} \Delta x}{\sqrt{1 + [f'(c_2)]^2} \Delta x} = \frac{\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}}{\sqrt{1 + [f'(x_0)]^2}} = 1.$$

7. Площадь поверхности вращения

Определим площадь поверхности, образованной вращением дуги $\overline{AB}$ кривой $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$, относительно оси Ox . Будем предполагать, что на сегменте $[a, b]$ функция $y=f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны и, кроме того, $f(x) \geq 0$. Рассмотрим на дуге $\overline{AB}$ точку M с абсциссой x . Длина дуги $\overline{AM}$ определится по формуле

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt. \quad (57)$$

Подынтегральная функция здесь положительна, и поэтому функция $l(x)$ возрастающая (см. § 2, п. 3, замечание 2). Кроме того, в п. 6 уже упоминалось, что функция $l(x)$ дифференцируема (а значит, и непрерывна) на сегменте $[a, b]$. Следовательно, существует обратная непрерывная функция $x=x(l)$ (см. гл. V, § 2, п. 4). Но тогда $y=f(x)=f[x(l)]=y(l)$ также будет непрерывной функцией l . Таким образом, кривая $y=f(x)$ на сегменте $[a, b]$ может быть задана параметрически

$$\left. \begin{aligned} x &= x(l), \\ y &= y(l), \end{aligned} \right\}$$

причем параметром является длина дуги l , $0 \leq l \leq L$, где L — длина всей дуги $\overline{AB}$.

Разобьем дугу $\overline{AB}$ точками $M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}$ на n дуг: $\overline{AM_1}, \overline{M_1M_2}, \dots, \overline{M_{i-1}M_i}, \dots, \overline{M_{n-1}B}$ и обозначим длины этих дуг соответственно через $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_i, \dots, \Delta l_n$. Поверхность вращения при этом также разобьется на части, имеющие соответственно площади $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_i, \dots, \Delta s_n$. При малом шаге разбиения каждая из этих частичных поверхностей по форме мало отличается от боковой поверхности усеченного конуса (рис. 195).

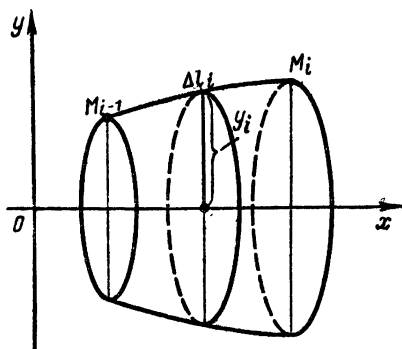


Рис. 195

Площадь боковой поверхности усеченного конуса, равная произведению длины окружности среднего сечения $2\pi R$ на образующую m , дает приближенное значение Δs_i , если

принять $m = \Delta l_i$, $R = y_i = y(c_i)$, где c_i — значение параметра l , соответствующее среднему сечению.

Таким образом,

$$\Delta s_i \approx 2\pi y(c_i) \Delta l_i. \quad (58)$$

Площадь S всей поверхности вращения равна сумме площадей

частичных поверхностей $\sum_{i=1}^n \Delta s_i$. Следовательно,

$$S \approx \sum_{i=1}^n 2\pi y(c_i) \Delta l_i. \quad (59)$$

За точное значение S принимаем по определению предел интегральной суммы (59):

$$S = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi y(c_i) \Delta l_i,$$

или

$$S = 2\pi \int_0^L y(l) dl. \quad (60)$$

Сделаем в интеграле (60) замену переменной, перейдя от переменной интегрирования l к переменной x . Эти переменные связаны формулой (57). Найдем новые границы интегрирования: при $l=0$ имеем $x=a$, при $l=L$ имеем $x=b$. Далее, так как $dl = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ и $y = y(l) = f(x)$, то из формулы (60) получим

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad (61)$$

или, в сокращенной записи,

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (62)$$

Пример. Найти площадь поверхности вращения дуги синусоиды

$$y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Решение. По формуле (62) получим

$$S = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + [(\sin x)']^2} dx = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx.$$

Сделаем замену переменных, положив $\cos x = t$. Тогда $dt = -\sin x dx$, $t|_{x=0} = \cos 0 = 1$, $t|_{x=\pi} = \cos \pi = -1$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} S &= -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1+t^2} dt = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2} dt = \\ &= \frac{2\pi}{2} \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right] \Big|_{-1}^1 = \pi [2\sqrt{2} + \ln(3 + \sqrt{2})] \end{aligned}$$

(см. гл. VII, § 5, п. 3).

8. Общие замечания о решении задач методом интегральных сумм

При решении вопросов, связанных с нахождением площади криволинейной трапеции, объема тела по поперечным сечениям, работы переменной силы, применялся один и тот же прием. Нахождение интересующей нас величины приводило к рассмотрению предела интегральной суммы. При этом во всех задачах искомая величина была связана с некоторым вполне определенным сегментом $[a, b]$ и некоторой функцией, заданной на этом сегменте. Так, например, в задаче о площади это было основание $[a, b]$ криволинейной трапеции и ордината кривой $y = f(x)$.

Кроме того, искомая величина, которую мы обозначим через Q , обладала следующими двумя свойствами:

1. Свойство аддитивности. Разобьем сегмент $[a, b]$ на части $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$. Каждой из этих частей соответствует свое значение величины Q : $\Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots, \Delta Q_n$.

Величину Q мы назовем аддитивной, если при любом разбиении сегмента $[a, b]$ на части имеет место равенство

$$Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \dots + \Delta Q_n. \quad (63)$$

Так, например, работа силы на всем пути $[a, b]$ равнялась сумме работ на отдельных участках $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$ (см. § 1, п. 2).

2. Свойство линейности в малом. Пусть $[x, x + \Delta x]$ — произвольный малый сегмент, принадлежащий сегменту $[a, b]$. Мы предполагаем, что величина ΔQ , соответствующая сегменту $[x, x + \Delta x]$, приблизительно пропорциональна его длине Δx :

$$\Delta Q \approx k \Delta x. \quad (64)$$

Отношение $\frac{\Delta Q}{\Delta x}$ мало отличается от числа k , в том смысле, что существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} = k.$$

Каждой точке x соответствует свое значение k , т. е. k является функцией x : $k = f(x)$. Поэтому формулу (64) можно записать в следующем виде:

$$\Delta Q \approx f(x) \Delta x. \quad (65)$$

Покажем, что если искомая величина Q обладает свойствами 1 и 2, то ее нахождение сводится к вычислению определенного интеграла.

В самом деле, разбивая сегмент $[a, b]$ на малые части с длинами $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, мы в силу аддитивности величины Q имеем:

$$Q = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i.$$

На каждом малом сегменте длины Δx_i величина Q в силу свойства линейности в малом приблизительно пропорциональна Δx_i , т. е. согласно формуле (65)

$$\Delta Q_i \approx f(x_i) \Delta x_i.$$

Таким образом, для Q получаем следующее приближенное равенство:

$$Q = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i. \quad (66)$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (66), является интегральной суммой для функции $f(x)$. В пределе при шаге разбиения λ , стремящемся к нулю, получим точное значение Q :

$$Q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Подынтегральное выражение $f(x) dx$, дающее приближенное значение величины Q на сегменте от x до $x + dx$, называется *элементом величины Q* и обозначается через dQ .

Если выражение для элемента найдено, то нет необходимости составлять интегральную сумму и переходить к пределу. Достаточно взять определенный интеграл от элемента dQ :

$$Q = \int_a^b dQ = \int_a^b f(x) dx. \quad (67)$$

Пример 1. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из конического сосуда, обращенного вершиной вниз и имеющего радиус основания R м и высоту H м.

Решение. Работа, необходимая для поднятия тела веса p на высоту h , равна ph . В нашей задаче дело осложняется тем, что отдельные слои воды находятся на различных глубинах и высота поднятия для различных слоев не одинакова. Поэтому с помощью плоскостей, параллельных основанию конуса, разобьем конический сосуд на n тонких горизонтальных слоев толщины Δh_i (рис. 196)*. Обозначим через ΔE_i работу, необходимую для поднятия i -го слоя воды на поверхность. Тогда вся работа E , которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из сосуда, равна сумме элементарных работ

$$E = \sum_{i=1}^n \Delta E_i,$$

т. е. работа обладает свойством аддитивности. Взяв Δh_i достаточно

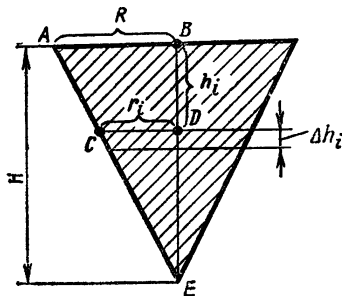


Рис. 196

* На рис. 196 дано сечение конического сосуда плоскостью, проходящей через ось конуса.

малым, можно приближенно считать, что вся вода i -го слоя находится на одной и той же глубине h_i . Работа ΔE_i приближенно равна произведению веса Δp_i i -го слоя воды на высоту поднятия h_i :

$$\Delta E_i \approx \Delta p_i h_i. \quad (68)$$

Для того чтобы найти вес Δp_i , вычисляем объем Δv_i i -го слоя. Учитывая, что Δh_i мало, примем этот слой за цилиндр с высотой Δh_i и радиусом основания r_i . Из подобия треугольников AEB и CED (см. рис. 196) находим $r_i = \frac{R}{H} (H - h_i)$. Поэтому $\Delta v_i \approx \pi r_i^2 \Delta h_i = \pi \frac{R^2}{H^2} (H - h_i)^2 \Delta h_i$. Так как удельный вес воды равен единице, то $\Delta p_i = \Delta v_i \approx \pi \frac{R^2}{H^2} (H - h_i)^2 \Delta h_i$ (при этом если длина измеряется в m , то вес выразится в m). Подставляя найденное значение Δp_i в формулу (68), получим

$$\Delta E_i \approx \pi \frac{R^2}{H^2} (H - h_i)^2 h_i \Delta h_i,$$

т. е. работа обладает свойством линейности в малом.

Вся работа

$$E = \sum_{i=1}^n \Delta E_i \approx \sum_{i=1}^n \pi \frac{R^2}{H^2} (H - h_i)^2 h_i \Delta h_i. \quad (69)$$

Это равенство будет тем точнее, чем меньше Δh_i . В пределе при шаге разбиения $\lambda = \text{наиб. } \{\Delta h_1, \Delta h_2, \dots, \Delta h_n\} \rightarrow 0$ получим точное равенство

$$E = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \frac{R^2}{H^2} (H - h_i)^2 h_i \Delta h_i.$$

Сумма (69) является интегральной суммой для функции $\pi \frac{R^2}{H^2} (H - h)^2 h$. Поэтому предел этой суммы равен определенному интегралу в границах от $h=0$ до $h=H$. Итак,

$$\begin{aligned} E &= \int_0^H \frac{\pi R^2}{H^2} (H - h)^2 h dh = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H (H^2 h - 2Hh^2 + h^3) dh = \\ &= \frac{\pi R^2}{H^2} \left(\frac{H^2 h^2}{2} - \frac{2Hh^3}{3} + \frac{h^4}{4} \right) \Big|_0^H = \frac{\pi R^2 H^2}{12}. \end{aligned}$$

Пример 2. Пусть точка движется прямолинейно со скоростью v , являющейся заданной функцией времени t : $v = v(t)$. Найти путь, пройденный точкой за промежуток времени от момента $t = t_1$ до момента $t = t_2$.

Решение. Рассмотрим момент времени t и близкий к нему момент $t + dt$. Считая, что в течение малого промежутка времени dt скорость движения v не изменяется и равна скорости в момент времени t , найдем элемент пути ds , пройденный за время dt : $ds = v(t) dt$. Пусть s обладает свойством аддитивности.

Поэтому взяв интеграл от элемента пути, получим искомый путь

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (70)$$

§ 4. КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

1. Основные определения

При переходе из одной точки прямой в другую касательная (которая совпадает с самой прямой) не изменяет своего направления, при переходе же из одной точки в другую по кривой касательная поворачивается на некоторый угол, что объясняется



Рис. 197



Рис. 198

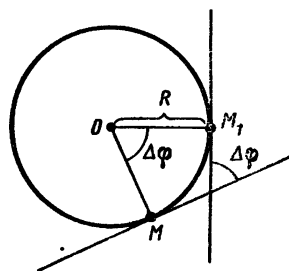


Рис. 199

«искривленностью» кривой. В этом основное различие между прямой линией и кривой. Сравним теперь между собой две различные кривые линии (рис. 197). Интуитивно ясно, что кривая I более искривлена, чем кривая II. Однако для того чтобы строго оценить степень искривленности той или иной кривой, надо дать математически точное определение кривизны.

Пусть дана кривая. Рассмотрим на этой кривой дугу $\overline{MM_1}$ длины Δl (рис. 198). Проведем в точках M и M_1 касательные к кривой. При переходе по кривой из точки M в точку M_1 касательная поворачивается на угол $\Delta\varphi$, который называется *углом смежности*. Этот угол мы считаем положительным.

Определение. Средней кривизной дуги $\overline{MM_1}$ называется отношение угла смежности $\Delta\varphi$ к длине Δl этой дуги: $\Delta K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$.

Пример. Найти среднюю кривизну дуги $\overline{MM_1}$ окружности радиуса R (рис. 199).

Решение. Угол $\Delta\varphi$ между касательными к окружности в точках M и M_1 , очевидно, равен центральному углу $\Delta\varphi$ между радиусами OM и OM_1 . Длина дуги $\overline{MM_1}$ окружности

$$\Delta l = R\Delta\varphi.$$

Следовательно, средняя кривизна дуги

$$K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \frac{\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{1}{R}. \quad (71)$$

Итак, средняя кривизна любой дуги данной окружности есть величина постоянная, обратная ее радиусу. Однако, в общем случае, средняя кривизна может оказаться не одинаковой на различных участках кривой. Для того чтобы охарактеризовать искривленность линии в окрестности данной точки, нужно брать среднюю кривизну для все более и более мелких участков дуги, содержащих данную точку. Таким образом, мы естественно приходим к понятию кривизны кривой в данной точке.

Определение. Кривизной данной кривой в ее точке M называется предел средней кривизны дуги $\overline{MM_1}$ при условии, что точка M_1 неограниченно приближается по данной кривой к точке M .

Обозначив через K кривизну кривой в точке M , получим по определению

$$K = \lim_{M_1 \rightarrow M} K_{\text{ср}}. \quad (72)$$

В частности, кривизна окружности радиуса R в точке M

$$K = \lim_{M_1 \rightarrow M} K_{\text{ср}} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{1}{R} = \frac{1}{R}.$$

Таким образом, в любой точке окружности кривизна имеет одно и то же значение, равное обратной величине радиуса:

$$K = \frac{1}{R}. \quad (73)$$

Предоставляем читателю доказать, что кривизна прямой в любой ее точке равна нулю.

2. Вычисление кривизны

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$, в котором функция $f(x)$ дважды дифференцируема в интервале (a, b) , т. е. имеет в каждой точке этого интервала первую и вторую производные. Вычислим кривизну этой кривой в точке M , имеющей абсциссу x (рис. 200).

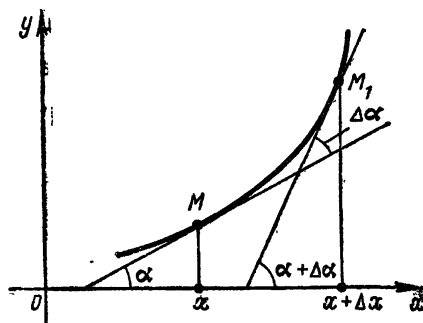


Рис. 200

Рассмотрим на данной кривой вторую точку M_1 с абсциссой $x + \Delta x$. Проведем в точках M и M_1 касательные к кривой $y = f(x)$ и обозначим их углы с осью Ox соответственно через α и $\alpha + \Delta\alpha$. Тогда угол смежности $\Delta\varphi = |\Delta\alpha|$ *. Средняя кривизна дуги

$$K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \frac{|\Delta\alpha|}{\Delta l} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \right|,$$

где Δl — длина дуги $\overline{MM_1}$.

Если точка M_1 , перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке M , то $\Delta x \rightarrow 0$. Следовательно, кривизна кривой

* Напомним, что угол смежности $\Delta\varphi$ по условию считается положительным, тогда как $\Delta\alpha$ может оказаться и отрицательным.

в точке M

$$K = \lim_{M_1 \rightarrow M} K_{\text{cp}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta l} \right|.$$

Разделив числитель и знаменатель на Δx , получим

$$K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{\Delta \alpha}{\Delta x}}{\frac{\Delta l}{\Delta x}} \right| = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta x} \right|}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta l}{\Delta x} \right|} = \left| \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{dl}{dx}} \right|, \quad (74)$$

Согласно геометрическому смыслу производной $y' = \operatorname{tg} \alpha$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} y'$ (если $y' \geq 0$) или $\alpha = \pi + \operatorname{arctg} y'$ (если $y' < 0$).

В обоих случаях

$$\frac{d\alpha}{dx} = (\operatorname{arctg} y')'_x = \frac{(y')'_x}{1+y'^2} = \frac{y''}{1+y'^2}.$$

Кроме того, $\frac{dl}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$ (см. формулу (54)). Подставляя эти выражения для $\frac{d\alpha}{dx}$ и $\frac{dl}{dx}$ в формулу (74), получим

$$K = \left| \frac{\frac{y''}{1+y'^2}}{\sqrt{1+y'^2}} \right| = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Итак, получена следующая формула для вычисления кривизны кривой:

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}. \quad (75)$$

Пример 1. Найти кривизну гиперболы $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = 1$.

Решение. Последовательно находим: $y' = -\frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$. По формуле (75) имеем

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\left| \frac{2}{x^3} \right|}{\left(1 + \frac{1}{x^4} \right)^{3/2}} = \frac{2|x|^3}{(1+x^4)^{3/2}}.$$

Следовательно, при $x = 1$ имеем $K|_{x=1} = \frac{2 \cdot 1^3}{(1+1^4)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Выведем формулу для вычисления кривизны кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \right\}$$

предполагая функции $x(t)$ и $y(t)$ дважды дифференцируемыми.

Тогда (см. гл. VI, § 4, п. 2, формулы (78) и (79):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'}{x'_t} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'}{x'_t} = \frac{\frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^2}}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}.$$

Подставляя выражения для y'_t и y''_t в формулу (75), получим после упрощений

$$K = \frac{|y''_t x'_t - y'_t x''_t|}{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{3/2}}. \quad (76)$$

Пример 2. Найти кривизну циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Решение. Последовательно находим: $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a \sin t$, $x''_t = a \sin t$, $y''_t = a \cos t$.

Подставляя эти выражения в формулу (76), получим

$$K = \frac{|a \cos t \cdot a(1 - \cos t) - a \sin t \cdot a \sin t|}{[a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t]^{3/2}} = \frac{|\cos t - 1|}{a[2(1 - \cos t)]^{3/2}} = \frac{1}{4a \left| \sin \frac{t}{2} \right|}.$$

3. Радиус кривизны. Круг кривизны. Центр кривизны

Мы видели, что кривизна к окружности есть величина, обратная ее радиусу R :

$$K = \frac{1}{R}.$$

Чем больше радиус окружности, тем меньше ее кривизна. По аналогии вводится понятие радиуса кривизны кривой в данной точке.

Определение. Радиусом кривизны R в данной точке кривой называется величина, обратная кривизне K :

$$R = \frac{1}{K}. \quad (77)$$

Так как кривизна кривой, вообще говоря, изменяется при переходе от данной ее точки к другой, то и радиус кривизны является переменной величиной.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то ее радиус кривизны R , как величина, обратная кривизне, определяется следующей формулой:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}. \quad (78)$$

Если же кривая задана параметрически, то ее радиус кривизны выражается формулой

$$R = \frac{[(x'_t)^2 + (y'_t)^2]^{3/2}}{|y''_t x'_t - y'_t x''_t|}. \quad (79)$$

Пример. Найти радиус кривизны кривой $y = \ln x$ в точке $M(1; 0)$.

Решение. Находим $y' = \frac{1}{x}$ и $y'' = -\frac{1}{x^2}$. По формуле (78) получим

$$R|_M = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} \Big|_M = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{x^2}} \Big|_{x=1} = \frac{(1 + x^2)^{3/2}}{|x|} \Big|_{x=1} = 2\sqrt{2}.$$

Построим теперь в данной точке M кривой отрезок MP , направленный по нормали к кривой в сторону ее вогнутости и равный по величине радиусу кривизны кривой в точке M :

$$MP = R = \frac{1}{K}$$

(рис. 201). Окружность с центром в точке P и радиусом, равным радиусу кривизны кривой в данной точке $R = \frac{1}{K}$, называется *кругом кривизны*. Центр P этого круга называется *центром кривизны*. Очевидно, данная кривая и ее круг кривизны в точке M имеют общую касательную (рис. 201).

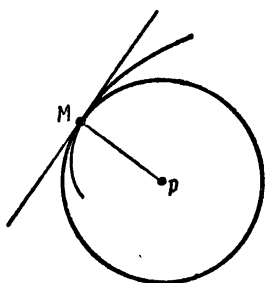


Рис. 201

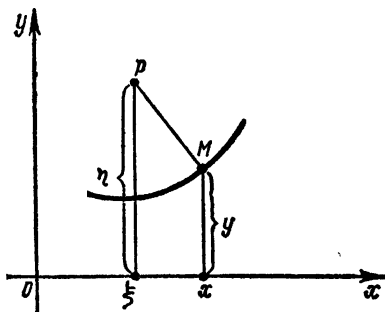


Рис. 202

Покажем, как найти координаты центра кривизны кривой, заданной уравнением $y = f(x)$.

Пусть $M(x; y)$ — точка данной кривой и $P(\xi; \eta)$ — соответствующий ее центр кривизны (рис. 202). Уравнение нормали к кривой в точке $M(x; y)$ имеет вид

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

Так как точка $P(\xi; \eta)$ лежит на нормали, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x).$$

Кроме того, расстояние между точками $P(\xi; \eta)$ и $M(x; y)$ равно радиусу кривизны R кривой:

$$\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} = R,$$

откуда

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = R^2.$$

Решая совместно систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \eta - y &= -\frac{1}{y'} (\xi - x), \\ (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 &= R^2 \end{aligned} \right\}$$

и заменяя R его выражением по формуле (78), найдем

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \pm \frac{y' (1 + y'^2)}{|y''|}, \\ \eta &= y \mp \frac{1 + y'^2}{|y''|}. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Предположим для определенности, что $y'' > 0$. Тогда кривая вогнута и $\eta > y$ (см. рис. 202), т. е. в правой части формулы (80) для η следует взять знак «плюс», и, следовательно, в правой части формулы для ξ — знак «минус». При этом, поскольку $y'' > 0$, $|y''| = y''$, для координат ξ и η центра кривизны мы получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x - \frac{y' (1 + y'^2)}{y''}, \\ \eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Можно показать, что в случае $y'' < 0$ формулы (81) сохраняют свой вид.

4. Эволюта и эвольвента

Если точка M перемещается по данной кривой, то соответствующий ей центр кривизны P , вообще говоря, также описывает некоторую кривую.

Определение. Геометрическое место центров кривизны данной кривой называется ее эволютой.

Сама кривая по отношению к своей эволюте называется эвольвентой или разверткой.

Зная уравнение кривой, можно по формулам (81) выразить координаты ξ и η центра кривизны в зависимости от абсциссы x , т. е. получить параметрические уравнения эволюты.

Исключая из этих уравнений параметр x , получим уравнение эволюты в форме $F(\xi, \eta) = 0$, непосредственно связывающее текущие координаты эволюты.

Пример. Найти уравнение эволюты параболы $y = \frac{x^2}{2}$.

Решение. Сначала находим первую и вторую производные данной функции $y' = x$ и $y'' = 1$, а затем по формулам (81) находим параметрические уравнения эволюты:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x - \frac{y' (1 + y'^2)}{y''} = x - \frac{x (1 + x^2)}{1} = -x^3, \\ \eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{x^2}{2} + \frac{1 + x^2}{1} = \frac{3}{2} x^2 + 1. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, параметрические уравнения эволюты имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -x^3, \\ \eta &= \frac{3}{2}x^2 + 1. \end{aligned} \right\}$$

Исключая из этих уравнений параметр x , последовательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -x^3, \\ \eta - 1 &= \frac{3}{2}x^2, \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} \xi &= -x^3, \\ \frac{2}{3}(\eta - 1) &= x^2, \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} \xi^2 &= x^6, \\ \frac{8}{27}(\eta - 1)^3 &= x^6, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\frac{8}{27}(\eta - 1)^3 = \xi^2.$$

Мы получили уравнение эволюты, непосредственно связывающее ее текущие координаты. Эволютой параболы $y = \frac{x^2}{2}$ оказалась полукубическая парабола. На рис. 203 изображены парабола $y = \frac{x^2}{2}$ и ее эволюта.

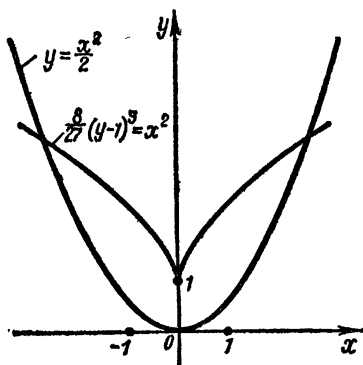


Рис. 203

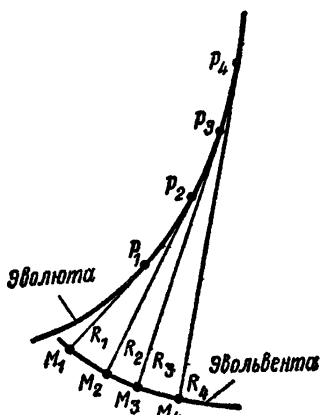


Рис. 204

Укажем (без вывода) два важных свойства эволюты и эвольвенты, устанавливающие связь между ними.

1. Нормаль к эвольвенте является касательной к эволюте в соответствующей точке (рис. 204).

2. Если на некотором участке эвольвенты радиус кривизны изменяется монотонно, то приращение радиуса кривизны на этом участке равно по абсолютной величине длине дуги соответствующего участка эволюты. Например, на рис. 204 $\overline{P_1P_2} = R_2 - R_1$; $\overline{P_2P_3} = R_3 - R_2$.

Покажем, как с помощью этих свойств можно построить эвольвенту, зная ее эволюту. При этом мы будем считать, что эволюта не имеет точек перегиба.

Натянем на эволюту P_1P_4 нерастяжимую гибкую нить, имеющую свободный (не натянутый на эволюту) прямолинейный участок P_1M_1 .

В точке M_1 поместим карандаш. Будем теперь разворачивать нить, оставляя ее в натянутом состоянии. Тогда карандаш вычертит линию, являющуюся эвольвентой для данной эволюты P_1P_4 . Очевидно, в зависимости от длины свободного участка нити P_1M_1 мы можем для данной эволюты получить бесконечное множество различных эвольвент.

§ 5. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Интегралы с бесконечными границами

Определение интеграла, приведенное в § 2, было дано в предположении, что областью интегрирования является конечный сегмент $[a, b]$. Если же предположить, что область интегрирования бесконечна, например, является интервалом $[a, +\infty)$, то даже для непрерывной функции $f(x)$ обычное определение интеграла становится неприемлемым. В данном случае нельзя говорить об интегральных суммах, так как при любом разбиении интервала $[a, +\infty)$ на конечное число частей одна из этих частей будет бесконечной. Обобщим теперь понятие определенного интеграла на случай бесконечной области интегрирования.

Но прежде чем переходить к определениям, рассмотрим пример. Функция $y = \frac{1}{x^2}$ непрерывна на бесконечном интервале $[1, +\infty)$. Поэтому на любом сегменте $[1, b]$, где $b > 1$, существует интеграл

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{b},$$

который при $b \rightarrow \infty$ имеет предел, равный единице. Этот предел называют несобственным интегралом от функции $\frac{1}{x^2}$ и обозначают

символом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Таким образом,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Обобщая этот пример, рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на бесконечном интервале $a \leq x < +\infty$. Для любого конечного сегмента $[a, b]$ интеграл $\int_a^b f(x) dx$ существует.

Если интеграл $\int_a^b f(x) dx$ стремится к конечному пределу при неограниченном возрастании b , то этот предел называют несобственным интегралом с бесконечной верхней границей от функции $f(x)$ и обозначают символом $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Таким образом,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (82)$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ *существует* или *сходится*. Если указанный предел не существует (в частности, если он бесконечен), то говорят, что интеграл *не существует* или *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечной нижней границей:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (83)$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными границами определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,^* \quad (84)$$

где c — любая фиксированная точка оси Ox .

Таким образом, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ существует только тогда, когда существует каждый из интегралов $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x) dx$.

Из наших определений непосредственно видно, что несобственный интеграл является не пределом интегральных сумм, а пределом определенного интеграла с переменной границей интегрирования.

Заметим, что если функция положительна и непрерывна на бесконечном интервале $[a, +\infty)$ и если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ существует, то мы можем его трактовать как площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, бесконечным интервалом оси Ox $[a, +\infty)$ и прямой $x = a$ (рис. 205).

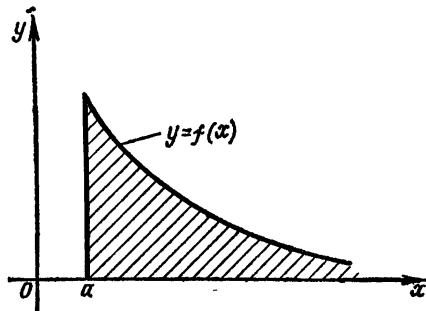


Рис. 205

* Можно показать, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, определяемый формулой (84), не зависит от выбора точки c .

Пример 1. Исследовать, для каких значений $\alpha > 0$ сходится интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. Рассмотрим интеграл $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}$ ($b > 1$).

Если $\alpha \neq 1$, то $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1)$.

Если же $\alpha = 1$, то $\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^b = \ln b$.

Если $\alpha > 1$, то $\alpha - 1 > 0$ и поэтому $\lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{1-\alpha}) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b^{\alpha-1}} = 0$.

Следовательно, в этом случае $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1) = -\frac{1}{\alpha-1}$.

Если $\alpha < 1$, то имеем $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = +\infty$, и аналогично при $\alpha = 1$ $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty$.

Таким образом, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leq 1$ расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. По формуле (84), в которой полагаем $c=0$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) = \\ &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

т. е. интеграл сходится.

Пример 3. $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ расходится, так как $\int_0^b \sin x \, dx = 1 - \cos b$ не имеет предела при $b \rightarrow +\infty$, хотя и остается заключенным между 0 и 2.

Можно показать, что большинство основных свойств определенных интегралов сохраняется для сходящихся интегралов с бесконечными пределами. В частности, например, справедлива формула замены переменной. Часто удачной заменой переменной несобственный интеграл с бесконечными пределами сводится к определенному интегралу.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Решение. Положим $x = \operatorname{tg} z$, тогда

$$dx = \frac{dz}{\cos^2 z}, \quad \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{(\sec^2 z)^2} = \cos^4 z.$$

При этом, если z меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то x меняется от 0 до $+\infty$. Поэтому

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2z}{2} \, dz = \frac{\pi}{4}.$$

2. Интегралы от разрывных функций

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при $a \leq x < b$, а в точке b имеет разрыв. В этом случае определение интеграла от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ как предела интегральных сумм, вообще говоря, не применимо, так как этот предел может и не существовать. В самом деле, пусть, например, $f(x) > 0$ и $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$ (рис. 206). В этом слу-

чае при любом разбиении сегмента $[a, b]$ на части $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$ функция $f(x)$ будет неограниченной на последнем сегменте $[x_{n-1}, b]$ (так как по предположению $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$).

Поэтому, если взять точку ξ_n достаточно близко к точке b , можно сделать произведение $f(\xi_n) \Delta x_n$, а следовательно

и интегральную сумму $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, сколь угодно большими. Это значит, что интегральные суммы неограничены, и, следовательно

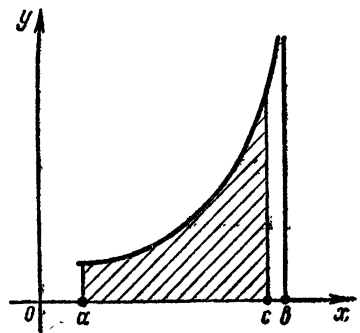


Рис. 206

они не имеют предела при стремлении шага разбиения λ к нулю.

Однако и в этом случае, несмотря на то, что прежнее определение интеграла неприемлемо, можно обобщить понятие интеграла.

Прежде чем переходить к определениям, разберем конкретный пример. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Эта функция стремится к бесконечности при $x \rightarrow 1$ слева. Поэтому составлять для нее интегральную сумму на сегменте $[0, 1]$ нельзя. Однако на сегменте $[0, c]$, где $0 < c < 1$, функция непрерывна, и поэтому существует интеграл

$$\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2 \sqrt{1-x} \Big|_0^c = 2(1 - \sqrt{1-c}),$$

который имеет предел при $c \rightarrow 1-0$:

$$\lim_{c \rightarrow 1-0} 2(1 - \sqrt{1-c}) = 2.$$

Этот предел и называют несобственным интегралом от разрывной на сегменте $[0, 1]$ функции $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ и обозначают символом $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Таким образом

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c \rightarrow 1-0} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c \rightarrow 1-0} 2(1 - \sqrt{1-c}) = 2.$$

Обобщая этот пример, рассмотрим функцию $y = f(x)$, разрывную в точке b сегмента $[a, b]$ и непрерывную на сегменте $[a, c]$, где c — любая точка интервала (a, b) (см. рис. 206).

Если при $c \rightarrow b$ слева определенный интеграл $\int_a^c f(x) dx$ стремится к конечному пределу, то этот предел называется несобственным интегралом от разрывной функции и обозначается символом $\int_a^b f(x) dx$.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ *существует* или *сходится*. Если указанный предел не существует, то говорят, что интеграл *не существует* или *расходится*.

Аналогично, если $f(x)$ разрывна при приближении x справа к точке a , то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx, \text{ где } a < c < b.$$

Наконец, если функция $f(x)$ разрывна в некоторой внутренней точке d сегмента $[a, b]$, то мы разбиваем этот сегмент на два сегмента: $[a, d]$ и $[d, b]$. Если несобственные интегралы от данной функции существуют на каждом из этих сегментов, то сумма этих интегралов, по определению, называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx.$$

Таким образом, из определений непосредственно видно, что несобственный интеграл от разрывной функции является не пределом интегральных сумм, а пределом определенного интеграла.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Исследовать, для каких значений $\mu > 0$ сходится интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\mu} \quad (a < b).$$

Решение. Подынтегральная функция разрывна в точке $x=b$.

Рассмотрим интеграл $\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\mu}$, где $a < c < b$.

Если $\mu \neq 1$, то

$$\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\mu} = \frac{1}{\mu-1} \cdot \frac{1}{(b-x)^{\mu-1}} \Big|_a^c = \frac{1}{\mu-1} \left[\frac{1}{(b-c)^{\mu-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} \right].$$

Если $\mu = 1$, то $\int_a^c \frac{dx}{b-x} = -\ln(b-x) \Big|_a^c = \ln(b-a) - \ln(b-c).$

Если $\mu < 1$, то $\mu-1 < 0$ и, следовательно,

$$\lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\mu} = \frac{1}{\mu-1} \cdot \lim_{c \rightarrow b-0} \left[\frac{1}{(b-c)^{\mu-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} \right] = \frac{1}{(1-\mu)(b-a)^{\mu-1}}.$$

Если $\mu = 1$, то $\lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c \frac{dx}{b-x} = \lim_{c \rightarrow b-0} [\ln(b-a) - \ln(b-c)] = +\infty.$

Если $\mu > 1$, то $\mu-1 > 0$ и поэтому

$$\lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\mu} = \frac{1}{\mu-1} \cdot \lim_{c \rightarrow b-0} \left[\frac{1}{(b-c)^{\mu-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} \right] = +\infty.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\mu}$ сходится при $\mu < 1$ и расходится при $\mu \geq 1$.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. Гра-

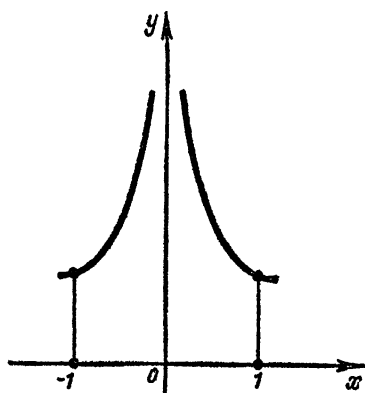


Рис. 207

фик подынтегральной функции изображен на рис. 207.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ разрывна в точке

$x=0$ ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$). Рассмотрим

интегралы $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ и $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. Они

оба существуют, причем $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3$,

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3$. Поэтому по определению существует интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3 + 3 = 6.$$

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{x^2}$ разрывна в точке $x=0$. Поэтому, как и в примере 2, рассмотрим отдельно интегралы

$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}$ и $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$. Легко убедиться в том, что оба эти интеграла не существуют. Следовательно, по определению не существует интеграл

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$. Заметим, что если бы мы действовали формально, применяя

формулу Ньютона—Лейбница к интегралу $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$, то получили бы

заведомо неверный результат $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$. Этот результат

неверен, так как интеграл от положительной функции на сегменте

$[-1, 1]$ не может быть отрицательным. Наша ошибка произошла потому, что мы незаконно применили формулу Ньютона — Лейбница, которая была выведена в предположении непрерывности подынтегральной функции на сегменте интегрирования. В нашем же случае функция $\frac{1}{x^2}$ имеет в точке $x=0$ бесконечный разрыв.

3. Признаки сходимости несобственных интегралов

В некоторых случаях нет необходимости вычислять несобственный интеграл, а достаточно лишь знать, сходится он или расходится. В таких случаях часто бывает полезным сравнить данный несобственный интеграл с другим несобственным интегралом, сходимость или расходимость которого известна. Приведем без доказательства теоремы, устанавливающие признаки сходимости или расходимости, основанные на сравнении несобственных интегралов.

Теорема 1. Пусть в интервале $[a, +\infty)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$. Тогда:

а) если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx;$$

б) если интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ расходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ также расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^5+1}}$.

Решение. Сравним подынтегральную функцию $\frac{x}{\sqrt{x^5+1}}$ с функцией $\frac{x}{\sqrt{x^5}}$. Очевидно, что в интервале $1 \leq x < +\infty$

$$\frac{x}{\sqrt{x^5+1}} < \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Но $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ сходится, так как $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ (см. п. 1, пример 1). Сле-

довательно, по теореме 1 сходится и данный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^5+1}}$.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} dx$.

Решение. На интервале $2 \leq x < +\infty$ $\ln(x^2+1) > 1$, так как при $x \geq 2$ сумма x^2+1 больше основания натуральных логарифмов.

рифмов e . Следовательно, на этом интервале

$$\frac{\ln(x^2+1)}{x} > \frac{1}{x}.$$

Но интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится (см. п. 1, пример 1). Следовательно, и данный интеграл также расходится.

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в интервале $[a, b)$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, а в точке $x=b$ имеют разрыв. Тогда:

а) если интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b \varphi(x) dx$;

б) если интеграл $\int_a^b \varphi(x) dx$ расходится, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ также расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

Решение. Подынтегральная функция непрерывна на интервале $[0, 1)$, а в точке $x=1$ имеет бесконечный разрыв. Будем сравнивать подынтегральную функцию с функцией $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$, также

непрерывной в интервале $[0, 1)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x=1$. Прежде всего отметим, что для $0 \leq x < 1$ имеет место неравенство $x^4 \leq x$ и, следовательно, неравенство $1-x^4 \geq 1-x$.

Но тогда $\sqrt[3]{1-x^4} \geq \sqrt[3]{1-x}$ и поэтому $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$. Таким образом, подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ в интервале $[0, 1)$ оказалась меньшей, чем функция $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$.

Так как интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ сходится (см. п. 2, пример 1), то

по теореме 2 сходится и интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

§ 6. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Общие замечания. Постановка вопроса.

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x) dx$ от непрерывной функции $f(x)$. Если может быть найдена первообразная $F(x)$ подынтегральной функции, то по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Если же первообразная не может быть найдена или если функция $y = f(x)$ задана графически или таблично, то для вычисления интеграла прибегают к приближенным формулам, точность которых может быть сделана сколь угодно большой.

Приближенные методы вычисления определенного интеграла в большинстве случаев основаны на том, что определенный интеграл

$\int_a^b f(x) dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, сегментом $[a, b]$ оси Ox и вертикальными прямыми проведенными через точки $x = a$ и $x = b$. Благодаря этому задача о приближенном вычислении интеграла равносильна задаче о приближенном вычислении площади криволинейной трапеции.

Идея приближенного вычисления интеграла заключается в том, что кривая $y = f(x)$ заменяется новой, достаточно «близкой» к ней кривой.

Тогда искомая площадь приближенно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной новой кривой.

В качестве этой новой ограничивающей кривой выбирают такую, для которой площадь криволинейной трапеции подсчитывается просто. В зависимости от выбора новой кривой мы получим ту или иную приближенную формулу интегрирования.

2. Метод трапеций

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x) dx$.

Разобьем сегмент интегрирования $[a, b]$ на n равных малых сегментов точками деления: $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}$. Кроме того, положим $x_0 = a, x_n = b$. Длина h каждого малого сегмента равна $\frac{b-a}{n}$: $h = \frac{b-a}{n}$. Через точки деления проведем прямые, параллельные оси Oy . Пусть они пересекают кривую в точках $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_{n-1}, A_n$. Заменим данную кривую $y = f(x)$ впи-

санной в нее ломаной $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ (рис. 208), соединив концы смежных ординат прямыми линиями.

Для наглядности будем предполагать, что на сегменте $[a, b]$ функция $f(x) \geq 0$. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху построенной ломаной, даст нам приближенное значение интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

Эта площадь равна сумме площадей прямолинейных трапеций, ограниченных сверху звеньями ломаной. Площадь каждой такой

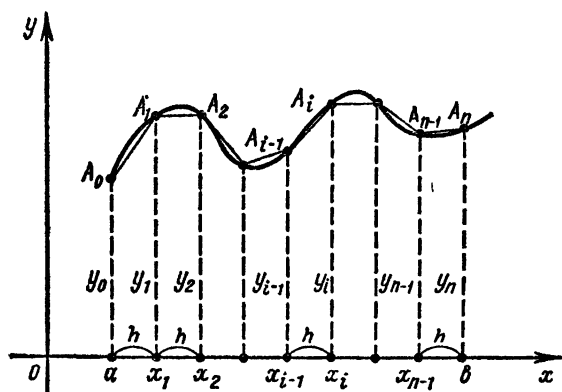


Рис. 208

трапеции легко подсчитать. В самом деле, основаниями ее будут ординаты смежных точек деления x_{i-1} и x_i , а высотой — малый сегмент $[x_{i-1}, x_i]$, длина которого $h = \frac{b-a}{n}$ (см. рис. 208). Поэтому площадь такой трапеции равна $\frac{y_{i-1} + y_i}{2} \cdot h$, где $y_{i-1} = f(x_{i-1})$, а $y_i = f(x_i)$.

Следовательно, площадь фигуры, ограни-

ченной сверху ломаной $A_0A_1 \dots A_n$,

$$S_n = \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \dots + \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h.$$

После очевидных преобразований получим

$$S_n = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right), \text{ где } h = \frac{b-a}{n}.$$

Таким образом, имеем приближенную формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (85)$$

Эта формула называется *формулой трапеций*.

Формула трапеций, выведенная в предположении, что $f(x) \geq 0$, остается справедливой для любой функции $f(x)$, непрерывной на сегменте $[a, b]$.

Ясно, что с возрастанием числа n точек деления точность, даваемая формулой трапеций, возрастает.

При вычислении интеграла с помощью формулы трапеций обычно поступают следующим образом:

1) вычисляют значения интеграла I_n и I_{2n} при числе точек деления n и $2n$;

2) сравнивают результаты вычислений и оставляют все первые совпадающие знаки.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{1,6} \sin(x^2) dx$ с помощью формулы трапеций, полагая $n=8$ и $n=16$.

Решение. Составляем таблицу значений подынтегральной функции при $n=8$ и $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1,6-0}{8} = 0,2$ (табл. 1).

Таблица 1

i	x_i	x_i^2	$y_i = \sin(x_i)^2$
0	0	0	0,0000
1	0,2	0,04	0,0400
2	0,4	0,16	0,1593
3	0,6	0,36	0,3523
4	0,8	0,64	0,5972
5	1,0	1,00	0,8415
6	1,2	1,44	0,9915
7	1,4	1,96	0,9249
8	1,6	2,56	0,5487

По формуле (85) при $n=8$ получим

$$\begin{aligned} \int_0^{1,6} \sin(x^2) dx &\approx h \left(\frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \right) = \\ &= 0,2 \left[\frac{0 + 0,5487}{2} + 0,0400 + 0,1593 + 0,3523 + 0,5972 + 0,8415 + \right. \\ &\quad \left. + 0,9915 + 0,9249 \right] = 0,2 \cdot 4,1807 = 0,8362. \end{aligned}$$

Теперь составим таблицу значений подынтегральной функции при $n=16$ и $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1,6-0}{16} = 0,1$ (табл. 2).

Таблица 2

i	x_i	x_i^2	$y_i = \sin(x_i)^2$
0	0	0	0,0000
1	0,1	0,01	0,0100
2	0,2	0,04	0,0400
3	0,3	0,09	0,0899
4	0,4	0,16	0,1593
5	0,5	0,25	0,2474
6	0,6	0,36	0,3523
7	0,7	0,49	0,4706
8	0,8	0,64	0,5972
9	0,9	0,81	0,7243
10	1,0	1,00	0,8415
11	1,1	1,21	0,9356
12	1,2	1,44	0,9915
13	1,3	1,69	0,9928
14	1,4	1,96	0,9249
15	1,5	2,25	0,7776
16	1,6	2,56	0,5487

Применяя формулу (78) для случая $n = 16$, получим

$$\int_0^{1,6} \sin(x^2) dx \approx \frac{1,6}{16} \left[\frac{0+0,5487}{2} + 0,0100 + 0,0400 + 0,0899 + 0,1593 + \right. \\ \left. + 0,2474 + 0,3523 + 0,4706 + 0,5972 + 0,7243 + 0,8415 + \right. \\ \left. + 0,9356 + 0,9915 + 0,9928 + 0,9249 + 0,7776 \right] = 0,8429.$$

Сравнивая результаты обоих вычислений, видим, что после округлений совпадают первые два знака. Следовательно, за приближенное значение интеграла можно принять

$$\int_0^{1,6} \sin(x^2) dx \approx 0,84.$$

Табличное значение данного интеграла с точностью до 0,00001 равно 0,84528.

3. Метод параболических трапеций (метод Симпсона*)

Этот метод приближенного вычисления определенного интеграла основан на замене графика подынтегральной функции не хордами, как в методе трапеций, а дугами парабол, оси которых параллельны оси Oy .

Прежде чем излагать этот метод, рассмотрим тот частный случай, когда кривая, ограничивающая данную криволинейную трапецию, является графиком квадратного трехчлена $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Имеет место следующая формула:

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx = \frac{b-a}{6} (y_a + 4y_c + y_b), \quad (86)$$

где y_a — ордината кривой в точке $x = a$ (левая ордината);
 y_b — ордината кривой в точке $x = b$ (правая ордината);
 y_c — ордината кривой в средней точке сегмента $[a, b]$, т. е. в точке $x = \frac{a+b}{2}$ (рис. 209).

Вывод этой формулы сводится к ее непосредственной проверке. Подсчитаем выражение, стоящее в левой части формулы:

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx = \frac{A(b^3 - a^3)}{3} + \frac{B(b^2 - a^2)}{2} + C(b - a) = \\ = \frac{b-a}{6} [2A(b^2 + ab + a^2) + 3B(b + a) + 6C].$$

*) Т. Симпсон (1710—1761) — английский математик.

Для подсчета выражения, стоящего в правой части формулы (86), найдем предварительно y_a , y_n и y_c :

$$y_a = f(a) = Aa^2 + Ba + C; \quad y_n = f(b) = Ab^2 + Bb + C;$$

$$y_c = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = A \frac{(a+b)^2}{4} + B \frac{a+b}{2} + C.$$

Подставляем в правую часть формулы (86):

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{6} (y_a + 4y_c + y_n) &= \frac{b-a}{6} [Aa^2 + Ba + C + A(a^2 + b^2 + 2ab) + \\ &+ 2B(a+b) + 4C + Ab^2 + Bb + C] = \\ &= \frac{b-a}{6} [2A(a^2 + b^2 + ab) + 3B(b+a) + 6C]. \end{aligned}$$

Мы видим, что правая и левая части формулы (86) равны между собой, что и доказывает ее справедливость.

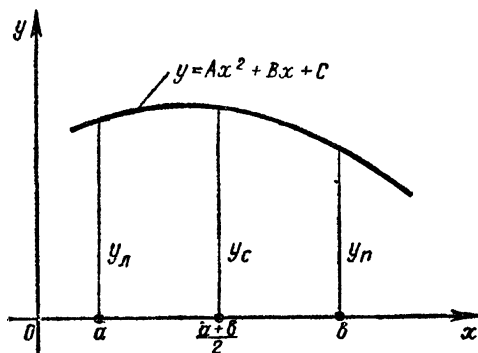


Рис. 209

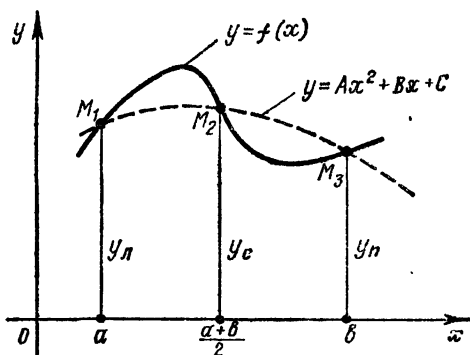


Рис. 210

Рассмотрим теперь криволинейную трапецию, ограниченную произвольной кривой $y = f(x)$ (рис. 210). Через точки $M_1(x_a; y_a)$, $M_2(x_c; y_c)$, $M_3(x_n; y_n)$ этой кривой, где $x_a = a$, $x_c = \frac{a+b}{2}$, $x_n = b$, проведем вспомогательную параболу $y = Ax^2 + Bx + C$. Такую параболу всегда можно провести через три точки и при этом только одну (см. гл. VI, § 9, замечание).

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной вспомогательной параболой, приближенно равна площади заданной криволинейной трапеции:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx.$$

Так как согласно формуле (86)

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx = \frac{b-a}{6} (y_a + 4y_c + y_n),$$

Для оценки погрешности вычислений по формуле Симпсона можно рекомендовать следующую формулу, которую приводим без вывода

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I_{2n} \right| \leq \frac{|I_{4n} - I_{2n}|}{15}, \quad (90)$$

где I_{2n} и I_{4n} — соответственно результаты вычислений интеграла по формуле Симпсона при числе делений сегмента интегрирования на $2n$ и $4n$ частей.

Пример. Вычислить с помощью формулы Симпсона

$$\int_0^{1,6} \sin(x^2) dx$$

при $2n = 4$ и $2n = 8$.

Решение. Составим таблицу для $2n = 4$ и $h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1,6-0}{4} = 0,4$ (табл. 3)

Т а б л и ц а 3

i	x_i	x_i^2	$y_i = \sin(x_i)^2$
0	0	0,00	0,0000
1	0,4	0,16	0,1593
2	0,8	0,64	0,5972
3	1,2	1,44	0,9915
4	1,6	2,56	0,5487

Применяя формулу (89), получим

$$\begin{aligned} \int_0^{1,6} \sin(x^2) dx &\approx \frac{b-a}{6n} [y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2] = \\ &= \frac{1,6-0}{12} [0 + 0,5487 + 4(0,1593 + 0,9915) + 2 \cdot 0,5972] = 0,8462. \end{aligned}$$

При $2n = 8$ и $h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1,6-0}{8} = 0,2$, пользуясь табл. 1, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{1,6} \sin(x^2) dx &\approx \frac{b-a}{6n} [y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)] = \\ &= \frac{1,6-0}{24} [0 + 0,5487 + 4(0,0400 + 0,3523 + 0,8415 + 0,9249) + \\ &\quad + 2(0,1593 + 0,5972 + 0,9915)] = 0,8455. \end{aligned}$$

Сравнивая результаты обоих вычислений, замечаем, что после округления совпадают первые три знака. Поэтому за приближенное значение интеграла принимаем

$$\int_0^{1,6} \sin(x^2) dx \approx 0,846.$$

Напомним, что табличное значение данного интеграла с точностью до 0,00001 равно 0,84528.

Замечание. При одном и том же числе точек деления сегмента интегрирования метод Симпсона дает обычно более точный результат, чем метод трапеций. Можно показать, что погрешность в методе трапеций обратно пропорциональна квадрату числа точек деления, а в методе Симпсона — обратно пропорциональна четвертой степени числа точек деления.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Функция двух переменных и ее область определения

До сих пор мы рассматривали функции, зависящие от одной переменной величины. В этой главе будут изучаться функции, зависящие от нескольких переменных. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Площадь S прямоугольника зависит от двух величин: его основания x и высоты y . Эта зависимость выражается формулой

$$S = xy. \quad (1)$$

Каждой паре (x, y) положительных значений x и y по формуле (1) соответствует определенное значение площади S . Говорят, что площадь S прямоугольника является функцией его основания x и высоты y .

Пример 2. Сила тока I зависит по закону Ома от двух величин—напряжения U и сопротивления R :

$$I = \frac{U}{R}. \quad (2)$$

Если предположить, что в некотором опыте U и R изменяются в определенных конечных границах, а именно

$$\begin{aligned} U_1 &\leq U \leq U_2, \\ R_1 &\leq R \leq R_2 \end{aligned} \quad (3)$$

(U_1, U_2, R_1 и R_2 —постоянные), то каждой паре значений U и R , удовлетворяющих неравенствам (3), по формуле (2) будет соответствовать определенное значение силы тока I , т. е. I является функцией U и R . Обобщая эти примеры, приходим к следующему определению.

Определение. Переменная z называется функцией двух переменных x и y , если:

- 1) задано множество G пар численных значений x и y ;
- 2) задан закон, по которому каждой паре чисел (x, y) из этого множества соответствует единственное численное значение z .

При этом переменные x и y называются *аргументами* или *независимыми переменными*. Обозначения функций двух переменных аналогичны обозначениям функций одной переменной:

$$z = f(x, y), \quad z = \varphi(x, y), \quad z = z(x, y) \text{ и т. д.}$$

При нахождении частного значения z_0 функции $z = f(x, y)$, которое она принимает при заданных численных значениях аргументов $x = x_0$ и $y = y_0$, пишут $z_0 = z|_{x=x_0, y=y_0}$ или $z_0 = f(x_0, y_0)$. Например, если $z = f(x, y) = xy$, то $z|_{x=1, y=2} = f(1, 2) = 1 \cdot 2 = 2$.

Определение. Множество G всех пар значений аргументов данной функции двух переменных называется областью определения (или областью задания) этой функции.

Читателю рекомендуется сравнить область определения G функции двух переменных с областью определения M функции одной переменной (см. гл. I, § 5, п. 2) и обратить внимание на то, что множество M состоит из действительных чисел x , а множество

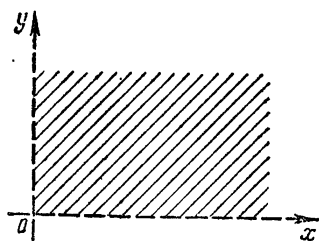


Рис. 211

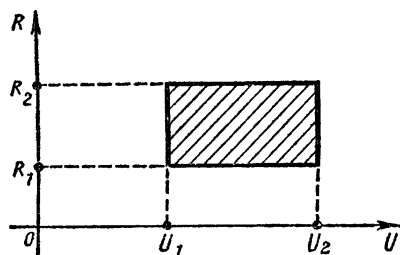


Рис. 212

G — из пар чисел (x, y) . Каждой паре чисел (x, y) в плоскости Oxy соответствует точка $P(x, y)$. Поэтому часто пары чисел называют *точками* и говорят о функции двух переменных $f(x, y)$ как о *функции точки P* , имеющей в плоскости Oxy координаты x и y . Иногда и пишут $f(P)$ вместо $f(x, y)$.

Области определения функции двух переменных G в плоскости Oxy соответствует некоторое множество точек. Это множество точек мы также будем называть областью определения функции двух переменных. Так, в примере 1, в котором рассматривалась площадь прямоугольника $S = xy$, как функция основания x и высоты y , областью определения G функции является множество точек первой четверти, так как только для этих точек обе координаты положительны (рис. 211). В примере 2 рассматривалась сила тока $I = \frac{U}{R}$, как функция напряжения U и сопротивления R , и предполагалось, что по условиям опыта $U_1 \leq U \leq U_2$, $R_1 \leq R \leq R_2$.

Областью определения G функции здесь служит прямоугольник, ограниченный прямыми $U = U_1$, $U = U_2$, $R = R_1$ и $R = R_2$ (рис. 212). Точки этого прямоугольника (включая его границы) имеют координаты U и R , удовлетворяющие неравенствам (3); напротив, координаты точек, лежащих вне указанного прямоугольника, неравенствам (3) не удовлетворяют, и, следовательно, эти точки в область определения функции не входят.

Так же как и в случае функции одной переменной, способы задания функций двух переменных могут быть самыми различными.

Функция может быть задана с помощью таблицы (табличный способ задания функции). Для функции $z = f(x, y)$ такая таблица (таблица с двойным входом) имеет, например, следующий вид:

$x \backslash y$	0	1	2	3	4
0	100	81	63	45	28
1	100	83	65	48	32
2	100	84	68	51	35
3	100	84	69	54	39
4	100	85	70	56	42

В клетках левого столбца этой таблицы даются значения аргумента x , в клетках верхней строки — значения аргумента y . В остальных клетках таблицы даются значения функции z . При этом, если значение x выбирается в клетке i -й строки, а значение y — в клетке k -го столбца, то соответствующее значение z помещается в клетке, лежащей на пересечении i -й строки и k -го столбца. Например, при $x = 3$, $y = 2$ имеем $z = 69$.

Приведенная таблица соответствует значениям относительной влажности z (в процентах) в зависимости от температуры x (в градусах по Цельсию) сухого термометра и разности температур y сухого и влажного термометров.

Самым важным в нашем курсе является аналитический способ задания, когда функция задается с помощью аналитического выражения (с помощью формулы). В рассмотренных выше примерах 1 и 2 функция задавалась аналитически, причем область задания в первом примере определялась из геометрических соображений, а во втором примере — из условий опыта. Однако часто функция двух переменных задается только с помощью формулы, и при этом область определения ее не указывается.

Если функция двух переменных задана с помощью аналитического выражения без каких-либо дополнительных условий, то областью ее определения принято считать множество таких точек плоскости Oxy , для которых это выражение имеет смысл и дает действительное значение функции.

Например, многочлен 1-й степени $z = ax + by + c$, многочлен 2-й степени $z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ и т. д. определены для всех пар чисел (x, y) , т. е. во всей плоскости Oxy .

Рациональная функция двух переменных, т. е. отношение двух многочленов относительно x и y , определена во всех точках плоскости Oxy , за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль. Так, рациональная функция $z = \frac{x^2 + 3y^2}{x - y}$ определена на всей плоскости Oxy , за исключением прямой $x - y = 0$. Приведем еще примеры на нахождение областей определения функций.

Пример 3. Найти область определения функции $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$.

Решение. Функция задана только с помощью формулы. Областью определения этой функции является множество всех тех точек, для которых выражение $\ln(1-x^2-y^2)$ определено, т. е. множество точек, для которых $1-x^2-y^2 > 0$, или $x^2+y^2 < 1$. Так как выражение x^2+y^2 представляет собой квадрат расстояния точки $P(x; y)$ от начала координат, то в область определения данной функции войдут только те точки, расстояние которых от начала

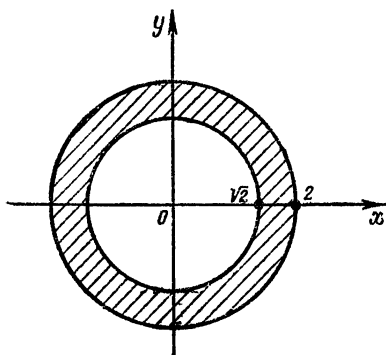


Рис. 213

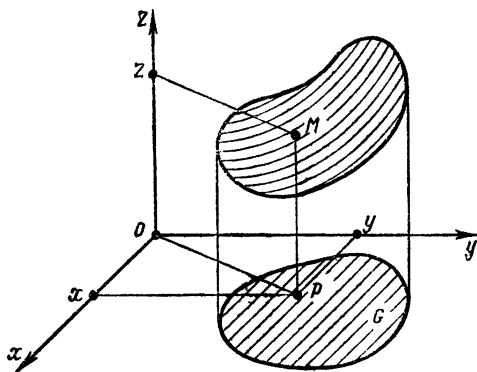


Рис. 214

координат меньше единицы. Множество таких точек образует внутренность круга с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

Пример 4. Найти область определения функции $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 3)$.

Решение. Функция определена при условии

$$-1 \leq x^2 + y^2 - 3 \leq 1,$$

которое равносильно условию

$$2 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

Граничными линиями области определения являются окружности

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = 4,$$

которые также принадлежат этой области.

Таким образом, область определения функции состоит из точек, лежащих между окружностями $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 4$, и точек, лежащих на этих окружностях (рис. 213).

2. График функции двух переменных

График функции одной переменной $y = f(x)$ в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости есть, вообще говоря, кривая. Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ в прямоугольной декартовой системе координат в пространстве является в общем случае поверхность.

В самом деле, пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области G (рис. 214). Каждой точке $P(x; y)$ этой области соответствует определенное значение функции $z = f(P)$. Примем это значение z за аппликату некоторой точки M в системе координат $Oxyz$. Абсциссу и ординату для этой точки возьмем такими же, как и для точки P . (Таким образом, точка P является проекцией точки $M(x; y; z)$ на плоскость Oxy .)

Тогда каждой точке P области G будет соответствовать вполне определенная точка M в пространстве. Всей области будет соответствовать некоторое множество точек M , образующее, вообще говоря, поверхность.

Эта поверхность называется графиком функции $z = f(x, y)$.

Если поверхность является графиком некоторой функции двух переменных, то уравнение, задающее эту функцию, называется уравнением соответствующей поверхности.

В аналитической геометрии уже рассматривались некоторые поверхности, которые являются графиками функций двух переменных. Напомним некоторые из них.

Эллиптический параболоид является графиком функции $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ (p и q — постоянные одинакового знака) (см. рис. 100).

Гиперболический параболоид является графиком функции $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$ (p и q — постоянные одинакового знака) (см. рис. 101).

Верхняя часть эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (см. рис. 96) является графиком функции

$$z = +c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

а нижняя его часть — графиком функции

$$z = -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

3. Функции трех и большего числа переменных

Мы подробно рассмотрели понятия функции двух переменных и ее области определения. В практике встречаются, однако, функции, зависящие от трех или большего числа переменных. Например, объем V прямоугольного параллелепипеда зависит от трех величин — длины a и ширины b его основания и высоты h параллелепипеда:

$$V = abh.$$

Дадим определение функции трех переменных.

Определение. *Переменная z называется функцией трех переменных x, y и z , если:*

1) задано множество Ω троек численных значений x, y и z ;

2) задан закон, по которому каждой тройке чисел $(x; y; z)$ из этого множества соответствует единственное значение u .

Переменные x , y и z называются при этом *аргументами* функции u или *независимыми переменными*.

Множество Ω , которое образуют все тройки $(x; y; z)$ численных значений аргументов x , y и z , называется *областью определения* или *областью задания* функции трех переменных.

Обозначаются функции трех переменных так же, как и функции одной или двух переменных:

$$u = f(x, y, z), \quad w = w(x, y, z) \text{ и т. д.}$$

Функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$ можно рассматривать как функцию точки $P(x, y, z)$, имеющей координаты x, y, z в пространственной системе координат $Oxyz$.

Пользуясь геометрической терминологией, аналогичной той, которую мы приняли для функции двух переменных, скажем, что область определения функции $u = f(x, y, z)$ есть некоторое множество точек в пространстве.

Способы задания функций трех переменных $u = f(x, y, z)$ могут быть самыми различными, но важнейшим в нашем курсе будет аналитический способ задания, когда функция задается с помощью аналитического выражения (формулы). При этом часто область определения функции не указывается. В последнем случае областью определения (областью задания) функции принято считать множество всех тех точек $P(x; y; z)$ пространства, для которых это выражение имеет смысл и дает действительное значение функции u .

Пример 1. Найти область определения функции

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Решение. Данное выражение дает действительные значения u тогда и только тогда, когда

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0,$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Областью определения функции, таким образом, является здесь шар единичного радиуса с центром в начале координат. Точки граничной шаровой поверхности относятся к области определения функции.

Аналогично можно ввести понятия функции четырех, пяти и вообще n переменных.

Определение. Переменная величина u называется *функцией n переменных $x, y, z, \dots, t$* , если:

1) задано множество систем $(x, y, z, \dots, t)$ численных значений $x, y, z, \dots, t$;

2) задан закон, по которому каждой системе $(x, y, z, \dots, t)$ из этого множества соответствует единственное значение u .

Например, $u = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - t^2$ есть функция четырех переменных x, y, z и t , определенная для любых значений этих переменных.

Обозначения функций n переменных аналогичны обозначениям функций двух и трех переменных:

$$u = f(x, y, z, \dots, t) \text{ и т. д.}$$

Для того чтобы сохранить удобную геометрическую терминологию, функцию n переменных $u = f(x, y, z, \dots, t)$ при $n > 3$ также часто рассматривают как функцию точки $P(x; y; z; \dots; t)$ и пишут $u = f(P)$. Под точкой $P(x; y; z; \dots; t)$ в таких случаях понимают просто систему n чисел $(x; y; z; \dots; t)$. Числа $x, y, z, \dots, t$ называют при этом *координатами* точки $P(x; y; z; \dots; t)$. Множество всех точек $P(x; y; z; \dots; t)$ с n координатами называется *пространством n измерений*.

§ 2. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность функции. Точки разрыва

1. Основные определения

При рассмотрении предела функции одной переменной $y = f(x)$ было введено понятие окрестности точки. Под окрестностью точки x_0 там понимался интервал MN , содержащий эту точку. При введении понятия предела для функции двух переменных $z = f(x, y) = f(P)$ мы будем рассматривать окрестность точки в плоскости Oxy .

Окрестностью точки $P_0(x_0; y_0)$ называется внутренность круга с центром в этой точке. Если радиус этого круга равен δ , то говорят δ -окрестность точки (рис. 215). Очевидно, что любая точка $P(x; y)$, принадлежащая δ -окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$, находится от этой точки на расстоянии, меньшем δ .

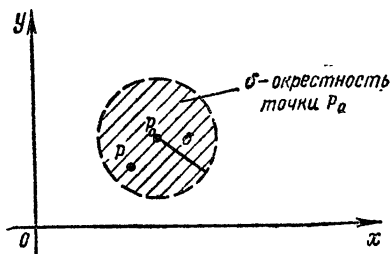


Рис. 215

О п р е д е л е н и е. Число b называется *пределом функции двух переменных $z = f(x, y) = f(P)$ при $P \rightarrow P_0$* , если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая δ -окрестность точки $P_0(x_0; y_0)$, что для любой точки $P(x; y)$ этой окрестности (за исключением, быть может, точки P_0) имеет место неравенство

$$|f(P) - b| < \varepsilon, \quad (4)$$

или

$$|f(x, y) - b| < \varepsilon. \quad (5)$$

При этом пишут $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = b$ или $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = b$, так как при

$P(x; y) \rightarrow P_0(x_0; y_0)$, очевидно, $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$.

Функция двух переменных называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю.

Заметим, что если число b есть предел функции $z = f(P)$, то, как это следует из определения предела, разность $f(P) - b$ является бесконечно малой, когда точка P произвольным образом неограниченно приближается к точке P_0 .

Пример 1. Найти

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}.$$

Решение. Предел функции находится при $P(x; y) \rightarrow P_0(0; 0)$, т. е. при $\rho \rightarrow 0$, где $\rho = P_0P$ — расстояние между точками P_0 и P . В данном случае точка P_0 есть начало координат. Следовательно, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 (\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)}{\rho^2 + 1 - 1} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{\rho^2 + 1} + 1) = 2. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на то, что в разобранном примере функция $\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ не определена в точке $P_0(0; 0)$, но имеет предел при $P \rightarrow P_0$.

Пример 2. Функция $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ определена и непрерывна на всей плоскости, за исключением начала координат. Покажем, что при приближении точки $P(x; y)$ к началу координат функция не имеет предела. Действительно, приближаясь к началу координат по оси Ox , где $y = 0$, получим $\lim_{x \rightarrow 0} z = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$. Если же приближаться к началу координат по оси Oy , где $x = 0$, то $\lim_{y \rightarrow 0} z = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = -1$. Таким образом, при приближении точки $P(x; y)$ к началу координат по различным направлениям функция имеет различные предельные значения и, следовательно, не имеет предела при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

Определение предела функции n переменных при $n > 2$ будет тождественным определению предела функции двух переменных, если ввести понятие δ -окрестности точки P_0 пространства n измерений. Назовем *расстоянием* между двумя точками $P(x; y; z; \dots; t)$ и $P_0(x_0; y_0; z_0; \dots; t_0)$ в пространстве n измерений выражение, равное $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + \dots + (t - t_0)^2}$. Очевидно, что при $n = 2$ и $n = 3$ это выражение совпадает с известными формулами расстояния между двумя точками на плоскости и в пространстве.

О п р е д е л е н и е. δ -окрестностью точки $P_0(x_0; y_0; z_0; \dots; t_0)$ в пространстве n измерений называется множество всех точек $P(x; y; z; \dots; t)$,

расстояние каждой из которых от точки $P_0(x_0; y_0; z_0; \dots; t_0)$ меньше δ :

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + \dots + (t-t_0)^2} < \delta.$$

Очевидно, что в пространстве трех измерений $Oxyz$ ($n=3$) δ -окрестностью точки $P_0(x_0; y_0; z_0)$ будет множество всех внутренних точек шара с центром в точке P_0 и радиусом δ .

Для функций нескольких переменных остаются справедливыми правила предельного перехода, установленные для функций одной переменной (см. гл. V, § 1, п. 6).

2. Непрерывность функции нескольких переменных

Понятие непрерывности функции нескольких переменных устанавливается с помощью понятия предела.

Определение. Функция нескольких переменных $u=f(P)$ называется непрерывной в точке P_0 , если

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0). \quad (6)$$

Заметим, что функция $f(P)$, непрерывная в точке P_0 , должна быть определена в этой точке и некоторой ее окрестности (иначе нельзя было бы осуществить переход к пределу). Точка P_0 , в которой функция нескольких переменных $u=f(P)$ непрерывна, называется *точкой непрерывности* этой функции.

Для непрерывных функций справедлива следующая теорема.

Теорема. Если функции n переменных $f_1(P)$ и $f_2(P)$ непрерывны в точке P_0 , то в той же точке будут непрерывными и их сумма $f_1(P) + f_2(P)$, разность $f_1(P) - f_2(P)$ и произведение $f_1(P) \cdot f_2(P)$; если, кроме того, $f_2(P_0) \neq 0$, то частное $\frac{f_1(P)}{f_2(P)}$ также непрерывно в точке P_0 .

Доказательство этой теоремы мы опускаем, так как оно аналогично доказательству соответствующей теоремы для функций одной переменной (см. гл. V, § 2, п. 2).

На основании приведенной теоремы легко установить непрерывность многих функций, например непрерывность многочлена относительно двух независимых переменных в любой точке плоскости Oxy , непрерывность рациональной функции во всех точках плоскости, в которых знаменатель не обращается в нуль.

3. Понятие области

Введем некоторые определения, которые понадобятся в дальнейшем.

Определение. Областью (открытой областью) называется множество точек плоскости, обладающее следующими двумя свойствами:

1) каждая точка области принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью этой точки (свойство открытости);

2) всякие две точки области можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в этой области (свойство связности).

Часть плоскости, лежащая внутри замкнутого контура L (рис. 216), является областью, так как: 1) для любой точки P , лежащей внутри L , существует окрестность, также лежащая внутри L ; 2) две любые точки P и Q , лежащие внутри L , можно соединить непрерывной кривой, лежащей внутри L .

Области определения функций в примерах 1 и 3 п. 1 являются открытыми областями. Вся плоскость, очевидно, также является открытой областью.

Точка P_0 называется *граничной точкой* области G , если любая окрестность этой точки содержит как точки области G , так и точки, ей не принадлежащие.

Множество всех граничных точек области называется ее *границей*.

На рис. 216 любая точка P_0 контура L , очевидно, является граничной.

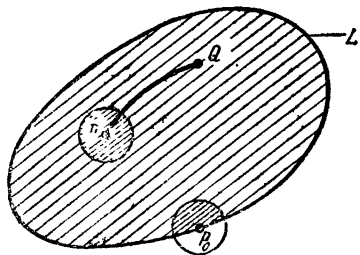


Рис. 216

Границу области на рис. 211 составляют неотрицательные части осей Ox и Oy .

Если к открытой области присоединить ее границу, то полученное множество точек называется *замкнутой областью*.

Области определения функций в примерах 2 и 4 (см. рис. 212 и 213) являются замкнутыми.

Если для данной области можно подобрать круг, полностью ее покрывающий, т. е. такой, внутри которого

лежат все точки области, то такая область называется *ограниченной*.

Если же круга, полностью покрывающего область, подобрать нельзя, то область называется *неограниченной*. Ограниченными областями являются области определения функций, рассмотренные в примерах 2, 3 и 4 § 1 п. 1 (см. рис. 212, 213). Напротив, область определения функции в примере 1 — неограниченная область. Область G (открытая или замкнутая) называется *односвязной*, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит области G . Области, изображенные на рис. 211, 212, являются, очевидно, односвязными. Напротив, область, заключенная между окружностями $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 4$ (см. рис. 213), не является односвязной, так как, например, окружность $x^2 + y^2 = 3$, лежащая в этой области, содержит внутри себя точки, не принадлежащие области (например, начало координат).

З а м е ч а н и е. Все введенные в этом пункте понятия почти без изменений переносятся на пространство трех и большего числа измерений.

4. Точки разрыва

При изучении функций иногда приходится рассматривать их точки разрыва.

Определение. Точка P_0 называется *точкой разрыва функции* $f(P)$, если она принадлежит области определения этой функции или ее границе и не является точкой непрерывности.

Пример 1. Функция $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$, очевидно, имеет единственную точку разрыва — начало координат $O(0; 0)$, в которой она не определена. При неограниченном приближении точки $P(x; y)$ к началу координат функция $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ стремится к бесконечности (рис. 217).

Пример 2. Найти точки разрыва функции $z = \frac{1}{2x + y + 1}$.

Решение. Функция определена и непрерывна всюду, кроме тех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $2x + y + 1 = 0$. Это — уравнение прямой, являющейся границей области определения функции. Каждая точка этой прямой есть точка разрыва. Таким образом, точки разрыва образуют целую прямую — линию разрыва данной функции

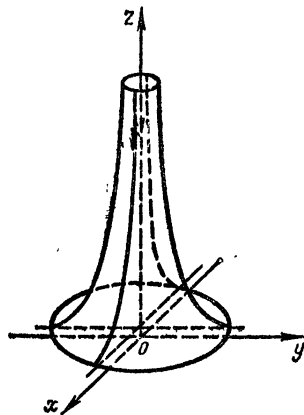


Рис. 217

5. Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области

В гл. V, § 2, п. 3 были рассмотрены свойства функций, непрерывных на сегменте. Этими же свойствами обладают функции двух и большего числа переменных, непрерывные в ограниченной замкнутой области.

Определение. Функция $z = f(x, y) = f(P)$ называется непрерывной в открытой или замкнутой области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

При этом функция $f(P)$ считается непрерывной в граничной точке P_0 , если в равенстве $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$ точка P стремится к точке P_0 вдоль любого пути, принадлежащего данной области.

Теорема. Если функция $z = f(P)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она в этой области:

- 1) ограничена: $|f(P)| < N$;
- 2) имеет наименьшее m и наибольшее M значения;
- 3) принимает хотя бы в одной точке области любое численное значение, заключенное между m и M .

Эту теорему мы оставляем без доказательства.

Так, например, функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, которая определена и непрерывна, очевидно, в ограниченной замкнутой области

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

(круг с центром в начале координат и радиусом, равным единице), обладает указанными в теореме свойствами

- 1) $|z| \leq 1$;

2) наименьшее значение функции $m=0$ достигается на границе области определения функции, т. е. в точках окружности $x^2 + y^2 = 1$; наибольшее значение $M=1$ — в начале координат $O(0; 0)$;

3) любое число, заключенное между нулем и единицей (между m и M), является некоторым значением функции.

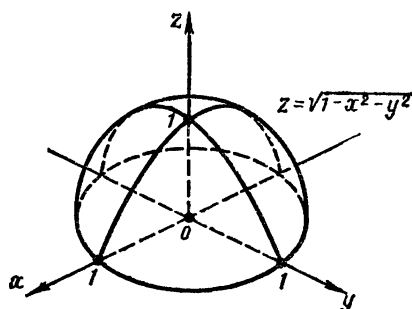


Рис. 218

Графиком функции, очевидно, является верхняя полусфера с центром в начале координат и радиусом, равным единице (рис. 218).

§ 3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

1. Частные производные первого порядка

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Зафиксируем один из ее аргументов, например y , положив $y = y_0$. Тогда функция $f(x, y_0)$ будет функцией одной переменной x . Пусть она имеет производную в точке x_0 :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}. \quad (6)$$

Эта производная называется *частной производной* (или *частной производной первого порядка*) функции $z = f(x, y)$ по x в точке $P_0(x_0; y_0)$ и обозначается символом

$$f'_x(x_0, y_0).$$

Разность $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ называется *частным приращением по x* функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ и обозначается символом $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0). \quad (7)$$

Учитывая эти обозначения, можно записать

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}. \quad (8)$$

Аналогично определяются и обозначаются частное приращение функции $z = f(x, y)$ по y и частная производная по y в точке

$P_0(x_0; y_0)$:

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0), \quad (9)$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции двух переменных по одному из ее аргументов равна пределу отношения частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Значение частной производной зависит от точки $P(x; y)$, в которой она вычисляется. Поэтому частная производная функции двух переменных $z = f(x, y)$, вообще говоря, есть функция точки $P(x; y)$, т. е. также является функцией двух переменных x и y .

Частные производные, рассматриваемые как функции двух переменных, обозначаются следующим образом:

$$f'_x(x, y), f'_y(x, y) \text{ или } z'_x, z'_y \text{ или } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} *.$$

Частные приращения и частные производные функции n переменных при $n > 2$ определяются и обозначаются аналогично. Например, для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ частное приращение по x в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$ получится, если x получит приращение Δx , а остальные аргументы останутся неизменными:

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0). \quad (10)$$

Частная производная функции $u = f(x, y, z)$ по аргументу x в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$ будет равна

$$u'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}. \quad (11)$$

Таким образом, частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных. Вследствие этого все правила и формулы дифференцирования, выведенные для производных функции одной переменной, сохраняются для частных производных функции нескольких переменных. Следует лишь помнить, что во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

Пример 1. Найти частные производные функции $z = f(x, y) = x^2 y - 3y^2 + 5x$.

Решение. Частную производную $f'_x(x, y)$ находим как производную функции $f(x, y)$ по аргументу x в предположении, что $y = \text{const}$. Поэтому

$$f'_x(x, y) = (x^2 y - 3y^2 + 5x)'_x = 2xy - 0 + 5 = 2xy + 5.$$

* Заметим, что в отличие от производной функции одной переменной выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ нельзя рассматривать как дроби. Эти выражения являются символами, обозначающими частные производные.

Аналогично

$$f'_y(x, y) = (x^2y - 3y^3 + 5x)'_y = x^2 - 6y + 0 = x^2 - 6y.$$

Пример 2. $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$. Найти $f'_x(3; 4)$.

Решение. Находим сначала частную производную функции $f(x, y)$ по x :

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= (x + y - \sqrt{x^2 + y^2})'_x = (x + y)'_x - (\sqrt{x^2 + y^2})'_x = \\ &= 1 + 0 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x^2 + y^2)'_x = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Теперь вычислим частное значение найденной частной производной при $x = 3$, $y = 4$:

$$f'_x(3, 4) = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \Big|_{\substack{x=3 \\ y=4}} = 1 - \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}.$$

Пример 3. Пусть на оси Ox расположен стержень. Температура θ в произвольной точке $M(x)$ стержня является функцией координаты x точки $M(x)$ и времени t : $\theta = f(x, t)$. При $x = x_0$ функция $\theta = f(x_0, t)$ представляет изменение температуры в данной точке стержня в зависимости от времени t . Частная производная $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ в этой точке дает скорость изменения температуры со временем. Если теперь положить $t = t_0$, то функция $\theta = f(x, t_0)$ дает закон распределения температуры вдоль стержня в данный момент времени t_0 . В этом случае частная производная $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ представляет собой скорость изменения температуры вдоль стержня в данный момент времени t_0 .

2. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Выясним геометрический смысл частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции двух переменных $z = f(x, y)$. Как известно, графиком функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность. Рассмотрим точку $P_0(x_0; y_0; z_0)$ в плоскости Oxy и соответствующую точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на поверхности (рис. 219). Сделаем параллельный перенос осей с новым началом в точке $O_1(0; y_0; 0)$ и рассмотрим плоскую кривую AM_0B , которая получится при сечении поверхности новой координатной плоскостью O_1XZ (т. е. плоскостью $y = y_0$ в старой системе координат). Эту кривую можно рассматривать как график функции одной переменной $z = f(x, y_0)$ в плоскости O_1XZ (т. е. в плоскости $y = y_0$ в старой системе). Но тогда, согласно геометрическому смыслу производной функции одной переменной, $\frac{df(x, y_0)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол с осью O_1X , или, что то же, с осью Ox касательной, проведенной к кривой AM_0B в точке M_0 . С другой стороны,

$$\frac{df(x, y_0)}{dx} \Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0}.$$

Отсюда следует, что $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} = \operatorname{tg} \alpha$. Итак, значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ равно тангенсу угла, составленного с осью Ox касательной, проведенной в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$. В этом заключается геометрический смысл частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$. Аналогично выясняется геометрический смысл частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. Частные производные высших порядков

Частные производные функции нескольких переменных являются функциями тех же переменных. Эти функции, в свою очередь, могут иметь частные производные, которые мы будем называть *вторыми частными производными* (или *частными производными второго порядка*) исходной функции.

Так, например, функция $z = f(x, y)$ двух переменных имеет четыре частных производных второго порядка, которые определяются и обозначаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); & \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \\ \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); & \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y). \end{aligned}$$

Функция $u = f(x, y, z)$ трех переменных имеет девять частных производных второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y, z); & \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y, z); \\ & & \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = f''_{xz}(x, y, z) \end{aligned}$$

и т. д.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и более высокого порядка функции нескольких переменных: *частной производной n -го порядка функции нескольких пере-*

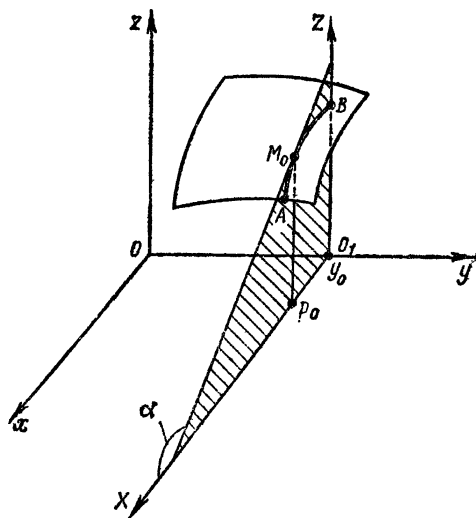


Рис. 219

менных называется частная производная первого порядка от частной производной $(n-1)$ -го порядка той же функции.

Например, частная производная третьего порядка $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ функции $z = f(x, y)$ есть частная производная первого порядка по y от частной производной второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)}{\partial y}.$$

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется *смешанной частной производной*.

Например, частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$$

являются смешанными частными производными функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Пример. Найти смешанные частные производные второго порядка функции $z = x^2 y^3$.

Решение. Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

Затем находим смешанные частные производные второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} = (2xy^3)'_y = 6xy^2, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} = (3x^2 y^2)'_x = 6xy^2. \end{aligned}$$

Мы видим, что смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, отличающиеся между собой лишь порядком дифференцирования, т. е. последовательностью, в которой производится дифференцирование по различным переменным, оказались тождественно равными. Этот результат не случаен. Относительно смешанных частных производных имеет место следующая теорема, которую мы принимаем без доказательства.

Теорема. Две смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

§ 4. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Полное приращение функции

При нахождении частных производных рассматривались частные приращения функции нескольких переменных, когда лишь один из аргументов изменялся, остальные же оставались фиксированными (постоянными). Теперь мы рассмотрим полное приращение, которое получает функция при изменении всех ее аргументов.

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Предположим, что ее аргументы x и y получают соответственно приращения Δx и Δy . Тогда функция $z = f(x, y)$ получает полное приращение Δz , которое определяется следующей формулой:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (12)$$

Геометрически полное приращение функции Δz равно приращению аппликаты графика функции $z = f(x, y)$ при переходе из точки $P(x, y)$ в точку $P_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ (рис. 220).

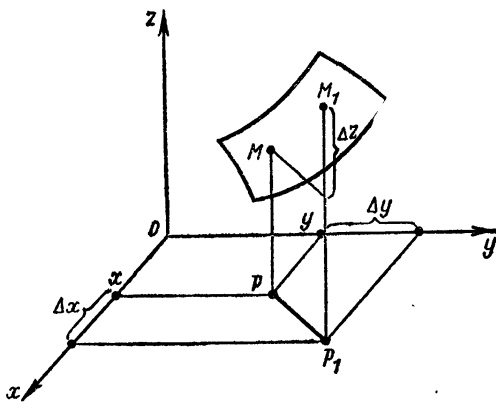


Рис. 220

Пример. Найти полное приращение функции $z = xy^2$ при условии, что x имеет приращение Δx , а y — приращение Δy .

Решение. Применяя формулу (12), получим

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y)^2 - xy^2 = xy^2 + y^2\Delta x + 2xy\Delta y + 2y\Delta x\Delta y + x(\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2 - xy^2 = y^2\Delta x + 2xy\Delta y + 2y\Delta x\Delta y + x(\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2.$$

Мы видим, что полное приращение Δz данной функции можно представить в виде суммы двух слагаемых: первого слагаемого $y^2\Delta x + 2xy\Delta y$, линейного относительно приращений аргументов Δx и Δy , и второго слагаемого $2y\Delta x\Delta y + x(\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2$, не линейного относительно Δx и Δy . Оба эти слагаемые, очевидно, стремятся к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$. Однако второе слагаемое при этом стремится к нулю быстрее, чем первое. Это наглядно видно из следующей таблицы, в которой приведены значения полного приращения данной функции Δz в точке $P_0(1; 1)$, а также значения его линейной части $\Delta x + 2\Delta y$ и нелинейной части $2\Delta x\Delta y + (\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2$ для различных значений Δx и Δy :

Δx	Δy	Δz	Линейная часть $\Delta x + 2\Delta y$	Нелинейная часть $2\Delta x\Delta y + (\Delta y)^2 + \Delta x(\Delta y)^2$
0,1	0,1	0,331	0,3	0,031
0,01	0,02	0,050804	0,05	0,000804
0,001	0,01	0,0211201	0,021	0,0001201

2. Полный дифференциал функции

В предыдущем пункте мы рассмотрели пример, в котором приращение функции двух переменных было представлено в виде суммы двух слагаемых, линейного относительно Δx и Δy и нелинейного, причем при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ нелинейная часть приращения стремилась к нулю быстрее, чем линейная. Подобным свойством обладают многие функции. Эти функции называются дифференцируемыми.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $P(x, y)$, если ее полное приращение Δz можно представить в следующем виде:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y), \quad (13)$$

где Δx и Δy — любые приращения соответствующих аргументов x и y в некоторой окрестности точки P ; A и B — постоянные (т. е. величины, не зависящие от Δx и Δy); $\omega(\Delta x, \Delta y)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем расстояние $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ между точками $P(x, y)$ и $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ (т. е. $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0$).

Таким образом, если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в данной точке, то согласно формуле (13), ее полное приращение в этой точке состоит из двух частей: главной части приращения $A\Delta x + B\Delta y$, линейной относительно Δx и Δy , и нелинейной части $\omega(\Delta x, \Delta y)$, более высокого порядка малости, чем главная часть приращения.

Определение. Главная часть приращения функции $z = f(x, y)$, линейная относительно Δx и Δy , называется полным дифференциалом этой функции и обозначается символом dz или $df(x, y)$.

Таким образом,

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \quad (14)$$

В выражении для дифференциала $A\Delta x + B\Delta y$ величины A и B не зависят от Δx и Δy , но зависят от точки $P(x, y)$, в которой этот дифференциал рассматривается. Иными словами, A и B являются функциями x и y . Вид этих функций устанавливается следующей теоремой.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ в точке $P(x, y)$ дифференцируема (т. е. имеет дифференциал $A\Delta x + B\Delta y$), то она имеет в точке $P(x, y)$ первые частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Доказательство. Так как по условию теоремы данная функция в точке $P(x, y)$ дифференцируема, то ее полное приращение Δz в этой точке выражается по формуле (13). Эта формула справедлива для любых достаточно малых Δx и Δy . В частности, она остается справедливой, если $\Delta y = 0$, а $\Delta x \neq 0$. Но тогда приращение функции Δz становится частным приращением $\Delta_{x,z}$, и фор-

мула (13) будет иметь следующий вид:

$$\Delta_x z = A \Delta x + \omega.$$

Разделив обе части этого равенства на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta x}.$$

Покажем, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta x} = 0$. В самом деле, так как $\Delta y = 0$, то $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |\Delta x|$. Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta x} = \pm \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \frac{\omega}{|\Delta x|} = \pm \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0.$$

Таким образом, предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ существует и равен A . Но $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$ и поэтому частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $P(x; y)$ существует и равна A . Аналогично можно показать, что частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $P(x; y)$ существует и равна B .

Заменяя теперь в формулах (13) и (14) A и B частными производными $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, получим

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y), \quad (15)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (16)$$

Можно показать, что обратная теорема, вообще говоря, неверна, т. е. из существования частных производных не следует существование полного дифференциала. Однако если предположить, что частные производные не только существуют, но и непрерывны, то функция будет дифференцируемой. Иными словами, имеет место следующая теорема, доказательства которой мы не приводим.

Теорема. Если частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$ непрерывны в окрестности точки $P(x, y)$, то эта функция в точке $P(x, y)$ дифференцируема.

Как и в случае функции одной переменной, для приращений независимых переменных введем следующие обозначения:

$$\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy.$$

Тогда выражение для дифференциала примет следующий вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad (17)$$

или

$$dz = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy. \quad (18)$$

Все сказанное легко распространяется на функции трех и большего числа переменных. Так, например, для дифференцируемой функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ полное приращение Δu выражается формулой

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \omega(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \quad (19)$$

при условии

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0 \quad (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}),$$

а ее полный дифференциал имеет вид

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (20)$$

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $z = xy^2$ в произвольной точке.

Решение. Полный дифференциал $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ существует при условии непрерывности частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (xy^2)'_x = y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (xy^2)'_y = 2xy.$$

Мы видим, что найденные частные производные являются непрерывными функциями во всей плоскости Oxy . Поэтому дифференциал этой функции всюду существует, причем

$$dz = y^2 dx + 2xy dy.$$

Пример 2. Найти значение полного дифференциала функции

$$u = \frac{x+y}{z} \quad \text{при } x=1; y=-2; z=-1; \Delta x=0,1; \Delta y=0,2; \Delta z=0,5.$$

Решение. Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{x+y}{z}\right)'_x = \frac{1}{z}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{x+y}{z}\right)'_y = \frac{1}{z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x+y}{z}\right)'_z = -\frac{x+y}{z^2},$$

а затем и полный дифференциал

$$du = \frac{1}{z} \Delta x + \frac{1}{z} \Delta y - \frac{x+y}{z^2} \Delta z.$$

Теперь находим значение этого полного дифференциала при $x=1; y=-2; z=-1; \Delta x=0,1; \Delta y=0,2; \Delta z=0,5$:

$$du = \frac{1}{-1} \cdot 0,1 + \frac{1}{-1} \cdot 0,2 - \frac{1-2}{(-1)^2} \cdot 0,5 = 0,2.$$

3. Приложение полного дифференциала к приближенным вычислениям

I. Полным дифференциалом функции нескольких переменных можно пользоваться для приближенных вычислений. Пусть дана дифференцируемая функция $z = f(x, y)$. Ее полное приращение выражается формулой

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y).$$

Здесь $\omega(\Delta x, \Delta y)$ стремится к нулю быстрее, чем $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Поэтому при малых ρ , т. е. при малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$, слагаемым $\omega(\Delta x, \Delta y)$ можно пренебречь и писать:

$$\Delta z \approx f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y, \quad (21)$$

т. е. приращение функции приближенно можно заменить ее полным дифференциалом.

Так как $z = f(x, y)$, то

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Подставляя это выражение для Δz в формулу (21), получим

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y,$$

откуда

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y. \quad (22)$$

Формулой (22) можно пользоваться для приближенных вычислений значений функции двух переменных в точке $P(x + \Delta x; y + \Delta y)$, близкой к точке $P(x; y)$, если известны значения функции и ее частных производных в самой точке $P(x; y)$.

Аналогичные формулы можно вывести для функции n переменных при $n > 2$. Например, при $n = 3$ получим

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + f'_x(x, y, z) \Delta x + f'_y(x, y, z) \Delta y + f'_z(x, y, z) \Delta z. \quad (23)$$

Пример 1. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $\operatorname{arctg} \left(\frac{1,97}{1,02} - 1 \right)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} - 1 \right)$. Применяя формулу (22) к этой функции, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \left(\frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - 1 \right) &\approx \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} - 1 \right) + \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} - 1 \right) \right]'_x \Delta x + \\ &+ \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} - 1 \right) \right]'_y \Delta y, \end{aligned}$$

или

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - 1 \right) \approx \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} - 1 \right) + \frac{y}{y^2 + (x - y)^2} \Delta x - \frac{x}{y^2 + (x - y)^2} \Delta y.$$

Положим теперь $x=2$, $y=1$; тогда $\Delta x=-0,03$, $\Delta y=0,02$. Следовательно,

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{2-0,03}{1+0,02} - 1 \right) \approx \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{1} - 1 \right) + \frac{1}{1^2 + (2-1)^2} (-0,03) - \frac{2}{1^2 + (2-1)^2} \cdot 0,02,$$

или

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{1,97}{1,02} - 1 \right) \approx \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,03 - 0,02 = \frac{\pi}{4} - 0,015 - 0,02 \approx 0,75.$$

Пример 2. Центральный угол кругового сектора, равный 80° , желают уменьшить на $15'$. Насколько надо удлинить радиус $r=30$ см, для того чтобы компенсировать изменение площади?

Решение. Площадь S кругового сектора выражается формулой

$$S = \frac{\pi r^2 \varphi}{360},$$

где r — радиус круга, а φ — центральный угол в градусах.

Если изменение (приращение) площади ΔS заменить (приближенно) полным дифференциалом, то

$$\Delta S \approx \frac{\partial S}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \Delta \varphi.$$

По условию, при уменьшении центрального угла и увеличении радиуса ΔS должно равняться нулю. Поэтому полагаем

$$\frac{\partial S}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \Delta \varphi = 0,$$

откуда

$$\Delta r = - \frac{\frac{\partial S}{\partial \varphi} \Delta \varphi}{\frac{\partial S}{\partial r}} = - \frac{\left(\frac{\pi r^2 \varphi}{360} \right)'_{\varphi} \cdot \Delta \varphi}{\left(\frac{\pi r^2 \varphi}{360} \right)'_r} = - \frac{\frac{\pi r^2}{360} \cdot \Delta \varphi}{\frac{\pi r \varphi}{180}} = - \frac{r \cdot \Delta \varphi}{2 \varphi}.$$

Положив $r=30$ см, $\varphi=80^\circ$; $\Delta \varphi = -\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$,

получим

$$\Delta r = - \frac{30 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)}{2 \cdot 80} \text{ см} = \frac{3}{64} \text{ см} \approx 0,5 \text{ мм}.$$

Замечание. Можно показать, что ошибка, получающаяся при применении приближенной формулы (22), не превосходит числа

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{2} M (|\Delta x| + |\Delta y|)^2,$$

где M — наибольшее значение абсолютных величин вторых частных производных $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yy}(x, y)$ при изменении аргументов соответственно от x до $x+\Delta x$ и от y до $y+\Delta y$.

II. Покажем, как применяется дифференциал функции нескольких переменных к нахождению границ абсолютной и относительной погрешностей в приближенных вычислениях (см. гл. VI, § 3, п. 5).

Пусть величина u является дифференцируемой и положительной функцией трех (для определенности) переменных x , y и z :

$$u = f(x, y, z). \quad (24)$$

Предположим, что точные значения x , y , z ее аргументов неизвестны, но зато известны их приближенные значения x_0 , y_0 , z_0 , и границы абсолютных погрешностей $\bar{\Delta}_x$, $\bar{\Delta}_y$, $\bar{\Delta}_z$. Как найти границы абсолютной и относительной погрешностей функции u , вычисляемой по формуле (24)?

Введя обозначения $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, $z - z_0 = \Delta z$, согласно определению границы абсолютной погрешностей, получим

$$|\Delta x| \leq \bar{\Delta}_x, \quad |\Delta y| \leq \bar{\Delta}_y, \quad |\Delta z| \leq \bar{\Delta}_z. \quad (25)$$

Абсолютная погрешность функции u равна, очевидно, модулю ее приращения $\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)$ и приближенно равна модулю полного дифференциала u :

$$|\Delta u| \approx |f'_x(x_0, y_0, z_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \Delta z|.$$

По свойству абсолютных величин

$$|f'_x(x_0, y_0, z_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \Delta z| \leq |f'_x(x_0, y_0, z_0)| \times \\ \times |\Delta x| + |f'_y(x_0, y_0, z_0)| \cdot |\Delta y| + |f'_z(x_0, y_0, z_0)| \cdot |\Delta z|.$$

Поэтому, учитывая формулы (25), получим

$$|\Delta u| \leq |f'_x(x_0, y_0, z_0)| \bar{\Delta}_x + |f'_y(x_0, y_0, z_0)| \bar{\Delta}_y + |f'_z(x_0, y_0, z_0)| \bar{\Delta}_z.$$

Это означает, что число

$$\bar{\Delta}_u = |f'_x(x_0, y_0, z_0)| \bar{\Delta}_x + |f'_y(x_0, y_0, z_0)| \bar{\Delta}_y + |f'_z(x_0, y_0, z_0)| \bar{\Delta}_z \quad (26)$$

можно принять за границу абсолютной погрешности u .

По определению границы относительной погрешности $\bar{\delta}_u$ будем иметь:

$$\bar{\delta}_u = \frac{\bar{\Delta}_u}{|f(x_0, y_0, z_0)|} = \left| \frac{f'_x(x_0, y_0, z_0)}{f(x_0, y_0, z_0)} \right| \bar{\Delta}_x + \left| \frac{f'_y(x_0, y_0, z_0)}{f(x_0, y_0, z_0)} \right| \bar{\Delta}_y + \\ + \left| \frac{f'_z(x_0, y_0, z_0)}{f(x_0, y_0, z_0)} \right| \bar{\Delta}_z.$$

Заметив, что

$$\frac{u'_x}{u} = \frac{\partial \ln u}{\partial x}; \quad \frac{u'_y}{u} = \frac{\partial \ln u}{\partial y}; \quad \frac{u'_z}{u} = \frac{\partial \ln u}{\partial z},$$

получим

$$\bar{\delta}_u = \left| \frac{\partial \ln f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \right| \bar{\Delta}_x + \left| \frac{\partial \ln f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \right| \bar{\Delta}_y + \left| \frac{\partial \ln f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \right| \bar{\Delta}_z.$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, является

границей абсолютной погрешности функции $\ln f(x, y, z) = \ln u$. Поэтому

$$\bar{\delta}_u = \bar{\Delta}_{\ln u}, \quad (27)$$

т. е. за границу относительной погрешности некоторой функции можно принять границу абсолютной погрешности натурального логарифма этой функции.

Рассмотрим пример.

Как известно из физики, период колебания маятника T определяется равенством $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, в котором l — приведенная длина маятника, а g — ускорение силы тяжести. Разрешая это равенство относительно g , получим

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (28)$$

Формулой (28) пользуются для вычисления ускорения силы тяжести в различных точках земной поверхности, измеряя в этих точках приведенную длину маятника l и период его колебания T . Пусть в результате измерений получены следующие приближенные значения для l и T : $l_0 = 50,00$ см; $T_0 = 1,4196$ сек. Предположим также, что известны границы абсолютной погрешности $\bar{\Delta}_l = 0,01$ и $\bar{\Delta}_T = 0,0001$. Требуется вычислить по формуле (28) ускорение силы тяжести g и найти границы абсолютной и относительной погрешностей найденного значения g .

При определении погрешностей следует учесть, что в формуле (28) приходится брать приближенное значение π_0 числа π . Возьмем это число с точностью до 0,0001, т. е. положим $\pi \approx \pi_0 = 3,1416$, $\bar{\Delta}_\pi = 0,0001$. Тогда по формулам (27) и (26) получим

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_g = \bar{\Delta}_{\ln g} &= |(\ln g)'_\pi|_{\substack{\pi=\pi_0 \\ l=l_0 \\ T=T_0}} \cdot \bar{\Delta}_\pi + |(\ln g)'_l|_{\substack{\pi=\pi_0 \\ l=l_0 \\ T=T_0}} \cdot \bar{\Delta}_l + |(\ln g)'_T|_{\substack{\pi=\pi_0 \\ l=l_0 \\ T=T_0}} \cdot \bar{\Delta}_T = \\ &= \frac{2\bar{\Delta}_\pi}{\pi_0} + \frac{\bar{\Delta}_l}{l_0} + \frac{2\bar{\Delta}_T}{T_0} = \frac{2 \cdot 0,0001}{3,1416} + \frac{0,01}{50} + \frac{2 \cdot 0,0001}{1,4196} \approx 0,00040, \end{aligned}$$

т. е. граница относительной погрешности равна 0,040%.

Найдем теперь по формуле (28) приближенное значение g :

$$g_0 = \frac{4 \cdot (3,1416)^2 \cdot 50,00}{(1,4196)^2} = 979,5 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}^2} \right).$$

Так как

$$\bar{\Delta}_g = g_0 \bar{\delta}_g = 979,5 \cdot 0,00040 \approx 0,4 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}^2} \right),$$

то

$$g = 979,5 \pm 0,4 \left(\frac{\text{см}}{\text{сек}^2} \right).$$

В заключение рассмотрим некоторые правила приближенных вычислений, которые мы получим как следствие формул (26) и (27).

Пусть при измерении или вычислении положительных величин x и y получены приближенные значения x_0 и y_0 с границами абсолютных погрешностей соответственно $\bar{\Delta}_x$ и $\bar{\Delta}_y$.

1) Если $z = x + y$, то по формуле (26) получим

$$\bar{\Delta}_z = \bar{\Delta}_x + \bar{\Delta}_y,$$

так как

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Таким образом, *граница абсолютной погрешности суммы равна сумме границ абсолютных погрешностей слагаемых.*

2) Если $z = x - y$, то

$$\bar{\Delta}_z = \bar{\Delta}_x + \bar{\Delta}_y,$$

так как

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1 \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| = 1, \quad \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| = 1.$$

Итак, *граница абсолютной погрешности разности равна сумме границ абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого.*

3) Если $z = xy$, то $\ln z = \ln x + \ln y$ и поэтому

$$\bar{\Delta}_{\ln z} = \frac{\bar{\Delta}_x}{x_0} + \frac{\bar{\Delta}_y}{y_0} = \bar{\delta}_x + \bar{\delta}_y.$$

Применяя формулу (27), получим

$$\bar{\delta}_z = \bar{\delta}_x + \bar{\delta}_y,$$

т. е. *граница относительной погрешности произведения равна сумме границ относительных погрешностей сомножителей.*

4) Если $z = \frac{x}{y}$, то аналогично легко получить

$$\bar{\delta}_z = \bar{\delta}_x + \bar{\delta}_y,$$

т. е. *граница относительной погрешности частного равна сумме границ относительных погрешностей делимого и делителя.*

§ 5. Дифференцирование сложных и неявных функций

1. Дифференцирование сложных функций

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$, причем аргументы этой функции являются функциями одной независимой переменной t : $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда z есть сложная функция одной независимой переменной t . Поставим задачу найти производную этой сложной функции $\frac{dz}{dt}$, зная частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и производные $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$. При решении этой задачи мы будем предполагать, что функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют производные в точке t , а функция двух переменных $z = f(x, y)$ в соответствующей точке $(x; y)$ дифференцируема.

Пусть независимая переменная t получает приращение Δt ; тогда переменные x и y получают соответственно приращения Δx и Δy , а функция z — приращение Δz . Так как функция z по предположению дифференцируема, то ее полное приращение Δz может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y), \quad (29)$$

причем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0, \text{ где } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Разделив обе части равенства (29) на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta t}. * \quad (30)$$

Если каждый из пределов, стоящих в правой части этого равенства, существует, то существует и предел, стоящий в левой части этого равенства, т. е. производная $\frac{\partial z}{\partial t}$. Но $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ и $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$ существуют по предположению.

Найдем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\omega}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho}{\Delta t}.$$

Рассмотрим сначала

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \end{aligned}$$

Этот предел существует, так как существуют производные $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$. Прежде чем находить $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho}$, отметим, что при $\Delta t \rightarrow 0$ также и $\rho \rightarrow 0$ **. Но тогда $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$ и, следовательно, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta t} = 0 \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 0$.

Учитывая это, формулу (30) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (31)$$

* Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ вынесены за знак предела, так как они не зависят от Δt .

** В самом деле, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Но x и y дифференцируемы, а следовательно, и непрерывны. Поэтому $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ (а следовательно, и $\rho \rightarrow 0$), если $\Delta t \rightarrow 0$.

Пример 1. Найти производную $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^y$, $x = \sin t$, $y = t^2$.

Решение. Применяя формулу (31), получим

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= (x^y)'_x \frac{dx}{dt} + (x^y)'_y \frac{dy}{dt} = yx^{y-1} (\sin t)' + x^y \ln x (t^2)' = \\ &= yx^{y-1} \cos t + x^y \ln x \cdot 2t = t^2 (\sin t)^{t^2-1} \cos t + 2t (\sin t)^{t^2} \ln \sin t = \\ &= t (\sin t)^{t^2-1} (t \cos t + 2 \sin t \cdot \ln \sin t).\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь функцию $z = f(x, y)$ при условии, что $y = y(x)$. Здесь переменная z есть функция одной переменной x : $z = f(x, y(x))$. Этот случай сводится к предыдущему, причем роль переменной t играет x . По формуле (31) имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Но $\frac{dx}{dx} = 1$, и поэтому

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (32)$$

В правой и левой частях этой формулы имеются производные z по x . Одна из них $\frac{\partial z}{\partial x}$ — частная производная функции двух переменных $z = f(x, y)$, которая находится так, как если бы y не зависел от x . В отличие от нее производная $\frac{dz}{dx}$, стоящая в левой части формулы (32), есть производная сложной функции одной переменной $z = f(x, y, (x))$. Эту производную мы будем называть *полной производной*.

Предположим теперь, что $z = f(x, y)$, причем $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$. Тогда z будет сложной функцией двух независимых переменных u и v . Найдем частные производные этой сложной функции $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$ и $\frac{\partial y}{\partial u}$ находятся так, как если бы z , x и y были функциями одной переменной u . Но тогда можно пользоваться формулой (31), заменив в ней производные $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ соответствующими частными производными: $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$ и $\frac{\partial y}{\partial u}$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}. \quad (33)$$

Аналогично можно получить выражение для $\frac{\partial z}{\partial v}$:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (33')$$

Полученные результаты легко обобщаются на случай сложной функции любого конечного числа аргументов.

В частности, для функции трех переменных $u = F(x, y, z)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, имеем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (34)$$

Пример 2. Убедиться, что функция $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, где $x = u + v$, $y = u - v$, удовлетворяет соотношению:

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{v^2+u^2}.$$

Решение. Находим $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_x (u+v)'_u + \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_y (u-v)'_u = \\ &= \frac{\left(\frac{x}{y} \right)'_x}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot 1 + \frac{\left(\frac{x}{y} \right)'_y}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot 1 = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{y-x}{x^2+y^2}; \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_x (u+v)'_v + \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)'_y (u-v)'_v = \\ &= \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot 1 + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot (-1) = \frac{y+x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{y-x}{x^2+y^2} + \frac{y+x}{x^2+y^2} = \frac{2y}{x^2+y^2} = \\ &= \frac{2(u-v)}{(u+v)^2 + (u-v)^2} = \frac{2(u-v)}{2(u^2+v^2)} = \frac{u-v}{u^2+v^2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

2. Инвариантность формы полного дифференциала

Как известно, для дифференциала функции одной переменной $y = f(x)$ имеет место инвариантность его формы. Это значит, что выражение для дифференциала

$$dy = f'(x) dx$$

остается верным независимо от того, является ли x независимой переменной или функцией некоторой переменной: $x = \varphi(t)$ (см. гл. VI, § 3, п. 4).

Для функции нескольких переменных $u = f(x, y, z, \dots, t)$ справедливо аналогичное утверждение: полный дифференциал функции n переменных $u = f(x, y, z, \dots, t)$ сохраняет свою форму

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \dots + \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

независимо от того, являются ли $x, y, z, \dots, t$ независимыми переменными или функциями других переменных.

Мы ограничимся доказательством этого утверждения только для случая функции двух переменных $z = f(x, y)$. Как известно, если x и y являются независимыми переменными, полный дифференциал имеет следующий вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Покажем, что эта форма дифференциала сохраняется, когда x и y становятся функциями новых переменных: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тогда z является сложной функцией u и v . Дифференциал этой сложной функции выражается формулой

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Но по формулам (33) и (34)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} dv = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = dx, \quad \text{а} \quad \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = dy.$$

Следовательно, полный дифференциал dz не изменяет своей формы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

когда x и y становятся функциями других переменных.

3. Дифференцирование неявных функций

Как известно, неявная функция y аргумента x задается уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{35}$$

не разрешенным относительно y (см. гл. VI, § 1, п. 15).

Мы знаем, что не всякое уравнение, связывающее x и y , определяет неявную функцию. Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

не определяет функции y (мы имеем в виду только действительные значения переменных).

Каким же условиям должно удовлетворять уравнение

$$F(x, y) = 0,$$

чтобы оно определяло неявную функцию y ? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема существования неявной функции. Если функция $F(x, y)$ и ее частные производные $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$ и при этом $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение

$$F(x, y) = 0$$

определяет в некоторой окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$ единственную неявную функцию $y = y(x)$, непрерывную и дифференцируемую в некотором интервале, содержащем точку x_0 , причем $y(x_0) = y_0$.

Эту теорему мы оставляем без доказательства.

Пусть левая часть уравнения (35) удовлетворяет указанным в теореме условиям. Тогда это уравнение определяет неявную функцию $y = y(x)$, для которой в окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$ имеет место тождество

$$F(x, y(x)) \equiv 0$$

относительно x .

Так как производная функции, тождественно равной нулю, также равна нулю, то полная производная

$$\frac{dF}{dx} = 0.$$

Но по формуле (32)

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx},$$

и поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (36)$$

По этой формуле находится производная неявной функции (одной переменной).

Пример 1. Найти производную неявной функции y , заданной уравнением

$$x^3 - 2x + 3y^2 + xy - 1 = 0.$$

Решение. Введем обозначение $F(x, y) = x^3 - 2x + 3y^2 + xy - 1$. Тогда $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2 + y$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 6y + x$. Следовательно, по формуле (36)

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = - \frac{3x^2 + y - 2}{x + 6y}.$$

В частности, в точке $P_1(2; -1)$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=2 \\ y=-1}} = -\frac{2 \cdot 2 - 1 - 2}{2 + 6(-1)} = \frac{1}{4}.$$

Пример 2. Найти уравнения касательной и нормали к кривой

$$x^2y + e^{xy^2} - y = 0$$

в точке $P_0(0; 1)$.

Решение. Находим частные производные первого порядка функции $F(x, y) = x^2y + e^{xy^2} - y$ и их значения в точке $P_0(0; 1)$:

$$F'_x(x, y) = 2xy + y^2e^{xy^2}; \quad F'_y(x, y) = x^2 + 2xye^{xy^2} - 1; \quad F'_x(0, 1) = 1; \\ F'_y(0, 1) = -1.$$

Пользуясь формулой (36), вычисляем угловой коэффициент касательной

$$k_{\text{кас}} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -\frac{F'_x(0, 1)}{F'_y(0, 1)} = -\frac{1}{-1} = 1,$$

а затем угловой коэффициент нормали $k_n = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -1$.

Теперь находим уравнение касательной

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 0), \quad \text{или} \quad x - y + 1 = 0,$$

и уравнение нормали

$$y - 1 = -1(x - 0), \quad \text{или} \quad x + y - 1 = 0.$$

§ 6. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

1. Скалярное поле и его геометрическое изображение

Определение. Скалярным полем называется часть пространства (или все пространство), каждой точке P которой соответствует численное значение некоторой скалярной величины u .

Например, неоднородное тело, каждой точке которого соответствует определенное значение плотности, можно рассматривать как скалярное поле. Другими примерами скалярных полей являются поле распределения температуры в данном теле, поле распределения электрического потенциала и т. д. Во всех случаях мы будем предполагать, что скалярная величина u не зависит от времени, а зависит только от положения точки P в пространстве. Иными словами, величина u рассматривается как функция точки P : $u = F(P)$. Эта функция называется *функцией поля*. Если в пространстве ввести систему координат $Oxyz$, то точка P в этой системе будет иметь определенные координаты x , y и z , и скалярная величина u станет функцией этих координат:

$$u = F(P) = F(x, y, z).$$

Обратно, всякая функция трех переменных $u = F(x, y, z)$ задает некоторое скалярное поле.

Скалярные поля часто изображаются геометрически с помощью так называемых поверхностей уровня.

Определение. Поверхностью уровня (или эквипотенциальной поверхностью) скалярного поля называется геометрическое место точек пространства, в которых функция поля $u = F(x, y, z)$ имеет одно и то же значение C .

Уравнение поверхности уровня имеет вид

$$F(x, y, z) = C.$$

Придавая C различные значения, получим семейство поверхностей уровня.

Например, если поле задано функцией $u = x^2 + y^2 + z^2$, то поверхностями уровня будут сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = C$$

с центром в начале координат.

Если скалярным полем является поле распределения температуры в некоторой части пространства, то поверхностями уровня этого поля будут так называемые изотермические поверхности, т. е. поверхности, на каждой из которых температура постоянна.

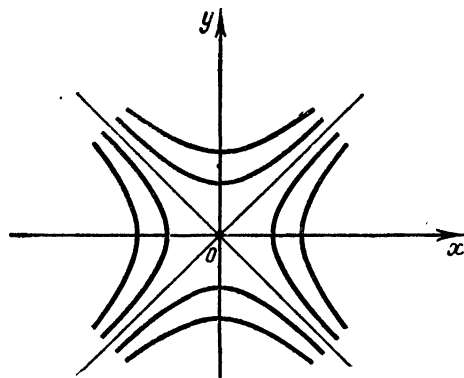


Рис. 221

Наряду со скалярными полями в пространстве рассматриваются также *плоские скалярные поля*. Плоское скалярное поле определяется как часть плоскости (или вся плоскость), каждой точке P которой соответствует численное значение скалярной величины z . Функция плоского скалярного поля зависит от двух переменных: $z = f(x, y)$.

Плоские скалярные поля изображаются геометрически с помощью *линий уровня*. Линия уровня определяется как геометрическое место точек плоскости, в которых функция плоского скалярного поля имеет одно и то же значение. Для функции $z = f(x, y)$ плоского скалярного поля уравнение линии уровня имеет следующий вид:

$$f(x, y) = C,$$

где C — постоянная.

Например, для плоского скалярного поля, заданного функцией $z = x^2 - y^2$, линиями уровня являются равносторонние гиперболы $x^2 - y^2 = C$ (рис. 221). При $C = 0$ получим $x^2 - y^2 = 0$, или $(x - y)(x + y) = 0$. Это значит, что асимптоты гипербол $x - y = 0$ и $x + y = 0$ (биссектрисы координатных углов) также относятся к числу линий уровня рассматриваемого поля.

2. Производная по направлению

Пусть задана дифференцируемая функция скалярного поля $u = F(x, y, z)$. Рассмотрим точку $P(x, y, z)$ этого поля и луч l , выходящий из точки P в направлении единичного вектора

$$l = \cos \alpha \cdot i + \cos \beta \cdot j + \cos \gamma \cdot k,$$

где α , β и γ — углы вектора l с осями координат.

Пусть $P_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$ — какая-нибудь другая точка этого луча. Разность значений функции u скалярного поля в точках P_1 и P назовем *приращением этой функции в направлении l* и обозначим через $\Delta_l u$. Тогда

$$\Delta_l u = F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z).$$

Обозначим также через Δl расстояние между точками P и P_1 : $\Delta l = PP_1$.

Определение. Производной функции $u = F(x, y, z)$ по направлению l называется предел $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}$.

Производная функции u по направлению l обозначается символом $\frac{\partial u}{\partial l}$. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \quad (37)$$

Заметим, что если производная функции u в точке $P(x, y, z)$ по данному направлению l положительна, $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, то функция u в этом направлении возрастает, если же $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$, то функция u в направлении l убывает.

Можно сказать, что производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ дает *скорость изменения функции u в этом направлении*.

Выведем формулу для вычисления производной по направлению. Прежде всего заметим, что приращения Δx , Δy и Δz координат точки P связаны с длиной отрезка $P_1P = \Delta l$ и направляющими косинусами вектора l следующими соотношениями (рис. 222):

$$\Delta x = \Delta l \cos \alpha; \quad \Delta y = \Delta l \cos \beta; \quad \Delta z = \Delta l \cos \gamma. \quad (38)$$

Так как функция u по условию дифференцируема, то ее приращение Δu в точке $P(x, y, z)$ можно представить в следующем виде:

$$\Delta u = F'_x(x, y, z) \Delta x + F'_y(x, y, z) \Delta y + F'_z(x, y, z) \Delta z + \omega, \quad (39)$$

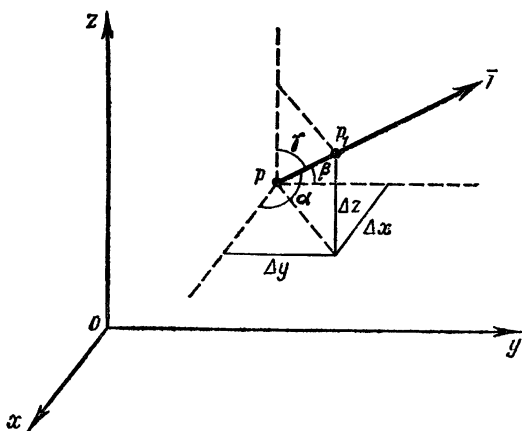


Рис. 222

причем ω стремится к нулю быстрее, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, т. е.
 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$ (см. § 4, п. 2, формула (19)).

Если рассматривать приращение функции вдоль луча в направлении вектора $\mathbf{l}$, то $\Delta u = \Delta_l u$, $\rho = \Delta l$, а Δx , Δy и Δz выражаются по формулам (38). Формула (39), следовательно, примет следующий вид:

$$\Delta_l u = F'_x(x, y, z) \Delta l \cos \alpha + F'_y(x, y, z) \Delta l \cos \beta + F'_z(x, y, z) \Delta l \cos \gamma + \omega.$$

Разделив обе части этого равенства на Δl и переходя к пределу при $\Delta l \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l} &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} [F'_x(x, y, z) \cos \alpha + F'_y(x, y, z) \cos \beta + \\ &+ F'_z(x, y, z) \cos \gamma] + \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta l}. \end{aligned}$$

Но $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ и направляющие косинусы не зависят от Δl , и так как $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\omega}{\Delta l} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = F'_x(x, y, z) \cos \alpha + F'_y(x, y, z) \cos \beta + F'_z(x, y, z) \cos \gamma. \quad (40)$$

Из формулы (40) следует, что если вектор $\mathbf{l}$ совпадает с одним из ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ или $\mathbf{k}$, то производная u по направлению $\mathbf{l}$ совпадает с соответствующей частной производной этой функции. Так, например, если $\mathbf{l} = \mathbf{i}$, то $\cos \alpha = 1$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 0$ и, следовательно, $\frac{\partial u}{\partial l} = F'_x(x, y, z)$.

Пример 1. Найти производную функции $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точке $P_1(1; 2; -1)$ по направлению, идущему от точки P_1 к точке $P_2(2; 4; -3)$.

Решение. Находим вектор $\overline{P_1 P_2} = (2-1)\mathbf{i} + (4-2)\mathbf{j} + (-3+1)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ и соответствующий ему единичный вектор

$$\mathbf{l} = \frac{\overline{P_1 P_2}}{|\overline{P_1 P_2}|} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{l}$ имеет следующие направляющие косинусы: $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; $\cos \beta = \frac{2}{3}$; $\cos \gamma = -\frac{2}{3}$.

Теперь найдем частные производные функции $u = x^2 - 2xz + y^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 - 2xz + y^2)'_x = 2x - 2z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 - 2xz + y^2)'_y = 2y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 - 2xz + y^2)'_z = -2x,$$

и их значения в точке $P_1(1; 2; -1)$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_1} = (2x - 2z) \Big|_{\substack{x=1 \\ z=-1}} = 4; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P_1} = (2y) \Big|_{y=2} = 4; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{P_1} = -2x \Big|_{x=1} = -2.$$

Подставляя в формулу (40) найденные значения частных производных и направляющих косинусов, получим искомую производную:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} + (-2) \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{16}{3}.$$

Если скалярное поле — плоское, то функция поля z , как уже было сказано, зависит от двух переменных: $z = f(x, y)$. Вектор l в этом случае лежит в плоскости Oxy (т. е. $\cos \gamma = 0$) и, следовательно, $l = \cos \alpha \cdot i + \cos \beta \cdot j$, или $l = \cos \alpha \cdot i + \sin \alpha \cdot j$, так как $\cos \beta = \sin \alpha$ (рис. 223). Формула (40) для производной по направлению в случае плоского скалярного поля имеет следующий вид:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = f'_x(x, y) \cos \alpha + f'_y(x, y) \sin \alpha. \quad (41)$$

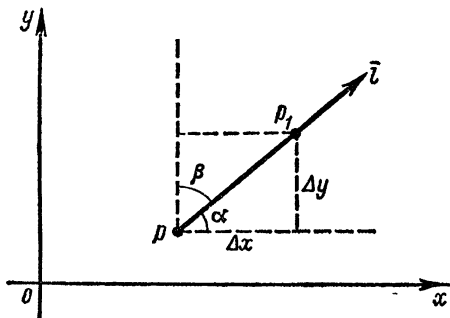


Рис. 223

Пример 2. Найти производную от функции $z = \ln(x + 2y)$ в точке

$P_1\left(1; \frac{1}{2}\right)$, принадлежащей параболе $y = \frac{x^2}{2}$, по направлению касательной к этой параболе.

Решение. Находим частные производные от функции $f(x, y) = \ln(x + 2y)$:

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{x+2y}; \quad f'_y(x, y) = \frac{2}{x+2y}$$

и их значения в точке $P\left(1; \frac{1}{2}\right)$:

$$f'_x\left(1; \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}; \quad f'_y\left(1; \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1+2 \cdot \frac{1}{2}} = 1.$$

Для того чтобы найти $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$, входящие в формулу (41), находим угловой коэффициент касательной в точке $P(1; 2)$:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = y' \Big|_{P_1} = \left(\frac{x^2}{2} \right)' \Big|_{x=1} = x \Big|_{x=1} = 1.$$

Таким образом, $\operatorname{tg} \alpha = 1$, откуда получим два значения α : $\alpha_1 = 45^\circ$ и $\alpha_2 = 225^\circ$, которые соответствуют двум взаимно противоположным направлениям касательной.

При $\alpha_1 = 45^\circ$ имеем $\cos \alpha_1 = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin \alpha = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, по формуле (41)

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

При $\alpha_2 = 225^\circ$ аналогично получим $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

3. Градиент

При изучении скалярных полей наряду с функцией поля $u = F(x, y, z)$ рассматривается некоторый вектор, тесно связанный с этой функцией, — градиент скалярного поля.

Определение. Градиентом в точке $P(x, y, z)$ скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией $u = F(x, y, z)$, называется вектор, равный

$$F'_x(x, y, z)\mathbf{i} + F'_y(x, y, z)\mathbf{j} + F'_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Градиент функции $u = F(x, y, z)$ мы будем обозначать одним из символов

$$\text{grad } F(x, y, z), \text{grad } F(P).$$

По определению

$$\text{grad } F(x, y, z) = F'_x(x, y, z)\mathbf{i} + F'_y(x, y, z)\mathbf{j} + F'_z(x, y, z)\mathbf{k}. \quad (42)$$

Таким образом, каждой точке $P(x, y, z)$ скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией $u = F(x, y, z)$, относятся не только значение этой функции, но и вполне определенный вектор — $\text{grad } F(P)$.

Пример 1. Найти градиент функции $u = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ в точке $P_0(2; -1; 1)$.

Решение. Введя обозначение $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$, найдем $F'_x(x, y, z) = 2x$; $F'_y(x, y, z) = 4y$; $F'_z(x, y, z) = -2z$. Затем, пользуясь формулой (42), получим

$$\begin{aligned} \text{grad } u(P_0) &= F'_x(2; -1; 1)\mathbf{i} + F'_y(2; -1; 1)\mathbf{j} + F'_z(2; -1; 1)\mathbf{k} = \\ &= 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Между градиентом функции $u = F(x, y, z)$ в данной точке и производной по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ в той же точке имеется связь, которая устанавливается следующей теоремой.

Теорема. Проекция вектора $\text{grad } u$ на единичный вектор $\mathbf{l} = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}$ равна производной функции u по направлению $\mathbf{l}$:

$$\text{пр}_l \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial l}. \quad (43)$$

Доказательство. Пусть $u = F(x, y, z)$. Из векторной алгебры известно, что проекция какого-либо вектора на единичный вектор равна скалярному произведению этих векторов (см. гл. III, § 2, п. 8, формула (67)).

Но

$$\text{grad } u = F'_x(x, y, z)\mathbf{i} + F'_y(x, y, z)\mathbf{j} + F'_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \text{пр}_l \text{grad } u &= \text{grad } u \cdot \mathbf{l} = F'_x(x, y, z) \cos \alpha + F'_y(x, y, z) \cos \beta + \\ &+ F'_z(x, y, z) \cos \gamma = \frac{\partial u}{\partial l} \end{aligned}$$

(см. формулу (40)). Теорема доказана.

Учитывая, что производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ выражает скорость изменения скалярного поля $u = F(x, y, z)$ в этом направлении, формулу (43) можно прочесть так: *проекция $\text{grad } u$ на вектор l равна скорости изменения поля $u = F(x, y, z)$ в направлении вектора l .*

Обозначим через φ угол между единичным вектором l и $\text{grad } u$. Тогда $\text{пр}_l \text{grad } u = |\text{grad } u| \cdot \cos \varphi$. Поэтому, на основании формулы (43),

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cos \varphi. \quad (44)$$

Если направления векторов l и $\text{grad } u$ совпадают ($\varphi = 0$), то производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ имеет, очевидно, наибольшее значение, равное $|\text{grad } u| \cos 0 = |\text{grad } u|$.

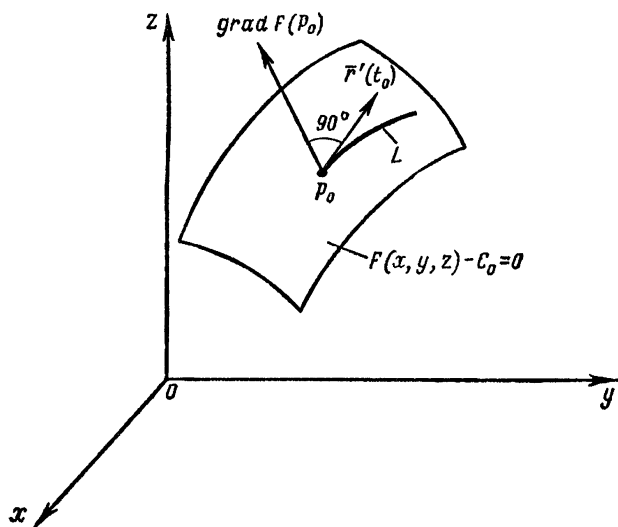


Рис. 224

Таким образом, мы приходим к следующему выводу: *$\text{grad } u$ есть вектор, указывающий направление наибольшего возрастания поля в данной точке и имеющий модуль, равный скорости этого возрастания.*

Отсюда следует, что $\text{grad } u$ функции скалярного поля $u = F(x, y, z)$ определяется самим полем и не зависит от системы координат, в которой рассматривается функция поля.

Выясним взаимное расположение $\text{grad } u = \text{grad } F(x, y, z)$ в данной точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$ и поверхности уровня, проходящей через эту точку. Пусть уравнение этой поверхности имеет вид

$$F(x, y, z) = C_0, \text{ или } F(x, y, z) - C_0 = 0. \quad (45)$$

Рассмотрим кривую L , лежащую на поверхности (45) и проходящую через точку P_0 (рис. 224). Предположим, что эта кривая

задана уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — дифференцируемые функции t , причем $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. Каждая точка кривой L имеет координаты $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, которые должны удовлетворять уравнению (45) поверхности уровня, поскольку кривая L полностью лежит на этой поверхности. Таким образом, должно выполняться тождество

$$F[x(t), y(t), z(t)] - C_0 = 0.$$

Дифференцируя обе части этого тождества по t , получим, применяя формулу (34) (см. § 5, п. 1) и учитывая, что $(C_0)'_t = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} z'(t) = 0.$$

В частности, при $t = t_0$ имеем

$$F'_x(x_0, y_0, z_0) x'(t_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0) y'(t_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0) z'(t_0) = 0. \quad (47)$$

Левая часть этого равенства является скалярным произведением

$\text{grad } u(P_0) = F'_x(x_0, y_0, z_0) \mathbf{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0) \mathbf{j} + F'_z(x_0, y_0, z_0) \mathbf{k}$
и вектора

$$\mathbf{r}'(t_0) = x'(t_0) \mathbf{i} + y'(t_0) \mathbf{j} + z'(t_0) \mathbf{k},$$

направленного по касательной к кривой L (см. гл. VI, § 5, п. 3).

Таким образом,

$$\text{grad } u(P_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \quad (48)$$

Предположим, что $\text{grad } u(P_0) \neq 0$. Тогда из равенства (48) вытекает, что $\text{grad } u(P_0)$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{r}'(t_0)$, направленному по касательной к кривой L в точке P_0 .

Так как эта кривая была выбрана произвольно, то мы приходим к следующему выводу. Пусть скалярное поле задано дифференцируемой функцией $u = F(x, y, z)$. Тогда все касательные, проведенные в точке P_0 к линиям, лежащим на поверхности уровня и проходящим через точку P_0 , расположены в одной плоскости, перпендикулярной вектору $\text{grad } F(P_0)$, при условии, что этот вектор не равен нулю.

В случае плоского скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией двух переменных $z = f(x, y)$, градиент определяется формулой

$$\text{grad } f(x, y) = f'_x(x, y) \mathbf{i} + f'_y(x, y) \mathbf{j}. \quad (49)$$

Его связь с производной по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}$ выражается равенством

$$\text{пр}_l \text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial l},$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial t} = |\operatorname{grad} z| \cos \varphi,$$

где φ — угол между единичным вектором $\mathbf{l}$ и $\operatorname{grad} z$. Можно показать, что если поле задано дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$, то вектор $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$ перпендикулярен к касательной, проведенной к линии уровня в точке $P_0(x_0; y_0)$.

Пример 2. Найти наибольшую скорость возрастания функции $z = x^2y - 5y^3$ в точке $P_0(2; 1)$.

Решение. Наибольшая скорость возрастания функции равна модулю градиента этой функции. Находим

$$\operatorname{grad} z = (x^2y - 5y^3)'_x \mathbf{i} + (x^2y - 5y^3)'_y \mathbf{j} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - 15y^2)\mathbf{j}.$$

В точке $P_0(2; 1)$ $\operatorname{grad} z = 4\mathbf{i} - 11\mathbf{j}$. Следовательно, наибольшая скорость возрастания функции равна

$$|\operatorname{grad} z|_{P_0} = \sqrt{4^2 + 11^2} = \sqrt{137}.$$

4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \quad (50)$$

левая часть которого является функцией, дифференцируемой в некоторой области. Эта функция $u = F(x, y, z)$ определяет скалярное поле, для которого данная поверхность (50) является одной из поверхностей уровня*. Пусть в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$ $\operatorname{grad} F(x, y, z)$ не равен нулю. Тогда, согласно п. 3, все касательные, проведенные в точке P_0 к линиям, лежащим на поверхности (50) и проходящим через точку P_0 , расположены в одной плоскости, перпендикулярной $\operatorname{grad} F(P_0)$. Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к поверхности $F(x, y, z) = 0$, в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис. 225).

Найдем уравнение этой плоскости. Искомая плоскость проходит, очевидно, через точку $P_0(x_0; y_0; z_0)$, поэтому ее уравнение имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (51)$$

* Поверхность (50) является геометрическим местом точек, в которых функция поля $u = F(x, y, z)$ принимает одно и то же значение, равное нулю.

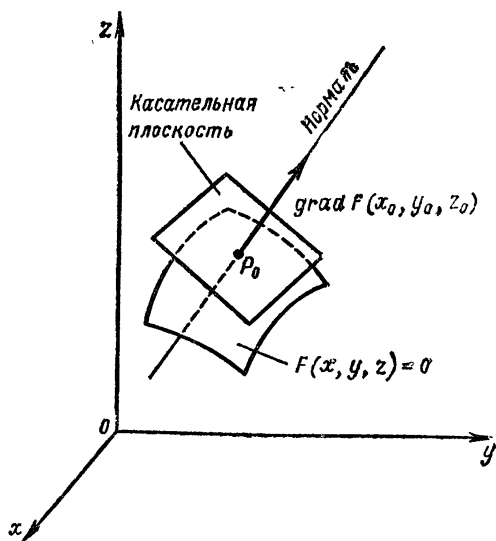


Рис. 225

(см. гл. IV, § 1, п. 2, формула (4)). Так как вектор

$$\operatorname{grad} F(P_0) = F'_x(x_0, y_0, z_0) \mathbf{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0) \mathbf{j} + F'_z(x_0, y_0, z_0) \mathbf{k}$$

по условию перпендикулярен касательной плоскости, то его можно принять за нормальный вектор этой плоскости, т. е. можно положить $A = F'_x(x_0, y_0, z_0)$, $B = F'_y(x_0, y_0, z_0)$, $C = F'_z(x_0, y_0, z_0)$. Тогда уравнение (51) примет следующий вид:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (52)$$

Это и есть уравнение касательной плоскости к поверхности (50) в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пусть поверхность (50) имеет в некоторой ее точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ касательную плоскость. Прямая, проходящая через точку P_0 перпендикулярно этой касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности (50) в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Вектор $\operatorname{grad} F(P_0)$, очевидно, направлен вдоль нормали и поэтому может быть принят в качестве ее направляющего вектора. Итак, канонические уравнения нормали имеют следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (53)$$

Пример 1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к однополостному гиперболоиду $x^2 + 2y^2 - z^2 - 5 = 0$, в точке $P_0(2; -1; 1)$.

Решение. В п. 3 (см. пример 1) был найден градиент функции $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ в точке $P_0(2; -1; 1)$. При этом оказалось, что $\operatorname{grad} F(P_0) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Поэтому искомые уравнения касательной плоскости и нормали будут следующими:

$$4(x - 2) - 4(y + 1) - 2(z - 1) = 0,$$

или

$$2x - 2y - z - 5 = 0 \text{ (уравнение касательной плоскости);}$$

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 1}{-4} = \frac{z - 1}{-2},$$

или

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 1}{-1} \text{ (уравнения нормали).}$$

Итак, $\operatorname{grad} F(P_0)$ является направляющим вектором нормали. Поэтому единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ мы найдем, разделив вектор $\operatorname{grad} F(P_0)$ на его длину:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\operatorname{grad} F(P_0)}{|\operatorname{grad} F(P_0)|} = \\ &= \frac{F'_x(x_0, y_0, z_0) \mathbf{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0) \mathbf{j} + F'_z(x_0, y_0, z_0) \mathbf{k}}{\sqrt{[F'_x(x_0, y_0, z_0)]^2 + [F'_y(x_0, y_0, z_0)]^2 + [F'_z(x_0, y_0, z_0)]^2}}. \end{aligned} \quad (54)$$

Рассмотрим теперь случай, когда поверхность задана уравнением

$$z = f(x, y). \quad (55)$$

Этот случай можно свести к предыдущему, записав уравнение (55) в виде

$$z - f(x, y) = 0$$

и положив

$$z - f(x, y) = F(x, y, z).$$

Тогда

$$F'_x(x, y, z) = -f'_x(x, y), \quad F'_y(x, y, z) = -f'_y(x, y), \quad F'_z(x, y, z) = 1$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \text{grad } F(x_0, y_0, z_0) &= F'_x(x_0, y_0, z_0) \mathbf{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0) \mathbf{j} + F'_z(x_0, y_0, z_0) \mathbf{k} = \\ &= -f'_x(x_0, y_0) \mathbf{i} - f'_y(x_0, y_0) \mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (56)$$

Поэтому уравнение касательной плоскости в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ запишется в виде

$$-f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z - z_0 = 0,$$

или

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (57)$$

а уравнение нормали — в виде

$$\frac{x - x_0}{-f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}. \quad (58)$$

Единичный вектор $\mathbf{n}$ нормали в этом случае находится по формуле

$$\mathbf{n} = \frac{-f'_x(x_0, y_0) \mathbf{i} - f'_y(x_0, y_0) \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + f'^2_x(x_0, y_0) + f'^2_y(x_0, y_0)}}, \quad (59)$$

а его направляющие косинусы — по формулам

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{-f'_x(x_0, y_0)}{\sqrt{1 + f'^2_x(x_0, y_0) + f'^2_y(x_0, y_0)}}, \quad \cos \beta = \frac{-f'_y(x_0, y_0)}{\sqrt{1 + f'^2_x(x_0, y_0) + f'^2_y(x_0, y_0)}}, \\ \cos \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(x_0, y_0) + f'^2_y(x_0, y_0)}}. \end{aligned} \quad (60)$$

Пример 2. Найти уравнение касательной плоскости к эллиптическому параболоиду $z = x^2 + \frac{y^2}{2}$ в точке $P_0(1; -2; 3)$.

Решение. Положив $x^2 + \frac{y^2}{2} = f(x, y)$, получим $f'_x(x, y) = 2x$; $f'_y(x, y) = y$ и, следовательно, $f'_x(1, -2) = 2$; $f'_y(1, -2) = -2$. Теперь, пользуясь формулой (57), легко получим уравнение касательной плоскости

$$z - 3 = 2(x - 1) - 2(y + 2),$$

или

$$2x - 2y - z - 3 = 0.$$

5. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ дифференциал

$$dz = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y,$$

или

$$dz = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (61)$$

Рассмотрим уравнение касательной плоскости

$$Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).^* \quad (62)$$

Мы видим, что правая часть этого уравнения совпадает с правой частью выражения (61) для дифференциала dz .

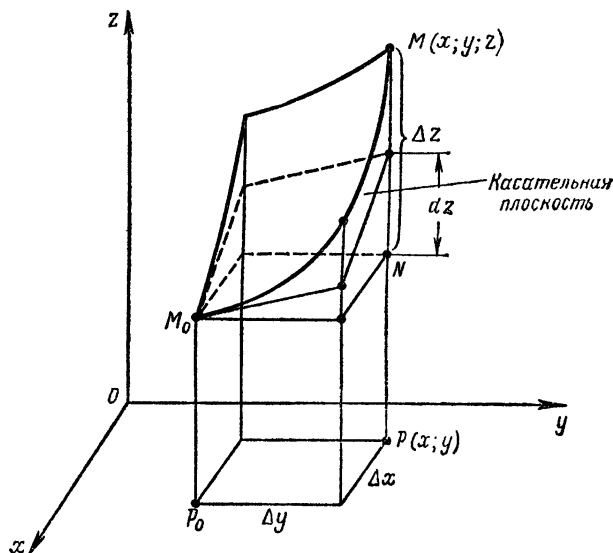


Рис. 226

Следовательно, и левые части этих равенств равны. Но в равенстве (61) левая часть есть дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$, а в уравнении (62) левая часть означает соответствующее приращение аппликаты касательной плоскости.

Мы приходим к следующему выводу, поясняющему геометрический смысл дифференциала функции двух переменных: *дифференциал функции двух переменных равен соответствующему приращению аппликаты касательной плоскости* (см. рис. 226).

§ 7. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Необходимые и достаточные условия существования экстремума

Понятие максимума и минимума для функции нескольких переменных вводятся так же, как и для функции одной переменной.

* Мы обозначили через Z аппликату точки касательной плоскости, чтобы отличить ее от аппликаты z точки поверхности.

Мы рассмотрим эти понятия только в применении к функции двух переменных.

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ задана в некоторой области G .

Введем следующие определения.

Определение. Функция двух переменных $z = f(x, y) = f(P)$ имеет в точке $P_0(x_0; y_0)$ области G максимум, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $P(x; y)$ этой окрестности, отличных от P_0 , выполняется неравенство

$$f(P_0) > f(P).$$

Определение. Функция двух переменных $z = f(x, y) = f(P)$ имеет в точке $P_0(x_0; y_0)$ области G минимум, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $P(x; y)$ этой окрестности, отличных от P_0 , выполняется неравенство

$$f(P_0) < f(P).$$

Точка P_0 , в которой функция $z = f(P)$ имеет максимум (или минимум), называется *точкой максимума* (или *минимума*).

Как и в случае функции одной переменной, точку максимума (или минимума) не следует смешивать с точкой, в которой функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение в области G .

Существует общее название для максимума и минимума — *экстремум*.

Теорема (необходимый признак существования экстремума). Если $P_0(x_0; y_0)$ есть точка экстремума функции $z = f(x, y)$, то

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= 0, \\ f'_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

в предложении, что указанные частные производные существуют в точке $P_0(x_0, y_0)$.

Доказательство. Частная производная функции $z = f(x, y)$ по x в точке $P_0(x_0, y_0)$ есть производная функции одной переменной $\varphi(x) = f(x, y_0)$ в точке $x = x_0$. Но в этой точке функция $\varphi(x)$ имеет, очевидно, экстремум. Следовательно, $\varphi'(x_0) = 0$ (см. гл. VI, § 7, п. 2). Так как $\varphi'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$, то $f'_x(x_0, y_0) = 0$. Аналогично можно показать, что $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Теорема доказана.

Таким образом, обращение в нуль в точке P_0 частных производных первого порядка функции $z = f(x, y)$ (если они существуют) является необходимым условием существования в точке P_0 экстремума этой функции.

Заметим, что функция может иметь экстремум также в тех точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Например, функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, очевидно, имеет минимум в точке $O(0, 0)$, но не имеет в этой точке частных производных.

Точки, в которых первые частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ функции $z = f(x, y)$ обращаются в нуль или не существуют, называются *критическими* точками этой функции.

Из изложенного выше следует, что точки экстремума функции находятся среди ее критических точек. Однако существуют критические точки, не являющиеся точками экстремума. Рассмотрим, например, функцию $z = f(x, y) = xy$.

Первые частные производные этой функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

обращаются в нуль в точке $P_0(0; 0)$, следовательно, эта точка является критической. Однако экстремума в ней функция $z = xy$ не имеет.

В самом деле, $z(P_0) = 0$, но в любой окрестности точки $P_0(0; 0)$ имеются как положительные (в точках, принадлежащих I и III четвертям), так и отрицательные (в точках, принадлежащих II и IV четвертям) значения функции z .

Рассмотренный пример показывает, что необходимый признак существования экстремума не является достаточным признаком.

Достаточным условием наличия экстремума в критической точке $P_0(x_0, y_0)$ является условие

$$\Delta(P_0) = f''_{x^2}(P_0) \cdot f''_{y^2}(P_0) - [f''_{xy}(P_0)]^2 > 0,$$

причем в случае $f''_{x^2}(P_0) < 0$ P_0 есть точка максимума, а в случае $f''_{x^2}(P_0) > 0$ — точка минимума. Условие

$$\Delta(P_0) = f''_{x^2}(P_0) \cdot f''_{y^2}(P_0) - [f''_{xy}(P_0)]^2 < 0$$

является *достаточным для отсутствия экстремума* в критической точке P_0 .

В случае $\Delta(P_0) = 0$ точка P_0 может быть, а может и не быть точкой экстремума (сомнительный случай). В этом случае необходимы дополнительные исследования.

Сформулированные здесь достаточные признаки существования или отсутствия экстремума мы оставляем без доказательства.

Пример. Найти экстремумы функции

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y.$$

Решение. Находим первые частные производные:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 30, \quad f'_y(x, y) = 6xy - 18.$$

Приравнявая эти производные нулю, получим после элементарных преобразований:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10, \\ 2xy &= 6. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Складывая и вычитая почленно уравнения (63), получим:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= 16, \\ x^2 - 2xy + y^2 &= 4, \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} x+y &= \pm 4, \\ x-y &= \pm 2. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему уравнений (равносильную данной), находим четыре критические точки:

$$P_1(3; 1), P_2(1; 3), P_3(-1; -3) \text{ и } P_4(-3, -1).$$

Теперь найдем вторые частные производные

$$f''_{x^2} = 6x; \quad f''_{xy} = 6y; \quad f''_{y^2} = 6x$$

и составим выражение

$$\Delta(P) = f''_{x^2}(P) f''_{y^2}(P) - [f''_{xy}(P)]^2 = 36(x^2 - y^2).$$

Убеждаемся, что

- 1) $\Delta(P_1) > 0$, $f''_{x^2}(P_1) > 0$, P_1 — точка минимума;
- 2) $\Delta(P_2) < 0$, в точке P_2 экстремума нет;
- 3) $\Delta(P_3) < 0$, в точке P_3 экстремума нет;
- 4) $\Delta(P_4) > 0$, $f''_{x^2}(P_4) < 0$, P_4 — точка максимума.

Итак, данная функция имеет два экстремума: в точке P_1 — минимум $f(P_1) = -72$, в точке P_4 — максимум $f(P_4) = 72$.

2. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области G и дифференцируема внутри этой области.

Тогда она имеет в этой области наименьшее и наибольшее значения (см. § 2, п. 5), которые достигаются либо внутри области, либо на ее границе. Если наибольшее или наименьшее значение функция принимает во внутренних точках области G , то эти точки, очевидно, будут точками экстремума функции $z = f(x, y)$. Таким образом, точки, в которых функция имеет наибольшее или наименьшее значения, будут либо точками экстремума функции, либо граничными точками области G .

Мы приходим к следующему правилу нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных.

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в ограниченной замкнутой области G , следует найти значения функции в критических точках этой области, а также ее наибольшее и наименьшее значения на границе области G . Наибольшее из всех этих значений будет наибольшим значением функции $f(x, y)$ в области G . Наименьшее из тех же значений функции будет ее наименьшим значением в области G .

В некоторых случаях при нахождении наибольших и наименьших значений функции двух переменных в ограниченной замкнутой

области границу этой области удобно разбить на части, каждая из которых задается своими уравнениями.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

Решение. Находим первые частные производные

$$z'_x = 2x \quad \text{и} \quad z'_y = -2y.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ -2y = 0, \end{cases}$$

получим одну критическую точку $P_0(0; 0)$, в которой значение функции равно нулю.

Найдем теперь наибольшее и наименьшее значения функции на границе, т. е. на окружности $x^2 + y^2 = 4$. Так как на окружности переменные x и y связаны соотношением $x^2 + y^2 = 4$, то для точек окружности функцию $z = x^2 - y^2$ можно представить как функцию одной переменной x : $z = x^2 - (4 - x^2)$, т. е. $z = 2x^2 - 4$, причем $-2 \leq x \leq 2$. Итак, нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных на окружности $x^2 + y^2 = 4$ мы свели к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной $z = 2x^2 - 4$ на сегменте $[-2, 2]$. Находим критические точки функции в интервале $(-2, 2)$ и вычисляем значения функции в этих точках и на концах интервала (см. гл. VI, § 7, п. 4): $z' = 4x$, $4x = 0$. Отсюда имеем критическую точку $x = 0$; $z|_{x=0} = -4$; $z|_{x=-2} = 4$, $z|_{x=2} = 4$. Таким образом, функция имеет наибольшее значение, равное 4, и наименьшее значение, равное -4 .

Итак, наибольшее значение функция $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$ принимает в точках $M_1(-2; 0)$ и $M_2(2; 0)$ окружности $x^2 + y^2 = 4$ и наименьшее — в точках $M_3(0; 2)$ и $M_4(0; -2)$ той же окружности.

Заметим, что наибольшее и наименьшее значения функции на окружности $x^2 + y^2 = 4$ можно найти иначе.

Представим уравнения окружности в параметрическом виде:

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Тогда $z = x^2 - y^2 = 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t = 4 \cos 2t$. Найдем наибольшее и наименьшее значения этой функции на сегменте $0 \leq t \leq 2\pi$. Для этого, продифференцировав функцию $z = 4 \cos 2t$, получим $z' = -8 \sin 2t$. Составив уравнение $-8 \sin 2t = 0$, находим три критические точки $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \pi$, $t_3 = \frac{3\pi}{2}$, лежащие внутри указанного сегмента. Вычислив значения функции $z = 4 \cos 2t$ в этих точках, а также на концах сегмента $t = 0$ и $t = 2\pi$, заметим, что получаются лишь два различных между собой значения функции: $z_1 = -4$ (наименьшее значение функции) и $z_2 = 4$ (наибольшее значение функции).

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Задачи, приводящие к двойному интегралу

Задача об объеме. Пусть σ —область в плоскости Oxy , ограниченная замкнутым контуром l . Рассмотрим тело, ограниченное областью σ , цилиндрической поверхностью C с направляющей l и с образующими, параллельными оси Oz , и частью поверхности S , уравнение которой $z=f(x, y)$ (рис. 227). При этом предположим,

что функция $z=f(x, y)$ определена, непрерывна и неотрицательна в области σ . Такое тело назовем *цилиндрическим*. Поставим задачу о вычислении объема цилиндрического тела. Для этого разобьем область σ (см. рис. 227) произвольным образом на n малых площадок $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, причем

$\sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = \sigma^*$. Над каждой из

малых площадок $\Delta\sigma_i$ построим цилиндр, ограниченный сверху куском поверхности S , проектирующимся в площадку $\Delta\sigma_i$. Этим самым все цилиндрическое тело с

основанием σ разобьется на n столбиков с основаниями $\Delta\sigma_i$. Обозначим объем столбика с основанием $\Delta\sigma_i$ через ΔV_i . Тогда объем V цилиндрического тела равен сумме объемов этих столбиков:

$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i$. Рассмотрим цилиндр с основанием $\Delta\sigma_i$. За высоту цилиндра примем аппликату z_i поверхности S в некоторой произвольной точке $P_i(x_i, y_i)$ площадки $\Delta\sigma_i$ (рис. 228): $z_i = f(x_i, y_i)$.

Объем этого цилиндра, равный произведению площади основания $\Delta\sigma_i$ на высоту $z_i = f(x_i, y_i)$, примем за приближенное значение объема ΔV_i столбика с основанием $\Delta\sigma_i$:

$$\Delta V_i \approx f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

* В дальнейшем σ , $\Delta\sigma_i$ означают как области, так и их площади.

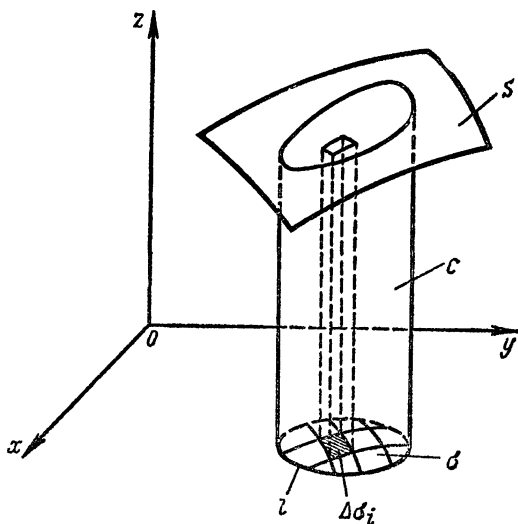


Рис. 227

Взяв сумму всех таких объемов, получим приближенное значение объема V цилиндрического тела:

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i.$$

За точное значение объема V примем предел суммы $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i$ при условии, что число малых площадок $\Delta \sigma_i$ неограниченно увеличивается, а каждая площадка стягивается в точку:

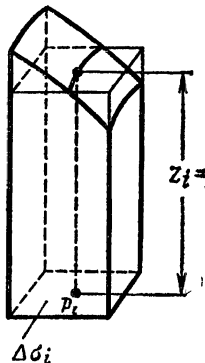


Рис. 228

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i. \quad (1)$$

Итак, задача о вычислении объема V цилиндрического тела свелась к нахождению некоторого предела.

Задача о массе плоской пластинки. Пусть дана тонкая материальная пластинка σ , расположенная в плоскости Oxy . Рассмотрим некоторую площадку $\Delta \sigma$ этой пластинки и в ней точку $P(x; y)$. Отношение массы Δm площадки $\Delta \sigma$ к ее площади, т. е. $\frac{\Delta m}{\Delta \sigma}$, называется

средней поверхностной плотностью площадки $\Delta \sigma$. Если существует предел γ отношения $\frac{\Delta m}{\Delta \sigma}$ при условии, что площадка $\Delta \sigma$ стягивается в точку $P(x; y)$, то этот предел называется поверхностной плотностью в точке P . Этот предел зависит от положения точки P и потому является некоторой функцией ее координат: $\gamma = \gamma(x, y)$.

Определим массу m пластинки σ , зная, что поверхностная плотность γ в каждой ее точке есть заданная непрерывная функция координат точки $P(x; y)$: $\gamma = \gamma(x, y)$ *. Если бы пластинка была однородной, т. е. плотность γ в каждой ее точке была постоянной $\gamma = \gamma_0$, то ее масса была бы равна

$$m = \gamma_0 \sigma. \quad (2)$$

Так как в общем случае плотность меняется от точки к точке, то формула (2) для определения массы пластинки σ непригодна. Поэтому поступим следующим образом.

Разобьем пластинку σ на n малых площадок $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$. В каждой такой малой площадке выберем по точке $P_i(x_i; y_i)$ (рис. 229). Если площадки $\Delta \sigma_i$ достаточно малы, то в пределах каждой такой площадки плотность γ изменяется незначительно и мало отличается от плотности $\gamma_i = \gamma(x_i, y_i)$ в точке P_i . Принимая приближенно плотность в каждой малой площадке $\Delta \sigma_i$ постоянной,

* Пластинку считаем столь тонкой, что изменением плотности по ее толщине пренебрегаем.

равной плотности в выбранной точке P_i , подсчитаем приближенно массу Δm_i площадки $\Delta \sigma_i$:

$$\Delta m_i \approx \gamma_i \Delta \sigma_i = \gamma(x_i, y_i) \Delta \sigma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Так как масса m всей пластинки σ равна $m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i$, то для ее вычисления получаем следующее приближенное равенство:

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i) \Delta \sigma_i.$$

За точное значение искомой массы m примем предел суммы $\sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i) \Delta \sigma_i$ при условии, что число малых площадок неограниченно увеличивается, а каждая площадка стягивается в точку:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i) \Delta \sigma_i. \quad (3)$$

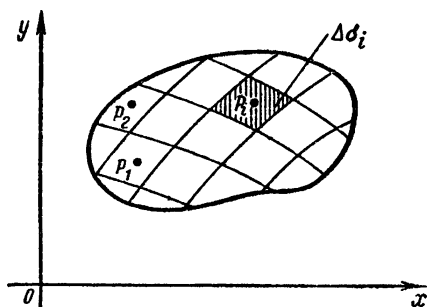


Рис. 229

Таким образом, поставленная нами задача о вычислении массы тонкой пластинки сведена к нахождению предела некоторой суммы.

Рассмотренные здесь задачи приводят нас к очень важному обобщению определенного интеграла, а именно—к двойному интегралу, к изучению которого мы сейчас перейдем.

2. Двойной интеграл. Теорема существования

Задачи в п. 1 привели нас к рассмотрению сумм определенного вида. Составление этих сумм было связано с некоторой областью σ (на плоскости Oxy) и с заданной в ней непрерывной функцией. К нахождению предела таких сумм приводят многочисленные физические и технические задачи. Поэтому желательно изучить свойства пределов таких сумм в общем виде, независимо от той или иной конкретной физической задачи.

Итак, пусть в области σ плоскости Oxy задана функция $z = f(P) = f(x, y)$.*

Выполним следующие действия.

1. Разобьем область σ на n малых площадок $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$ (см. рис. 229) так, чтобы сумма площадей малых площадок была равна площади всей области σ : $\sigma = \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i$.

2. В каждой малой площадке $\Delta \sigma_i$ выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$. Умножим значение функции $z = f(P) = f(x, y)$ в точке P_i на $\Delta \sigma_i$:

$$f(P_i) \Delta \sigma_i = f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i.$$

* Всюду, не оговаривая этого в дальнейшем, будем полагать, что область σ имеет конечную площадь и ограничена одной или несколькими линиями.

3. Составим сумму всех таких произведений:

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i. \quad (4)$$

Сумма вида (4) называется *интегральной суммой*, составленной для функции двух переменных $z = f(P) = f(x, y)$.

4. Рассмотрим предел интегральной суммы (4) при неограниченном увеличении числа n малых площадок и при стягивании каждой из них в точку. Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения области σ на малые площадки $\Delta\sigma_i$, ни от выбора в каждой из них точек $P_i(x_i, y_i)$, то он называется *двойным интегралом* от функции $z = f(P) = f(x, y)$ по области σ и обозначается так:

$$\iint_{\sigma} f(P) d\sigma, \quad \text{или} \quad \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma.$$

Таким образом,

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i,$$

или в другой записи

$$\iint_{\sigma} f(P) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i.$$

Здесь подразумевается, что при $n \rightarrow \infty$, каждая из малых площадок $\Delta\sigma_i$ стягивается в точку; σ называется *областью интегрирования*, функция $f(x, y)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x, y) d\sigma$ — *подынтегральным выражением*, $d\sigma$ — *элементом площади*.

Итак, мы имеем следующее определение.

Определение. *Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области σ называется предел, к которому стремится интегральная сумма (4) при неограниченном увеличении числа малых площадок $\Delta\sigma_i$ и при условии, что каждая из них стягивается в точку.*

Возвращаясь теперь к задачам об объеме и массе, мы видим, что *объем цилиндрического тела численно равен двойному интегралу от аппликаты $z = f(x, y) \geq 0$, взятому по области σ :*

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma.$$

В этом состоит геометрический смысл двойного интеграла.

Масса плоской пластинки σ с плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$ равна двойному интегралу от плотности:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} \gamma(x, y) d\sigma.$$

Замечание. Если подынтегральная функция $f(x, y) \equiv 1$, то значение двойного интеграла численно равно площади области интегрирования: $\iint_{\sigma} d\sigma = \sigma$.

Действительно, в этом случае любая интегральная сумма имеет вид

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta\sigma_i = \sigma$$

и численно равна площади области σ . Так как предел интегральной суммы тоже равен σ , то

$$\iint_{\sigma} d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma = \sigma.$$

Существование двойного интеграла, т. е. предела интегральной суммы для $f(x, y) \geq 0$, кажется очевидным, так как этот предел дает объем цилиндрического тела. Однако это рассуждение не является строгим. В более полных курсах это утверждение строго доказывается и носит название теоремы существования двойного интеграла.

Теорема существования. Для всякой функции $z = f(x, y)$, непрерывной в ограниченной замкнутой области, имеющей площадь σ , существует двойной интеграл, т. е. существует предел интегральных сумм при неограниченном увеличении числа малых площадок $\Delta\sigma_i$, при условии, что каждая из них стягивается в точку. Этот предел не зависит ни от способа разбиения области σ на части $\Delta\sigma_i$, ни от выбора точек $P_i(x_i; y_i)$.

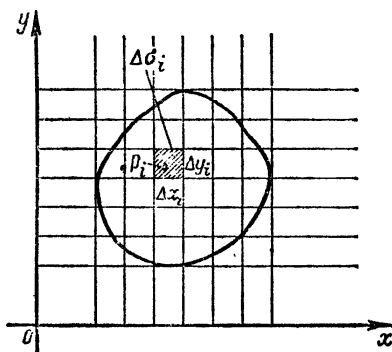


Рис. 230

В дальнейшем мы будем рассматривать только функции, непрерывные в области интегрирования.

Из теоремы существования следует, что мы можем, например, разбить область σ на малые прямоугольники $\Delta\sigma_i$ со сторонами Δx_i и Δy_i прямыми, параллельными осям координат (рис. 230). При этом $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Выбирая затем в каждом малом прямоугольнике по точке $P_i(x_i; y_i)$, мы можем написать, согласно определению двойного интеграла

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i.$$

Для того чтобы подчеркнуть, что двойной интеграл можно получить как предел суммы вида $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i$, вместо обозначения $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$ употребляют также обозначение $\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy$.

Итак,

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i.$$

Выражение $dx dy$ называется *элементом площади* в декартовых координатах и равно площади прямоугольника со сторонами dx и dy , параллельными координатным осям.

Заметим, что при составлении интегральной суммы площадки $\Delta\sigma_i$, прилегающие к границе области σ , не имеют формы прямоугольников. Однако можно доказать, что ошибка от замены таких площадок прямоугольниками с площадями $\Delta x_i \cdot \Delta y_i$ в пределе сведется к нулю.

3. Свойства двойного интеграла

Легко заметить, что определение двойного интеграла

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i$$

конструктивно совершенно аналогично определению определенного интеграла (см. гл. VIII, § 2, п. 1):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i.$$

В связи с этим двойной интеграл обладает теми же свойствами, что и определенный интеграл. Более того, доказательства этих свойств для двойного интеграла проводятся совершенно аналогично доказательству соответствующих свойств определенного интеграла. По этой причине свойства двойного интеграла приведем без вывода*.

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т. е. если k —некоторое число, то*

$$\iint_{\sigma} k f(x, y) d\sigma = k \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma.$$

2. *Двойной интеграл от суммы нескольких функций равен сумме двойных интегралов от слагаемых:*

$$\iint_{\sigma} [f(x, y) + \varphi(x, y)] d\sigma = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma + \iint_{\sigma} \varphi(x, y) d\sigma.**$$

3. *Если в области интегрирования σ имеет место неравенство $f(x, y) \geq 0$, то и $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \geq 0$.*

3а. *Если в области интегрирования $f(x, y) \geq 0$ и хотя бы в одной точке области $f(x, y) > 0$, то $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma > 0$.*

* Рекомендуем читателю доказать эти свойства, освежив предварительно в памяти доказательства аналогичных свойств для определенного интеграла.

** Как и в случае определенного интеграла, совокупность свойства 1 и 2 называется свойством *линейности*.

4. Если в области интегрирования функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ удовлетворяют неравенству $f(x, y) \geq \varphi(x, y)$, то

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \geq \iint_{\sigma} \varphi(x, y) d\sigma.$$

5. Теорема о среднем значении. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области σ . Тогда в области σ существует такая точка $P_0(x_0, y_0)$, что

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = f(x_0, y_0) \sigma. \quad (5)$$

Если функция $f(x, y) \geq 0$ в области σ , то эта теорема имеет следующий геометрический смысл.

Объем цилиндрического тела равен объему цилиндра с тем же основанием σ , что и у цилиндрического тела, и с высотой, равной значению функции в некоторой точке $P_0(x_0, y_0)$ области σ . Значение функции $f(x_0, y_0)$, определяемое из равенства (5), называется средним значением функции $f(x, y)$ в области σ .

6. Свойство аддитивности. Если область интегрирования разбить на несколько частей $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, то

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{\sigma_2} f(x, y) d\sigma + \dots + \iint_{\sigma_k} f(x, y) d\sigma.$$

Геометрически, если рассматривать двойной интеграл как объем цилиндрического тела, это свойство очевидно. Оно выражает тот простой факт, что если основание цилиндрического тела разбить на несколько частей $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, то объем всего цилиндрического тела равен сумме объемов составляющих его цилиндрических тел с основаниями $\sigma_1, \dots, \sigma_k$.

4. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Вычисление двойного интеграла как предела интегральной суммы, так же как и в случае определенного интеграла, связано обычно с большими трудностями. Чтобы их избежать, вычисление двойного интеграла сводят к последовательному вычислению двух определенных интегралов. Покажем, как это делается. Для простоты при выводе ограничимся случаем, когда в области интегрирования σ подынтегральная функция $f(x, y) \geq 0$. Такое предположение позволяет нам рассматривать двойной интеграл как объем цилиндрического тела.

Итак, требуется вычислить двойной интеграл $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$, от непрерывной функции $f(x, y)$.

Предположим сперва, что область интегрирования σ ограничена двумя непрерывными кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ и двумя

прямыми $x=a$, $x=b$, причем для всех значений x , заключенных между a и b , имеет место неравенство $\varphi_2(x) \geq \varphi_1(x)$ (рис. 231).

Проведем через точку $(x; 0)$ оси Ox прямую, параллельную сси Oy . Эта прямая встречается кривые, ограничивающие область σ , соответственно в точках C_1 и C_2 . Точку C_1 будем называть *точкой входа*, а точку C_2 — *точкой выхода*. Их ординаты обозначим соответственно $y_{вх}$ и $y_{вых}$. Ордината точки входа равна $y_{вх} = \varphi_1(x)$, а ордината точки выхода равна $y_{вых} = \varphi_2(x)$. Известно, что двойной инте-

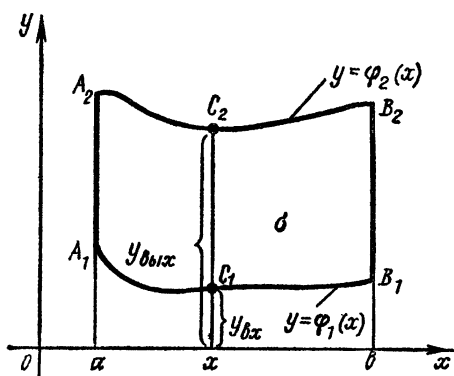


Рис. 231

грал $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$ численно равен объему V цилиндрического тела, ограниченного частью поверхности $z = f(x, y)$, которая проектируется в площадку σ (см. рис. 227):

$$V = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma.$$

Подсчитаем теперь объем V цилиндрического тела иначе, а именно, с помощью метода поперечных сечений (см. гл. VIII, § 3, п. 3).

Как мы знаем, если сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox , проходящей через точку с абсциссой x ($a \leq x \leq b$), имеет площадь $s(x)$, то объем V тела выражается формулой

$$V = \int_a^b s(x) dx. \quad (6)$$

Применим эту формулу к вычислению объема цилиндрического тела. Проведя через точку $(x; 0; 0)$ плоскость, перпендикулярную оси Ox , мы получим в сечении криволинейную трапецию $C_1M_1M_2C_2$ (рис. 232). Аппликата $z = f(x, y)$ точек линии M_1M_2 при постоянном x является функцией только от y , причем y изменяется в границах от $y_{вх} = \varphi_1(x)$ до $y_{вых} = \varphi_2(x)$. Площадь $s(x)$ трапеции $C_1M_1M_2C_2$, очевидно, равна определенному интегралу:

$$s(x) = \int_{y_{вх}}^{y_{вых}} z dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (7)$$

Итак, формула (7) выражает площадь $s(x)$ поперечного сечения цилиндрического тела.

Подставляя в формулу (6) выражение для $s(x)$, получим

$$V = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx. \quad (8)$$

Но так как, с другой стороны, объем V цилиндрического тела равен двойному интегралу $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$, то имеем

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx,$$

или

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (I)$$

Это и есть искомая формула.

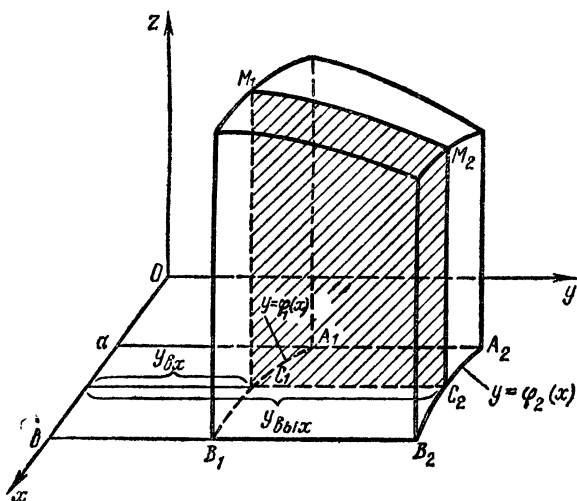


Рис. 232

Поясним смысл формулы (I). Для того чтобы вычислить двойной интеграл $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$, нужно сперва вычислить определенный

интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$, считая x *постоянным* (или, как говорят, вычислить внутренний интеграл).

Нижней границей интегрирования является ордината точки входа $y_{\text{вх}} = \varphi_1(x)$, а верхней границей интегрирования является ордината точки выхода $y_{\text{вых}} = \varphi_2(x)$, соответствующие данному фиксированному значению x . Результат вычисления этого интеграла является функцией только от x . Интегрируя теперь эту функцию в границах от a до b , получим значение двойного интеграла.

Сделаем следующие замечания.

Замечание 1. Если область σ ограничена двумя кривыми $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ и двумя горизонтальными прямыми $y = c$,

$y=d$ ($c < d$), причем для всех y между c и d $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ (рис. 233), то аналогично можно доказать, что имеет место равенство

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy,$$

или

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (II)$$

Здесь при внутреннем интегрировании y следует считать постоянным. Результат этого интегрирования будет функцией от y , которую затем следует проинтегрировать в границах от c до d .

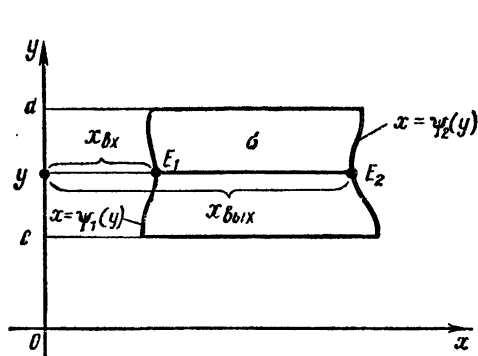


Рис. 233

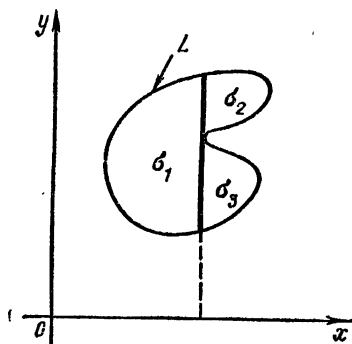


Рис. 234

Интегралы, стоящие в правых частях формул (I) и (II), называют *повторными или двукратными интегралами*.

Замечание 2. Следует обратить внимание на то, что в формулах (I) и (II) границы внешнего интеграла всегда постоянны.

Замечание 3. Формулы (I) и (II) выведены в предположении, что область σ имеет специальный вид. Если контур области σ более сложный (рис. 234), то поступают так: область σ разбивают на конечное число частей, удовлетворяющих условиям, при которых была выведена формула (I) или (II). Затем вычисляют интеграл по формуле (I) или (II) для каждой из таких областей. Интеграл же по всей области, в силу свойства аддитивности, равен сумме интегралов по каждой из этих частей. Для случая, приведенного на рис. 234, имеем:

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{\sigma_2} f(x, y) d\sigma + \iint_{\sigma_3} f(x, y) d\sigma.$$

Замечание 4. Если областью интегрирования σ служит прямоугольник, ограниченный прямыми $x=a$, $x=b$ ($a < b$) и $y=c$, $y=d$ ($c < d$) (рис. 235), то формулы (I) и (II) для этого случая

примут вид:

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy,$$

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Рассмотрим примеры на вычисление двойных интегралов.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$, если областью интегрирования σ является треугольник, ограниченный прямыми $y=0$, $x=2$, $y=\frac{x}{2}$ (рис. 236).

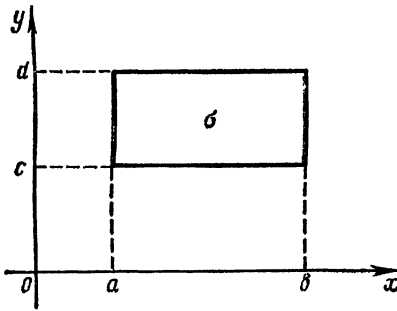


Рис. 235

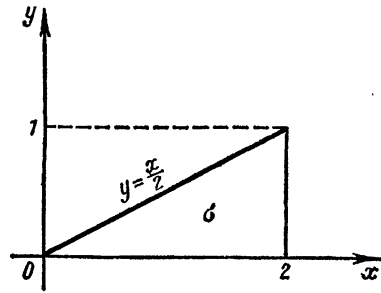


Рис. 236

Решение. Если при вычислении двойного интеграла пользоваться формулой (I), то здесь $y_{\text{вх}} = \varphi_1(x) = 0$, $y_{\text{вых}} = \varphi_2(x) = \frac{x}{2}$ (так как точки входа лежат на оси Ox , а точки выхода — на прямой $y = \frac{x}{2}$); $a = 0$, $b = 2$.

Поэтому, применяя формулу (I), имеем

$$\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} (x^2 + y^2) dy.$$

Вычислим внутренний интеграл, в котором считаем x постоянным:

$$\int_0^{\frac{x}{2}} (x^2 + y^2) dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{x}{2}} = x^2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^3}{3} = \frac{13}{24} x^3.$$

Следовательно,

$$\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^2 \frac{13}{24} x^3 dx = \frac{13x^4}{24 \cdot 4} \Big|_0^2 = \frac{13}{6}.$$

Применяя для вычисления двойного интеграла $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$ формулу (II), получим, конечно, тот же результат. Замечая, что в этом случае $x_{\text{вх}} = \psi_1(y) = 2y$, $x_{\text{вых}} = \psi_2(y) = 2$ (так как точка входа лежит на прямой $y = \frac{x}{2}$ или $x = 2y$, а точка выхода на прямой $x = 2$), $c = 0$, $d = 1$ (см. рис. 236), получим

$$\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^1 dy \int_{2y}^2 (x^2 + y^2) dx.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_{2y}^2 (x^2 + y^2) dx &= \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{2y}^2 = \left(\frac{8}{3} + 2y^2 \right) - \left(\frac{8y^3}{3} + 2y^3 \right) = \\ &= \frac{8}{3} + 2y^2 - \frac{14}{3} y^3, \end{aligned}$$

то

$$\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^1 \left(\frac{8}{3} + 2y^2 - \frac{14}{3} y^3 \right) dy = \left(\frac{8}{3} y + \frac{2y^3}{3} - \frac{7y^4}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{13}{6}.$$

Если принять во внимание геометрический смысл двойного интеграла, то $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$ дает объем V цилиндрического тела, ограниченного сверху частью параболоида вращения $z = x^2 + y^2$, которая проектируется на плоскость Oxy в треугольник σ .

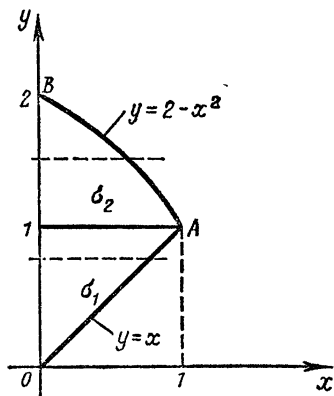


Рис. 237

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint_{\sigma} xy^2 d\sigma$, если область интегрирования σ ограничена линиями $x = 0$, $y = x$, $y = 2 - x^2$ (рис. 237).

Решение. Применим для вычисления двойного интеграла формулу (I). Здесь $y_{\text{вх}} = \varphi_1(x) = x$, $y_{\text{вых}} = \varphi_2(x) = 2 - x^2$, $a = 0$; $b = 1$. Поэтому

$$\iint_{\sigma} xy^2 d\sigma = \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} xy^2 dy.$$

Вычислим внутренний интеграл, в котором считаем x постоянным:

$$\int_x^{2-x^2} xy^2 dy = \frac{xy^3}{3} \Big|_x^{2-x^2} = \frac{x(2-x^2)^3}{3} - \frac{x^4}{3}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma} xy^2 d\sigma &= \int_0^1 \left[\frac{x(2-x^2)^3}{3} - \frac{x^4}{3} \right] dx = -\frac{1}{6} \int_0^1 (2-x^2)^3 d(2-x^2) - \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 dx = \\ &= -\frac{1}{6} \frac{(2-x^2)^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{x^5}{15} \Big|_0^1 = -\frac{1}{24} + \frac{2^4}{24} - \frac{1}{15} = \frac{67}{120}.\end{aligned}$$

Если при вычислении двойного интеграла $\iint_{\sigma} xy^2 d\sigma$ пользоваться формулой (II), то придется область интегрирования σ разбить на две части σ_1 и σ_2 (см. рис. 237), так как линия OAB , на которой расположены точки выхода на отдельных участках, задается различными уравнениями. По свойству аддитивности

$$\iint_{\sigma} xy^2 d\sigma = \iint_{\sigma_1} xy^2 d\sigma + \iint_{\sigma_2} xy^2 d\sigma.$$

Применяем формулу (II) к каждому из интегралов, стоящих в правой части последнего равенства:

$$\iint_{\sigma_1} xy^2 d\sigma = \int_0^1 dy \int_0^y xy^2 dx,$$

так как $x_{\text{вх}} = \psi_1(y) = 0$, $x_{\text{вых}} = \psi(y) = y$, $c = 0$, $d = 1$.

Вычисляем внутренний интеграл, помня, что y — постоянно:

$$\int_0^y xy^2 dx = \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^y = \frac{y^4}{2}.$$

Следовательно,

$$\iint_{\sigma_1} xy^2 d\sigma = \int_0^1 \frac{y^4}{2} dy = \frac{1}{10}.$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma_2} xy^2 d\sigma &= \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} xy^2 dx, \text{ так как } x_{\text{вх}} = 0, x_{\text{вых}} = \sqrt{2-y}, c = 1, d = 2. \\ \int_0^{\sqrt{2-y}} xy^2 dx &= \frac{x^2 y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{2-y}} = \frac{(2-y)y^2}{2} = y^2 - \frac{y^3}{2}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\iint_{\sigma_2} xy^2 d\sigma = \int_1^2 \left(y^2 - \frac{y^3}{2} \right) dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{8} \Big|_1^2 = \frac{11}{24}.$$

Таким образом, окончательно,

$$\iint_{\sigma} xy^2 d\sigma = \frac{1}{10} + \frac{11}{24} = \frac{67}{120}.$$

Этот пример показывает, что для нахождения двойного интеграла $\iint xy^2 d\sigma$ в данном конкретном случае выгоднее применить формулу (I). Это следует иметь в виду при вычислении двойных интегралов и пользоваться той из формул (I) или (II), применение которой ведет к менее громоздким вычислениям.

5. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Одним из методов упрощения вычисления определенных интегралов был метод замены переменной. Точно так же введение новых переменных в двойных интегралах очень часто приводит к более экономным вычислениям. Мы ограничимся здесь наиболее важным для практических приложений частным случаем замены переменных, а именно, заменой декартовых координат x и y полярными координатами r и φ .

Предположим, что нужно вычислить двойной интеграл $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$ от непрерывной функции $z = f(x, y)$ по области σ . Как мы знаем,

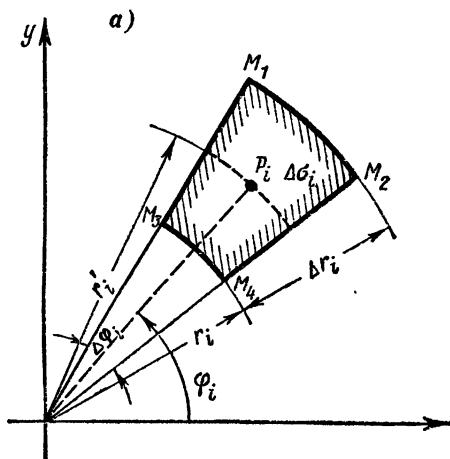


Рис. 238

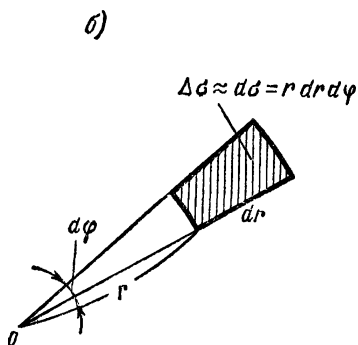


Рис. 239

двойной интеграл является пределом интегральной суммы

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta \sigma_i, \quad (9)$$

причем этот предел не зависит ни от способа разбиения области σ на части, ни от выбора в каждой малой площадке $\Delta \sigma_i$ точки P_i . Отнесем область σ к полярной системе координат, полюс которой совпадает с началом координат, а полярной осью служит ось Ox .

Осуществим специальное разбиение области интегрирования σ на малые площадки $\Delta\sigma_i$ с помощью лучей, выходящих из полюса и окружностей с общим центром в полюсе (рис. 238). Рассмотрим площадку $\Delta\sigma_i$, ограниченную двумя лучами, выходящими из полюса и составляющими между собой угол $\Delta\varphi_i$, и двумя окружностями радиусов r_i и $r_i + \Delta r_i$ (рис. 239, а). Площадь $\Delta\sigma_i$ этого криволинейного четырехугольника найдем как разность площадей двух круговых секторов:

$$\Delta\sigma_i = \text{пл. сект. } OM_1M_2 - \text{пл. сект. } OM_3M_4 = \frac{1}{2}(r_i + \Delta r_i)^2 \Delta\varphi_i - \\ - \frac{1}{2}r_i^2 \Delta\varphi_i = r_i \Delta r_i \Delta\varphi_i + \frac{1}{2}(\Delta r_i)^2 \Delta\varphi_i = \left(r_i + \frac{\Delta r_i}{2}\right) \Delta r_i \Delta\varphi_i.$$

Обозначим через r'_i средний радиус между r_i и $r_i + \Delta r_i$, т. е. $r'_i = r_i + \frac{\Delta r_i}{2}$. Тогда $\Delta\sigma_i = r'_i \Delta r_i \Delta\varphi_i$. В каждой малой площадке $\Delta\sigma_i$ выберем по точке $P_i(x_i, y_i)$. При этом точку P_i возьмем лежащей на окружности радиуса r'_i . Обозначим через φ_i полярный угол точки P_i . Принимая во внимание, что декартовы координаты x_i, y_i точки P_i и ее полярные координаты r'_i и φ_i связаны известными соотношениями $x_i = r'_i \cos \varphi_i$ и $y_i = r'_i \sin \varphi_i$, получим на основании соотношения (9)

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(r'_i \cos \varphi_i, r'_i \sin \varphi_i) r'_i \Delta r_i \Delta\varphi_i.$$

Следует заметить, что при составлении интегральной суммы площадки $\Delta\sigma_i$, прилегающие к границе области σ , могут оказаться срезанными и иметь площадь, меньшую, чем $r'_i \Delta r_i \Delta\varphi_i$. Однако можно доказать, что ошибка от такой замены в пределе сведется к нулю.

В правой части последнего равенства стоит предел интегральной суммы для функции $f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r$ по переменным r и φ . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(r'_i \cos \varphi_i, r'_i \sin \varphi_i) r'_i \Delta r_i \Delta\varphi_i = \iint_{\sigma} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Итак, мы приходим к следующей формуле:

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (10)$$

Выражение $d\sigma = r dr d\varphi$ называется *элементом площади в полярных координатах*.

С точностью до бесконечно малых более высокого порядка малости, чем $r dr d\varphi$, оно дает площадь $\Delta\sigma = r dr d\varphi + \frac{1}{2}(dr)^2 d\varphi$ криволинейного четырехугольника, изображенного на рис. 239, б.

Формула (10) называется формулой преобразования двойного интеграла к полярным координатам.

Итак, для того чтобы преобразовать двойной интеграл к полярным координатам, нужно переменные x и y в подынтегральной функции $f(x, y)$ заменить соответственно через $r \cos \varphi$, $r \sin \varphi$, а элемент площади $d\sigma$ заменить его выражением в полярных координатах: $d\sigma = r dr d\varphi$.

Для вычисления двойного интеграла $\iint_{\sigma} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$ применяют тоже правило сведения его к повторному интегралу, но только здесь роль переменных x и y играют r и φ . Покажем, как это сделать. Предположим, что область σ ограничена двумя лучами, выходящими из полюса под углами α и β ($\alpha < \beta$), и двумя кривыми, уравнения которых в полярных координатах таковы: $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$. Проведем из полюса луч под углом φ ($\alpha < \varphi < \beta$). Этот луч встречает кривые $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$ соответственно в точках C_1 и C_2 (рис. 240). Точку C_1 назовем точкой входа, а точку C_2 — точкой выхода. Для этой области интегрирования формула вычисления двойного интеграла имеет вид

$$\iint_{\sigma} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_{\text{вх}} = r_1(\varphi)}^{r_{\text{вых}} = r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (11)$$

Внутренний интеграл $\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$ берется (при постоянном φ) в границах от полярного радиуса точки входа ($r_{\text{вх}} = r_1(\varphi)$) до полярного радиуса точки выхода ($r_{\text{вых}} = r_2(\varphi)$). Результат этого интегрирования будет, вообще говоря, некоторой функцией от переменной φ , которую затем нужно проинтегрировать в границах от α до β (крайние значения аргумента φ).

Если область интегрирования σ имеет вид, изображенный на рис. 241, а (полюс принадлежит границе области), то для нее полярный радиус входа равен нулю: $r_{\text{вх}} = 0$ и, следовательно,

$$\iint_{\sigma} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (12)$$

Если, наконец, область σ содержит внутри себя начало координат и ограничена кривой $r = r(\varphi)$ (рис. 241, б), то очевидно, имеем

$$\iint_{\sigma} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (13)$$

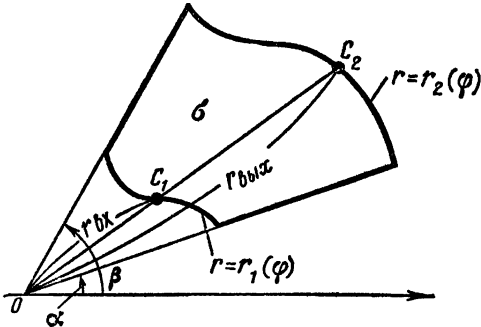


Рис. 240

В частности, если замкнутая кривая — окружность радиуса R с центром в начале координат, то

$$\iint_{\sigma} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr. \quad (14)$$

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint_{\sigma} \sqrt{4-x^2-y^2} d\sigma$, где σ есть круг радиуса 2 с центром в начале координат.

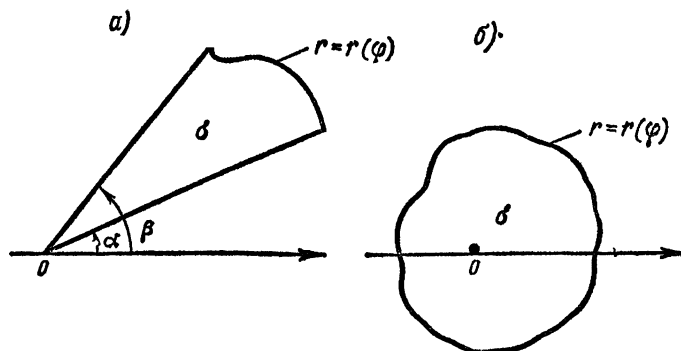


Рис. 241

Решение. Применяя формулу (10), получим

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \sqrt{4-x^2-y^2} d\sigma &= \iint_{\sigma} \sqrt{4-(r \cos \varphi)^2-(r \sin \varphi)^2} r dr d\varphi = \\ &= \iint_{\sigma} \sqrt{4-r^2} r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Применяя к этому интегралу формулу (14), найдем

$$\iint_{\sigma} \sqrt{4-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4-r^2} r dr.$$

Вычисление внутреннего интеграла дает:

$$\int_0^2 \sqrt{4-r^2} r dr = -\frac{(4-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^2 = \frac{8}{3},$$

поэтому

$$\iint_{\sigma} \sqrt{4-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{8}{3} d\varphi = \frac{16}{3} \pi.$$

Итак,

$$\iint_{\sigma} \sqrt{4-x^2-y^2} d\sigma = \frac{16}{3} \pi.$$

Заметим, что вычисление этого же интеграла в декартовых координатах сопряжено с более громоздкими вычислениями.

Пример 2. Найти объем тела, вырезанного из шара радиуса R прямым круговым цилиндром диаметра R , образующая которого проходит через центр шара.

Решение. Поместим начало координат в центр шара, направив ось Oz по образующей цилиндра, а ось Ox — вдоль диаметра основания цилиндра. В силу симметрии тела относительно плоскостей Oxy и Oxz достаточно найти объем части тела,

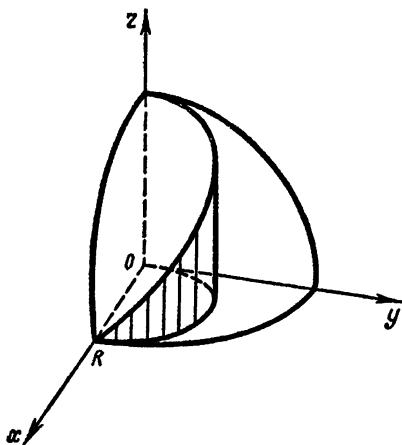


Рис. 242

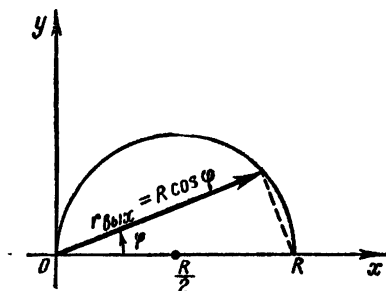


Рис. 243

находящейся в первом октанте, и полученный результат учетверить (рис. 242). Следовательно,

$$V = 4 \iiint_{\sigma} z \, d\sigma,$$

где z — аппликата точек сферы, а σ — полукруг в плоскости Oxy радиуса $\frac{R}{2}$ с центром в точке $(\frac{R}{2}; 0)$ (рис. 243).

Так как уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, то в первом октанте $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ и, следовательно,

$$V = 4 \iint_{\sigma} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, d\sigma.$$

Переходя к полярным координатам, согласно формуле (10) получим

$$V = 4 \iint_{\sigma} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, d\sigma = 4 \iint_{\sigma} \sqrt{R^2 - r^2} \, r \, dr \, d\varphi.$$

Замечая, что $r_{вх} = 0$, $r_{вых} = R \cos \varphi$, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 243), по формуле (12) получим

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - r^2} \, r \, dr \, d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - r^2} \, r \, dr.$$

Так как

$$\int_0^{R \cos \varphi} \sqrt{R^2 - r^2} r dr = - \frac{(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^{R \cos \varphi} =$$

$$= - \frac{(R^2 - R^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{R^3}{3} = \frac{R^3}{3} (1 - \sin^3 \varphi),$$

то

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi = \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

Итак, искомый объем

$$V = \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \text{ куб. ед.}$$

6. Приложение двойного интеграла

В гл. VIII, § 3, п. 8 были рассмотрены общие принципы, лежащие в основе решения задач методом интегральных сумм. Эти принципы остаются в силе и при решении задач на приложение двойного интеграла. В самом деле, при решении задач, связанных с нахождением объема цилиндрического тела и массы плоской пластины, применялся один и тот же прием. Нахождение интересующей нас величины (которую мы обозначим через Q) приводило к нахождению предела интегральной суммы. В разобранных задачах искомая величина Q была связана с некоторой областью σ плоскости Oxy и функцией $f(x, y)$, определенной в точках этой области. Кроме того, искомая величина обладала двумя свойствами: 1) свойством аддитивности и 2) свойством линейности в малом.

Свойство аддитивности. Разобьем область σ на малые площадки $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Каждой из этих малых площадок соответствует свое значение величины Q : $\Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots, \Delta Q_n$.

Величину Q мы назовем *аддитивной*, если при любом разбиении области σ на части $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ имеет место равенство:

$$Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \dots + \Delta Q_n = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i. \quad (15)$$

Так, например, масса m всей области σ равнялась сумме масс Δm_i малых площадок $\Delta\sigma_i$.

Свойство линейности в малом. Пусть P — произвольно выбранная точка области σ и площадка $\Delta\sigma$ — малая часть σ , содержащая точку P . Мы предполагаем, что величина ΔQ , соответствующая площадке $\Delta\sigma$, приблизительно пропорциональна ее площади;

$$\Delta Q \approx k \Delta\sigma. \quad (16)$$

Отношение $\frac{\Delta Q}{\Delta \sigma}$ мало отличается от числа k . Это следует понимать в том смысле, что существует $\lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta \sigma} = k$ при условии, что площадка $\Delta \sigma$ произвольным образом стягивается в точку P . Каждой точке P соответствует свое значение коэффициента k , т. е. k является некоторой функцией точки P : $k = f(P)$. Эта функция называется плотностью величины Q в точке P .

Формулу (16) можно записать в виде

$$\Delta Q \approx f(P) \Delta \sigma. \quad (17)$$

Покажем, что если искомая величина Q обладает свойствами 1) и 2), то ее нахождение сводится к вычислению двойного интеграла. Действительно:

1) Разбивая область σ на n малых площадок $\Delta \sigma_i$, мы в силу аддитивности величины Q имеем

$$Q = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i; \quad (18)$$

2) в пределах каждой малой площадки $\Delta \sigma_i$ величина ΔQ_i в силу свойства (2) приблизительно пропорциональна $\Delta \sigma_i$, т. е.

$$\Delta Q_i \approx f(P_i) \Delta \sigma_i; \quad (19)$$

3) таким образом, для Q имеем следующее приближенное выражение:

$$Q = \sum_{i=1}^n \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta \sigma_i. \quad (20)$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (20), является интегральной суммой для функции $f(P)$.

Точность приближенного равенства (20) повышается с уменьшением размеров площадки $\Delta \sigma_i$. Переходя к пределу при неограниченном увеличении числа n малых площадок и при стягивании каждой из них в точку, получим точное значение искомой величины Q :

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta \sigma_i = \iint_{\sigma} f(P) d\sigma.$$

Выражение $f(P) d\sigma$ называют элементом искомой величины и обозначают через dQ : $dQ = f(P) d\sigma$.

Таким образом, если величина Q обладает свойствами 1) и 2), то ее можно найти как двойной интеграл от ее элемента: $Q = \iint_{\sigma} dQ$.

Рассмотрим еще ряд задач, приводящих к двойному интегралу.

Статические моменты; центр тяжести плоской фигуры. Статическим моментом S_x относительно оси Ox материальной точки $P(x, y)$, лежащей в плоскости Oxy и имеющей массу m , называют произведение массы точки на ее ординату, т. е. $S_x = my$. Аналогично определяют статический момент S_y относительно оси Oy : $S_y = mx$.

Если дана система, состоящая из нескольких материальных точек, то статический момент системы относительно оси координат определяют как сумму соответствующих статических моментов точек этой системы.

Пусть теперь в плоскости Oxy задана материальная площадка σ , поверхностная плотность γ которой в любой точке есть заданная функция координат этой точки: $\gamma = \gamma(x, y)$.

Для нахождения статических моментов S_x и S_y этой площадки поступим следующим образом.

Разобьем площадку σ на n малых площадок $\Delta\sigma_i$. В каждой малой площадке $\Delta\sigma_i$ выберем произвольную точку $P_i(x_i; y_i)$. Считая плотность в каждой малой площадке постоянной, равной плотности в выбранной точке P_i , получим приближенное выражение для массы Δm_i этой площадки:

$$\Delta m_i \approx \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i. \quad (21)$$

Заменим каждую малую площадку $\Delta\sigma_i$ материальной точкой $P_i(x_i; y_i)$ с массой Δm_i . Статические моменты этой точки относительно осей дадут приближенные значения статических моментов $\Delta S'_x$ и $\Delta S'_y$ площадки $\Delta\sigma_i$:

$$\begin{aligned} \Delta S'_x &\approx y_i \Delta m_i \approx y_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i, \\ \Delta S'_y &\approx x_i \Delta m_i \approx x_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i. \end{aligned}$$

Так как статический момент всей площадки равен сумме статических моментов малых площадок $\Delta\sigma_i$ (по свойству аддитивности), то для S_x и S_y получим следующие приближенные равенства:

$$\begin{aligned} S_x &\approx \sum_{i=1}^n y_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i, \\ S_y &\approx \sum_{i=1}^n x_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i. \end{aligned}$$

За точное значение каждого из статических моментов принимаем предел соответствующей интегральной суммы, когда все малые площадки стягиваются в точки:

$$\begin{aligned} S_x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} y \gamma(x, y) d\sigma, \\ S_y &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \gamma(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} x \gamma(x, y) d\sigma. \end{aligned} \quad (22)$$

З а м е ч а н и е. Эту же задачу можно решить и так: в площадке σ выделим «бесконечно малую» площадку $d\sigma$, столь малую, что ее положение характеризуется некоторой точкой $P(x; y)$, принадлежащей площадке $d\sigma$. Подсчитаем элемент статического момента элементарной площадки $d\sigma$ относительно оси Ox , считая, что вся масса dm площадки $d\sigma$ сосредоточена в точке $P(x; y)$: $dS_x = y dm$. Так как

$dm = \gamma(x; y) d\sigma$, то $dS_x = y\gamma(x; y) d\sigma$. Взяв двойной интеграл от dS_x по площадке σ , найдем

$$S_x = \iint_{\sigma} dS_x = \iint_{\sigma} y\gamma(x, y) d\sigma.$$

Аналогично

$$dS_y = x\gamma(x, y) d\sigma \quad \text{и} \quad S_y = \iint_{\sigma} x\gamma(x, y) d\sigma.$$

Как известно из механики, координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ центра тяжести плоской материальной системы определяются равенствами:

$$\bar{x} = \frac{S_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{S_x}{m}, \quad (23)$$

где m — масса системы, а S_x и S_y — статические моменты системы. В частности, так как масса плоской площадки σ равна $\iint_{\sigma} \gamma(x, y) d\sigma$ (см. § 1, п. 2), то, применяя формулы (22) и (23), получим следующие выражения для координат центра тяжести плоской пластинки:

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\sigma} x\gamma(x, y) d\sigma}{\iint_{\sigma} \gamma(x, y) d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_{\sigma} y\gamma(x, y) d\sigma}{\iint_{\sigma} \gamma(x, y) d\sigma}.$$

В частности, если пластинка однородная, $\gamma = \gamma_0$, то

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\sigma} x\gamma_0 d\sigma}{\iint_{\sigma} \gamma_0 d\sigma} = \frac{\gamma_0 \iint_{\sigma} x d\sigma}{\gamma_0 \iint_{\sigma} d\sigma} = \frac{\iint_{\sigma} x d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma}.$$

Аналогично

$$\bar{y} = \frac{\iint_{\sigma} y d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma}.$$

Так как $\iint_{\sigma} d\sigma = \sigma$ (см. § 1, п. 2, замечание), то

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\sigma} x d\sigma}{\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_{\sigma} y d\sigma}{\sigma}. \quad (24)$$

Пример 1. Найти координаты центра тяжести однородной площадки, ограниченной параболой $y = 4 - x^2$ и осью Ox (рис. 244).

Решение. Так как фигура симметрична относительно оси Oy , то без вычислений ясно, что $\bar{x} = 0$. Ординату $\bar{y}$ центра тяжести

подсчитаем по формуле (24). Для этого найдем статический момент S_x :

$$\begin{aligned} S_x &= \iint_{\sigma} y d\sigma = \int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} y dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (4-x^2)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (16-8x^2+x^4) dx = \frac{256}{15}, \end{aligned}$$

и определим площадь σ :

$$\sigma = \iint_{\sigma} d\sigma = \int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} dy = \int_{-2}^2 (4-x^2) dx = \frac{32}{3}.$$

Следовательно, по формуле (24)

$$\bar{y} = \frac{\iint_{\sigma} y d\sigma}{\iint_{\sigma} d\sigma} = \frac{\frac{256}{15}}{\frac{32}{3}} = \frac{8}{5}.$$

Итак, координаты центра тяжести таковы: $\bar{x}=0, \bar{y}=\frac{8}{5}$.

Момент инерции. Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси называют произведение массы этой точки на квадрат ее расстояния до оси.

Пусть теперь дана плоская материальная площадка σ , плотность γ которой есть заданная функция координат: $\gamma = \gamma(x, y)$. Найдем моменты инерции этой площадки относительно осей Ox и Oy . Выделив малую площадку $d\sigma$, найдем элементы ее моментов инерции относительно координатных осей*:

$$dI_x = y^2 dm = y^2 \gamma(x, y) d\sigma, \quad dI_y = x^2 dm = x^2 \gamma(x, y) d\sigma.$$

Взяв двойной интеграл от dI_x и dI_y по площадке σ , найдем искомые моменты инерции:

$$I_x = \iint_{\sigma} y^2 \gamma(x, y) d\sigma, \quad I_y = \iint_{\sigma} x^2 \gamma(x, y) d\sigma. \quad (25)$$

Пример 2. Найти момент инерции относительно оси Oy однородной площадки примера 1, считая, что плотность $\gamma = 1$.

Решение. По формуле (25) имеем

$$I_y = \iint_{\sigma} x^2 \gamma d\sigma = \iint_{\sigma} x^2 d\sigma = \int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} x^2 dy = \int_{-2}^2 x^2 (4-x^2) dx = \frac{128}{15}.$$

* Очевидно, момент инерции есть величина аддитивная.

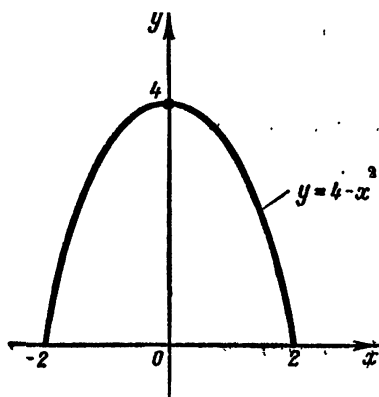


Рис. 244

Площадь поверхности. В гл. VIII решалась задача о вычислении площади поверхности вращения. Теперь решим более общую задачу: вычислить площадь части поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$.

Предварительно докажем лемму.

Лемма. Пусть σ — площадь проекции плоской фигуры с площадью Ω на некоторую плоскость. Тогда

$$\sigma = \Omega \cos \varphi, \quad (26)$$

где φ — острый угол между плоскостью проекции и плоскостью фигуры (рис. 245).

Как известно, формула (26) справедлива для треугольников. Так как любой плоский многоугольник можно разбить на несколько треугольников, то формула (26), очевидно, остается справедливой и для плоских многоугольников.

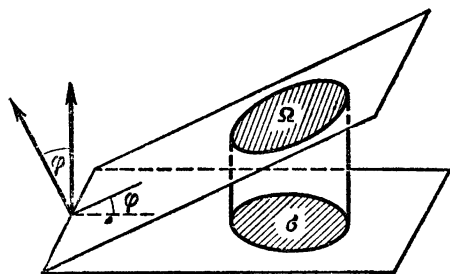


Рис. 245

Пусть теперь дана плоская фигура площади Ω , ограниченная некоторой кривой. Так как ее площадь можно рассматривать как предел площадей вписанных в нее многоугольников, то формула (26), справедливая для многоугольников, будет справедлива и в пределе.

Перейдем теперь к вычислению площади S поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$. При этом будем считать, что как сама функция $f(x, y)$, так и ее частные производные первого порядка непрерывны в области σ плоскости Oxy , в которую проектируется поверхность S .

Разобьем область σ на n малых площадок $\Delta\sigma_i$. Через $\Delta\sigma_i$ обозначим ту часть поверхности S , которая проектируется в площадку $\Delta\sigma_i$. Ясно, что $S = \sum_{i=1}^n \Delta S_i$ *.

Для того чтобы вычислить площадь ΔS_i , поступим следующим образом: в каждой малой площадке $\Delta\sigma_i$ выберем по точке $P_i(x_i, y_i)$. Точке $P_i(x_i, y_i)$ соответствует на поверхности S точка M_i , аппликата которой $z_i = f(P_i) = f(x_i, y_i)$. Проведем в точке M_i касательную плоскость и рассмотрим ее кусок $\Delta\Omega_i$, который проектируется в площадку $\Delta\sigma_i$ (рис. 246). Площадь $\Delta\Omega_i$ этой части касательной плоскости примем за приближенное значение площади куска поверхности ΔS_i :

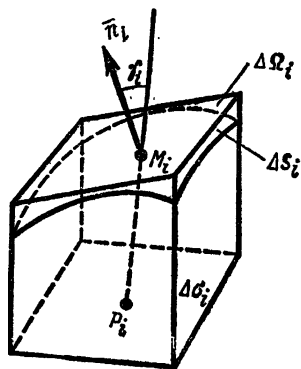


Рис. 246

$$\Delta S_i \approx \Delta\Omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

* Через S и ΔS_i обозначены как поверхности, так и их площади.

Таким образом, вся поверхность S «покрывается» плоскими пластинками $\Delta\Omega_i$, сумма площадей которых дает приближенное значение площади поверхности:

$$S \approx \sum_{i=1}^n \Delta\Omega_i.$$

За площадь поверхности S принимают, по определению, предел, к которому стремится сумма $\sum_{i=1}^n \Delta\Omega_i$, когда число малых площадок $\Delta\sigma_i$ стремится к бесконечности и при этом каждая площадка $\Delta\sigma_i$ стягивается в точку:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta\Omega_i. \quad (27)$$

Площадь $\Delta\Omega_i$ найти легко. Так как $\Delta\sigma_i$ является проекцией площадки $\Delta\Omega_i$, то по формуле (26) имеем

$$\Delta\sigma_i = \Delta\Omega_i \cos \gamma_i, \quad \text{или} \quad \Delta\Omega_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos \gamma_i},$$

где γ_i — острый угол между площадками $\Delta\Omega_i$ и $\Delta\sigma_i$. Угол γ_i между этими площадками равен углу между перпендикулярами к ним, т. е. углу между нормалью к поверхности в точке M_i и осью Oz . Принимая во внимание выражение для $\cos \gamma_i$ (см. гл. IX, § 6, п. 4), получим

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi_x'^2(x_i, y_i) + \varphi_y'^2(x_i, y_i)}}.$$

Следовательно,

$$\Delta\Omega_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos \gamma_i} = \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x_i, y_i) + \varphi_y'^2(x_i, y_i)} \cdot \Delta\sigma_i.$$

Подставив это выражение в равенство (27), получим

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta\Omega_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x_i, y_i) + \varphi_y'^2(x_i, y_i)} \Delta\sigma_i.$$

Сумма, стоящая в правой части последнего равенства, есть интегральная сумма для функции $\sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)}$. Так как в силу непрерывности частных производных эта функция непрерывна, то ее предел существует и равен двойному интегралу:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x_i, y_i) + \varphi_y'^2(x_i, y_i)} \Delta\sigma_i &= \\ &= \iint_{\sigma} \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)} d\sigma. \end{aligned}$$

Итак, площадь S части поверхности $z = \varphi(x, y)$, проектирующейся в площадку σ плоскости Oxy , вычисляется по формуле

$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)} d\sigma. \quad (28)$$

Под знаком двойного интеграла стоит элемент площади поверхности

$$dS = \sqrt{1 + \varphi'_x{}^2(x, y) + \varphi'_y{}^2(x, y)} d\sigma = \frac{d\sigma}{\cos \gamma}. \quad (29)$$

Пример 3. Вычислить площадь той части параболоида вращения $z = x^2 + y^2$, которая вырезается цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ (рис. 247).

Решение. Применяем формулу (28). Здесь $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$; $\varphi'_x = 2x$, $\varphi'_y = 2y$, тогда $\sqrt{1 + \varphi'^2_x + \varphi'^2_y} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$. Следова-

тельно, $S = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} d\sigma$, где

σ — круг радиуса 2 с центром в начале координат (см. рис. 247). Вычисление интеграла проводим в полярных координатах:

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} d\sigma = \\ &= \iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr. \end{aligned}$$

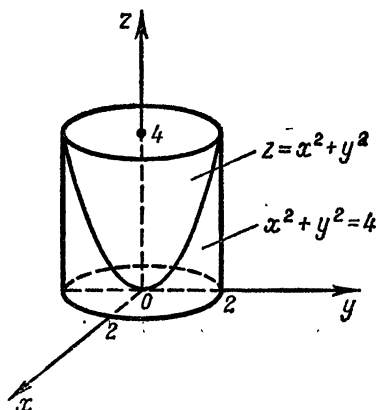


Рис. 247

Внутренний интеграл

$$\int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{1}{12} (17\sqrt{17} - 1).$$

Следовательно,

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (17\sqrt{17} - 1) d\varphi = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1).$$

§ 2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Задача о массе

Пусть в пространстве $Oxyz$ дано некоторое материальное тело V . Рассмотрим некоторую его часть — малое тело ΔV , содержащее точку $P(x; y; z)$. Отношение массы Δm этого малого тела к его объему ΔV , т. е. $\frac{\Delta m}{\Delta V}$, называется средней плотностью тела ΔV . Если существует предел γ отношения $\frac{\Delta m}{\Delta V}$ при условии, что малое тело ΔV стягивается в точку $P(x; y; z)$, то этот предел называется плотностью в точке P . Он зависит от положения точки $P(x; y; z)$ и поэтому является некоторой функцией ее координат: $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Вычислим массу m тела объема V , зная, что плотность в каждой точке тела есть заданная непрерывная функция координат точки $P(x; y; z)$: $\gamma = \gamma(x, y, z)$.

Если бы тело V было однородным, т. е. плотность γ в каждой его точке была бы одной и той же, равной γ_0 , то его масса m была бы равна

$$m = \gamma_0 V, \quad (30)$$

где V — объем тела.

Так как в общем случае плотность γ меняется от точки к точке, то формула (30) для определения массы тела непригодна. Поэтому мы поступим следующим образом.

Разобьем тело V на n малых тел $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ так, что $V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i$. В каждом малом теле ΔV_i выберем по точке $P_i(x_i; y_i; z_i)$.

Если тела ΔV_i взять достаточно малыми, то в пределах каждого такого тела плотность изменяется незначительно и мало отличается от плотности $\gamma_i = \gamma(P_i) = \gamma(x_i, y_i, z_i)$ в точке P_i . Считая плотность в каждой точке малого тела ΔV_i постоянной и равной плотности в точке P_i , подсчитаем приближенно его массу Δm_i .

$$\Delta m_i \approx \gamma_i \Delta V_i = \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Так как масса m всего тела равна $\sum_{i=1}^n \Delta m_i$, то получаем для ее вычисления следующее приближенное равенство:

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

За точное значение массы m принимаем предел этой интегральной суммы, когда каждое из малых тел ΔV_i стягивается в точку:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Решение задачи о массе тела привело нас к рассмотрению предела сумм определенного вида. Так как к нахождению предела сумм такого вида сводятся многие задачи геометрии, физики и т. д., то естественно изучить свойства пределов таких сумм в общем виде, независимо от той или иной задачи, что приведет нас к понятию тройного интеграла.

2. Тройной интеграл и его свойства

Пусть в пространстве задана область, объем которой равен V . Пусть в каждой точке P этой области определена функция $u = f(P) = f(x, y, z)$. Выполним теперь следующие действия.

1. Разобьем тело на n малых тел $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$, причем $\sum_{i=1}^n \Delta V_i = V^*$.

* В дальнейшем V и ΔV_i обозначают как тела, так и их объемы.

2. В каждом из малых тел ΔV_i выберем произвольную точку $P_i(x_i; y_i; z_i)$. Умножим значение функции $u = f(P)$ в точке P_i на объем ΔV_i малого тела, которому принадлежит точка P_i :

$$f(P_i) \Delta V_i = f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

3. Составим сумму всех таких произведений:

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Эта сумма называется *интегральной суммой*.

4. Рассмотрим предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа n малых тел ΔV_i и при стягивании каждого из них в точку. Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения области V на малые тела ΔV_i , ни от выбора в каждом из них точки $P_i(x_i; y_i; z_i)$, то его называют *тройным интегралом* от функции $u = f(P) = f(x, y, z)$ по области V и обозначают так:

$$\iiint_V f(P) dV, \text{ или } \iiint_V f(x, y, z) dv.$$

Таким образом,

$$\iiint_V f(P) dV = \iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Возвращаясь к п. 1, заключаем, что масса m тела V равна тройному интегралу от переменной плотности $\gamma = \gamma(x, y, z)$, т. е.

$$m = \iiint_V \gamma(x, y, z) dV.$$

Мы видим, что тройной интеграл является непосредственным обобщением двойного интеграла на случай, когда областью интегрирования является тело трех измерений. Так же, как и в случае двойного интеграла, имеет место теорема существования тройного интеграла, которую приводим без доказательства.

Теорема существования. Для всякой функции $u = f(x, y, z)$, непрерывной в ограниченной замкнутой области, имеющей объем V , существует тройной интеграл, т. е. существует предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа малых тел ΔV_i при условии, что каждое из них стягивается в точку. Этот предел не зависит ни от способа разбиения области V на части, ни от выбора точек $P_i(x_i; y_i; z_i)$.

Тройной интеграл обладает теми же свойствами, что и двойной интеграл.

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак тройного интеграла*, т. е.

$$\iiint_V k f(x, y, z) dV = k \iiint_V f(x, y, z) dV.$$

2. Тройной интеграл от суммы нескольких функций равен сумме тройных интегралов от слагаемых, т. е.

$$\iiint_V [f(x, y, z) + \varphi(x, y, z)] dV = \iiint_V f(x, y, z) dV + \iiint_V \varphi(x, y, z) dV.$$

3. Если в области интегрирования $f(x, y, z) \geq 0$, то

$$\iiint_V f(x, y, z) dV \geq 0.$$

4. Если в области интегрирования $f(x, y, z) \geq \varphi(x, y, z)$, то

$$\iiint_V f(x, y, z) dV \geq \iiint_V \varphi(x, y, z) dV.$$

5. Теорема о среднем значении. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области V , то в этой области существует такая точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$, что

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = f(x_0, y_0, z_0) V,$$

где V — объем области

6. Свойство аддитивности. Если область интегрирования V разбита на k частей $V_1, V_2, \dots, V_k$, то

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dV &= \iiint_{V_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dV + \dots \\ &\dots + \iiint_{V_k} f(x, y, z) dV. \end{aligned}$$

В заключение этого пункта отметим, что если в области V подынтегральная функция $f(x, y, z) \equiv 1$, то тройной интеграл численно равен объему области, т. е.

$$\iiint_V dV = V.$$

Это следует из того, что в данном случае $f(x, y, z) \equiv 1$, т. е. любая интегральная сумма имеет вид $\sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta V_i = V$ и численно равна объему тела.

3. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов. Предположим, что областью интегрирования V является тело, ограниченное снизу поверхностью $z = g(x, y)$, а сверху — поверхностью $z = h(x, y)$. Пусть это тело проектируется на плоскость Oxy в площадку σ , ограниченную кривыми $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ [$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$] и прямыми

$x=a$, $x=b$ ($a < b$) (рис. 248). Проведем через точку $P(x; y; 0)$ площадку σ прямую, параллельную оси Oz . Эта прямая встретит нижнюю поверхность $z=g(x, y)$ в некоторой точке M и верхнюю поверхность $z=h(x, y)$ в точке N . Точку M назовем точкой входа, а точку N — точкой выхода, а их аппликаты обозначим соответственно $z_{\text{вх}}$ и $z_{\text{вых}}$.

Тогда, если $f(x, y, z)$ — непрерывная функция в области V , то, как можно доказать, значение тройного интеграла $\iiint_V f(x, y, z) dV$ вычисляется по формуле

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{\sigma} \left\{ \int_{z_{\text{вх}}=g(x, y)}^{z_{\text{вых}}=h(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} d\sigma. \quad (31)$$

Смысл формулы (31) заключается в следующем.

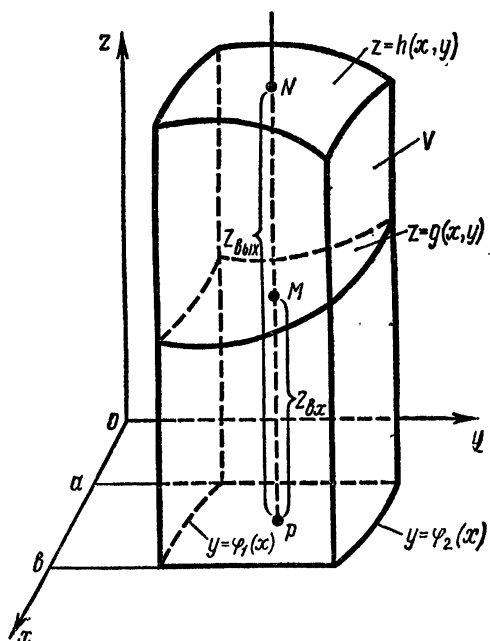


Рис. 248

Для того чтобы вычислить тройной интеграл $\iiint_V f(x, y, z) dV$,

нужно сперва вычислить определенный интеграл $\int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz$,

считая x и y постоянными. Нижней границей интеграла является аппликата точки M входа: $z_{\text{вх}}=g(x, y)$, а верхней границей интегрирования — аппликата $z_{\text{вых}}=h(x, y)$ точки выхода N . Результат вычисления этого интеграла есть функция двух переменных x и y . Интегрируя затем эту функцию по площадке σ , являющейся

проекцией области V на плоскость Oxy , получим значение тройного интеграла. Вычисляя двойной интеграл по площадке σ от функции $f(x, y, z)$ в декартовых координатах (см. § 1, п. 4, формулу (1)),

получим

$$\iint_{\sigma} \left\{ \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left\{ \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dy.$$

Таким образом,

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left\{ \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dy. \quad (32)$$

Опуская фигурные скобки, формулы (31) и (32) обычно пишут в виде

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{\sigma} d\sigma \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (33)$$

или

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Если область V более сложная, чем рассмотренная, то ее разбивают на конечное число областей $V_1, V_2, \dots, V_k$ указанного вида и к каждой из них применяют формулу (33). Интеграл же по всей области в силу свойства аддитивности равен сумме интегралов по каждой из областей V_i .

Пример. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V z dV$, если областью интегрирования V служит пирамида, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ (рис. 249).

Решение. Площадка σ , в которую проектируется пирамида, есть треугольник плоскости Oxy , ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=1$. Так как $z_{\text{вх}}=0$, а $z_{\text{вых}}=1-x-y$, то на основании формулы (33) имеем

$$\iiint_V z dV = \iint_{\sigma} d\sigma \int_0^{1-x-y} z dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz.$$

Вычисляя последовательно интегралы, получим

$$\int_0^{1-x-y} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} = \frac{(1-x-y)^2}{2},$$

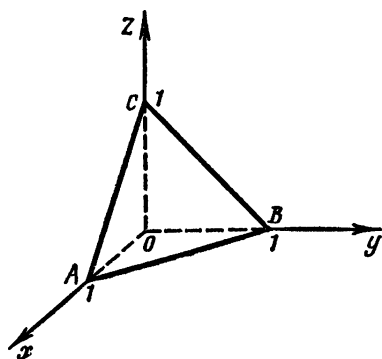


Рис. 249

$$\int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy = -\frac{(1-x-y)^3}{6} \Big|_0^{1-x} = \frac{(1-x)^3}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = -\frac{(1-x)^4}{24} \Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

Итак,

$$\iiint_V z dV = \frac{1}{24}.$$

4. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Наряду с декартовыми координатами часто применяются цилиндрические координаты. Рассмотрим точку M в системе координат $Oxyz$. Пусть N — проекция точки M на плоскость Oxy . Положение точки M в пространстве можно определить, задав полярные координаты r и φ точки N в плоскости Oxy и аппликату z точки M (рис. 250).

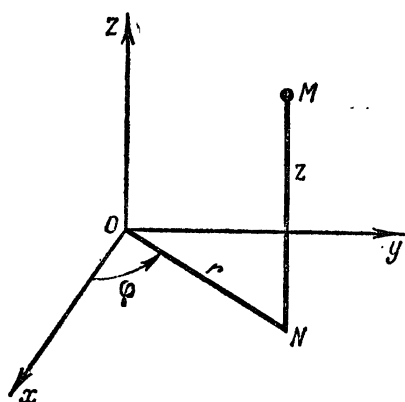


Рис. 250

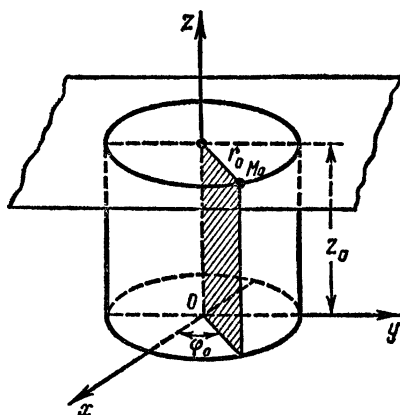


Рис. 251

Эти три числа r , φ и z называются *цилиндрическими координатами* точки M . Цилиндрические координаты точки связаны с декартовыми координатами x , y , z следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{34}$$

В декартовой системе координат точка M_0 с координатами $(x_0; y_0; z_0)$ является точкой пересечения плоскостей $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. В цилиндрической системе координат точка $M_0(r_0; \varphi_0; z_0)$ является пересечением следующих трех поверхностей: $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$, $z = z_0$ (рис. 251).

Первому уравнению $r = r_0$, очевидно, соответствует в пространстве прямой круговой цилиндр радиуса r_0 , образующие которого параллельны оси Oz (ось цилиндра). Заметим, что при $r_0 = 0$ цилиндр вырождается в ось Oz . Уравнению $\varphi = \varphi_0$ соответствует полуплоскость, проходящая через ось Oz и составляющая с плоскостью Oxz угол φ_0 . Уравнению $z = z_0$ соответствует плоскость, параллельная плоскости Oxy и пересекающая ось Oz в точке с аппликатой z_0 . Таким образом, мы имеем три семейства поверхностей $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$, называемых *координатными поверхностями*.

Уравнению $z = f(x, y)$ соответствует в пространстве некоторая поверхность. Если вместо x , y и z подставить их выражения через цилиндрические координаты по формулам (34), то мы получим уравнение поверхности в цилиндрических координатах $z = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

Вычисление тройного интеграла часто сильно упрощается при переходе от декартовых координат к цилиндрическим. Пусть требуется вычислить тройной интеграл $\iiint_V f(x, y, z) dV$ по области V пространства $Oxyz$.

Как мы знаем, имеет место следующая формула (33):

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{\sigma} d\sigma \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

где σ — область плоскости Oxy , являющаяся проекцией тела V , а $g(x, y)$ и $h(x, y)$ — аппликаты входа и выхода. Допустим, что область σ такова, что двойной интеграл по этой области легче вычислить в полярных координатах. Тогда формулу (33) можно записать в таком виде:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_{\sigma} d\sigma \int_{g(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{h(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$$

Применяя для вычисления двойного интеграла, стоящего в правой части последнего равенства, правила вычисления двойного интеграла в полярных координатах, получим

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr \int_{g(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{h(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz, \quad (33')$$

где $r_1(\varphi) = r_{\text{вх}}$, $r_2(\varphi) = r_{\text{вых}}$.

Это и есть формула для вычисления тройного интеграла в цилиндрических координатах.

Пример. Определить массу m прямого кругового цилиндра V высоты H и радиуса R , если плотность γ в любой его точке равна расстоянию r от этой точки до оси цилиндра: $\gamma = r$.

Решение. Выберем систему координат, как указано на рис. 252.

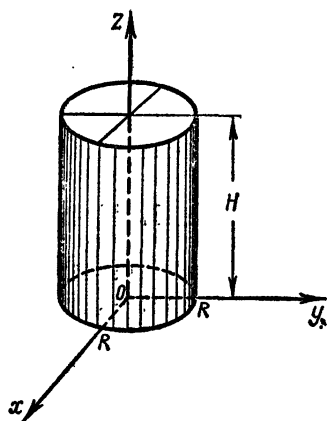


Рис. 252

Масса m цилиндра V равна тройному интегралу от плотности γ :

$$m = \iiint_V \gamma dV = \iiint_V r dV,$$

где областью интегрирования является цилиндр V . Вычислим этот интеграл в цилиндрических координатах. Проекцией цилиндра на плоскость Oxy является круг радиуса R с центром в начале координат.

$$z_{\text{вх}} = 0, \quad z_{\text{вых}} = H.$$

Применяя формулу (33'), получим:

$$m = \iiint_V r dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_0^H r dz = H \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi R^3 H}{3}.$$

Итак, искомая масса

$$m = \frac{2\pi R^3 H}{3}.$$

Б. Приложения тройного интеграла

Принципы, лежащие в основе применения тройного интеграла к решению физических задач, аналогичны принципам, лежащим в основе применения двойного интеграла, изложенным в п. 6, § 1. К тройным интегралам приводят, например, задачи, связанные с пространственным распределением массы. Рассмотрим некоторые из этих задач.

Статические моменты; центр тяжести. Как известно, *статическим моментом* S_{xy} материальной точки массы m относительно плоскости Oxy называется произведение массы точки на ее аппликату: $S_{xy} = mz$. Аналогично определяются статические моменты S_{yz} и S_{xz} соответственно относительно плоскостей Oyz и Oxz : $S_{yz} = mx$, $S_{xz} = my$. Если дана система, состоящая из нескольких материальных точек, то ее статический момент определяется как сумма соответствующих статических моментов материальных точек, составляющих эту систему.

Пусть теперь в пространстве задано тело V , плотность которого в любой точке есть функция координат этой точки: $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Вычислим статический момент S_{xy} этого тела.

Разобьем тело V на n малых тел ΔV_i ($i = 1, 2, \dots, n$). В каждом малом теле ΔV_i выберем произвольно по точке $P_i(x_i; y_i; z_i)$. Считая приближенно плотность в каждой точке малого тела ΔV_i постоянной, равной плотности в выбранной точке P_i , получим приближенное выражение для массы Δm_i этого малого тела:

$$\Delta m_i \approx \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Заменим каждое малое тело ΔV_i материальной точкой $P_i(x_i; y_i; z_i)$ с массой Δm_i . Статический момент этой точки относительно коор-

динатной плоскости Oxy даст приближенное значение статического момента ΔS_{xy}^i :

$$\Delta S_{xy}^i \approx z_i \Delta m_i \approx z_i \gamma (x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

По свойству аддитивности статический момент всего тела равен сумме статических моментов тел ΔV_i . Поэтому для S_{xy} получим следующее приближенное равенство:

$$S_{xy} \approx \sum_{i=1}^n z_i \gamma (x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

В пределе при условии, что малые тела ΔV_i стягиваются в точки, получим точное значение статического момента:

$$S_{xy} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n z_i \gamma (x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \iiint_V z \gamma (x, y, z) dV.$$

Итак,

$$S_{xy} = \iiint_V z \gamma (x, y, z) dV. \quad (35)$$

Аналогично, для статических моментов тела V относительно плоскостей Oyz и Oxz получим

$$S_{yz} = \iiint_V x \gamma (x, y, z) dV, \quad S_{xz} = \iiint_V y \gamma (x, y, z) dV. \quad (35')$$

Координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ центра тяжести тела V определяются равенствами, аналогичными равенствам (23), п. 6, § 1:

$$\bar{x} = \frac{S_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{S_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{S_{xy}}{m}, \quad (36)$$

где m — масса тела V . Так как масса m тела V , согласно п. 2 настоящего параграфа, определяется по формуле $m = \iiint_V \gamma (x, y, z) dV$, то, применяя формулы (35'), (35) и (36), найдем:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x \gamma (x, y, z) dV}{\iiint_V \gamma (x, y, z) dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_V y \gamma (x, y, z) dV}{\iiint_V \gamma (x, y, z) dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_V z \gamma (x, y, z) dV}{\iiint_V \gamma (x, y, z) dV}. \quad (37)$$

Для однородного тела $\gamma = \text{const}$, поэтому формулы (37) примут вид:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x dV}{\iiint_V dV}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_V y dV}{\iiint_V dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_V z dV}{\iiint_V dV},$$

или, так как $\iiint_V dV = V$, то

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x dV}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_V y dV}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_V z dV}{V}. \quad (38)$$

Пример. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом вращения $2z = 4 - x^2 - y^2$ и плоскостью $z = 0$ (рис. 253).

Решение. Исходя из симметрии тела относительно координатных плоскостей Oxy и Oyz , заключаем, что центр тяжести лежит на оси Oz и, следовательно, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Остается таким образом, найти аппликату $\bar{z}$ центра тяжести, которая определяется по формуле (38):

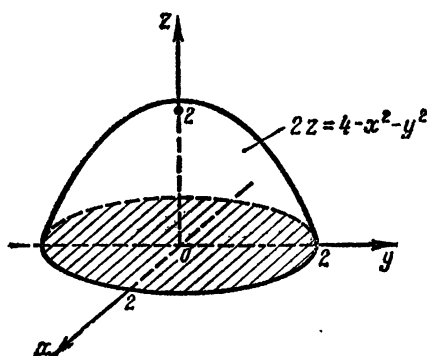


Рис. 253

$$\bar{z} = \frac{\iiint_V z \, dV}{V}.$$

Подсчитаем объем тела $V = \iiint_V dV$

и статический момент $S_{xy} = \iiint_V z \, dV$.

Вычисления будем проводить в цилиндрических координатах: $z_{\text{вх}} = 0$,

$z_{\text{вых}} = \frac{4 - x^2 - y^2}{2} = \frac{4 - r^2}{2}$. Площадка σ в плоскости Oxy — круг радиуса $r = 2$ с центром в начале координат. Поэтому

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \iiint_V z \, dV = \iint_{\sigma} d\sigma \int_0^{\frac{4-r^2}{2}} z \, dz = \iint_{\sigma} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\frac{4-r^2}{2}} d\sigma = \frac{1}{8} \iint_{\sigma} (4-r^2)^2 d\sigma = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4-r^2)^2 r \, dr = \frac{8}{3} \pi. \end{aligned}$$

$$V = \iiint_V dV = \iint_{\sigma} d\sigma \int_0^{\frac{4-r^2}{2}} dz = \iint_{\sigma} \frac{4-r^2}{2} d\sigma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4-r^2) r \, dr = 4\pi.$$

Таким образом,

$$\bar{z} = \frac{\frac{8}{3} \pi}{4\pi} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, координаты центра тяжести таковы:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = \frac{2}{3}.$$

Момент инерции. Момент инерции I_x материальной точки массы m относительно оси Ox равен произведению массы этой точки на квадрат расстояния от этой точки до оси Ox .

Так как квадрат расстояния точки $P(x; y; z)$ до оси Ox равен $y^2 + z^2$, то

$$I_x = (y^2 + z^2) m.$$

Аналогично определяются моменты инерции относительно осей Oy и Oz :

$$I_y = (x^2 + z^2) m, \quad I_z = (x^2 + y^2) m.$$

Пусть дано тело V , плотность γ которого в любой точке есть заданная функция координат этой точки, т. е. $\gamma = \gamma(x, y, z)$. Найдем моменты инерции этого тела относительно осей координат. Выделив малое тело ΔV_i , найдем приближенно его момент инерции $\Delta I'_x$ относительно оси Ox :

$$\Delta I'_x \approx (y_i^2 + z_i^2) \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Пользуясь свойством аддитивности момента инерции, вычислим приближенно момент инерции тела V :

$$I_x \approx \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

В пределе при условии, что каждое из малых тел ΔV_i стягивается в точку, получим точное значение момента инерции:

$$I_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) \gamma(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV.$$

Итак,

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV. \quad (39)$$

Аналогичные формулы получим для моментов инерции I_y и I_z :

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV, \quad I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dV. \quad (39')$$

Пример. Определить момент инерции относительно оси Oz одно-родной пирамиды V (см. рис. 249) плотности $\gamma = 3$, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Решение. Применяя формулу (39'), имеем

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dV =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x^2 + y^2) 3dz = 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) (1-x-y) dy.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) (1-x-y) dy &= \int_0^{1-x} [x^2(1-x) - x^2y + y^2(1-x) - y^3] dy = \\ &= \left[x^2(1-x)y - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^3(1-x)}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^{1-x} = \frac{x^2(1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^4}{12}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$I_z = 3 \int_0^1 \left[\frac{x^2(1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^4}{12} \right] dx = \frac{1}{10}.$$

1. Векторное поле

В гл. IX, § 7 было введено понятие скалярного поля и изучены его основные свойства. Однако во многих вопросах приходится иметь дело с векторными полями.

Определение. Векторным полем называется область пространства или плоскости, каждой точке M которой поставлен в соответствие вектор Φ .

Проекции P , Q и R вектора Φ на координатные оси являются функциями координат точки M :

$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(x, y, z), \quad R = R(x, y, z).$$

Таким образом,

$$\Phi = \Phi(M) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

В частности, если поле задано на плоскости, то

$$\Phi = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}.$$

В качестве примера векторного поля рассмотрим поле сил тяготения. Если в начале координат помещена масса m , то эта масса создает поле сил тяготения, так как в каждой точке M пространства на помещенную в ней единичную массу действует сила, равная по величине, согласно закону Ньютона, $\frac{\kappa m}{|\mathbf{r}|^2}$ и направленная к началу координат. Здесь $\mathbf{r} = \overline{OM}$, а κ — постоянная тяготения.

Следовательно,

$$\mathbf{F} = -\frac{\kappa m}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}_0,$$

где $\mathbf{r}_0 = \frac{\overline{OM}}{|\overline{OM}|} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ — единичный вектор (рис. 254).

Пусть x, y, z — координаты точки M . Тогда

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad |\overline{OM}| = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \mathbf{r}_0 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{F} = \frac{-\kappa m (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}.$$

Здесь

$$P = -\frac{\kappa m x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \quad Q = -\frac{\kappa m y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \quad R = -\frac{\kappa m z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}.$$

* В этой формуле знак «минус» стоит потому, что сила $\mathbf{F}$ имеет направление, противоположное направлению вектора $\mathbf{r}_0$.

2. Задача о работе. Криволинейный интеграл

Многие задачи физики приводят к очень важному обобщению понятия определенного интеграла—к криволинейному интегралу.

Рассмотрим, например, следующую задачу. Вдоль некоторой кривой L , находящейся в поле сил $\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, движется некоторая масса (материальная точка). Требуется определить работу сил поля при перемещении этой массы из точки A в точку B .

Из физики известно, что если материальная точка под действием постоянной силы $\mathbf{F}$ совершила прямолинейное перемещение, выражаемое вектором $\mathbf{l}$, то работа E силы $\mathbf{F}$ равна скалярному произведению силы $\mathbf{F}$ на $\mathbf{l}$ (см. гл. III, § 3, п. 8):

$$E = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}. \quad (40)$$

Так как в общем случае сила $\mathbf{F}$ меняется как по величине, так и по направлению, и так как перемещение по кривой L не является прямолинейным, то непосредственно применять формулу (40) нельзя. Поэтому мы поступим следующим образом. Разобьем кривую L в направлении от точки A к точке B на n «малых» дуг точками деления $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$. Начальную точку A кривой L обозначим через A_0 , конечную точку B через A_n (рис. 255). Пусть x_i, y_i, z_i —координаты точки A_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$). Впишем в кривую L ломаную, соединив соседние точки деления прямолинейными отрезками. На каждой дуге $\overline{A_{i-1}A_i}$ выберем произвольную точку M_i с координатами ξ_i, η_i, ζ_i .

Заменим кривую L ломаной $A_0A_1A_2 \dots A_n$, а силу $\mathbf{F}$, которая, вообще говоря, меняется и по величине и по направлению от точки к точке, будем считать постоянной вдоль каждого звена $\overline{A_{i-1}A_i}$ ломаной и равной заданной силе в точке M_i дуги $\overline{A_{i-1}A_i}$:

$$\mathbf{F}(M_i) = P(M_i)\mathbf{i} + Q(M_i)\mathbf{j} + R(M_i)\mathbf{k},$$

или подробнее,

$$\mathbf{F}(M_i) = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{i} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{j} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\mathbf{k}.$$

Тогда работа силы вдоль дуги $\overline{A_{i-1}A_i}$ будет приближенно равна работе силы $\mathbf{F}(M_i)$ вдоль звена $\overline{A_{i-1}A_i}$, которая согласно формуле (40), равна скалярному произведению силы $\mathbf{F}(M_i)$ на вектор перемещения $\overline{A_{i-1}A_i}$: $\mathbf{F}(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i}$.

Проекция вектора $\overline{A_{i-1}A_i}$ на оси координат равны соответственно: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Выражая скалярное произведение $\mathbf{F}(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i}$ в координатной форме, получим

$$\mathbf{F}(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i} = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i.$$

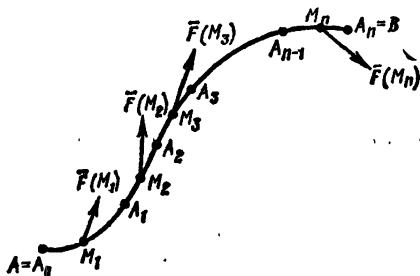


Рис. 255

Суммируя эти выражения по всем звеньям ломаной, найдем приближенное значение работы E вдоль кривой L :

$$E \approx \sum_{i=1}^n \Phi(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i} = \\ = \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i].$$

За точное значение работы E примем предел полученной суммы, устремляя длины дуг $\overline{A_{i-1}A_i}$ к нулю:

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i].$$

Таким образом, вычисление работы привело нас к нахождению предела суммы определенного вида. Нахождение пределов сумм рассмотренного вида встречается и в других вопросах, не связанных с вычислением работы. Изучим свойства пределов таких сумм в общем виде, независимо от той или иной физической задачи.

Пусть в некоторой области трехмерного пространства задана непрерывная кривая L (дуга $\overline{AB}$) и вектор-функция $\Phi = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, определенная в каждой точке кривой L .

Проделаем следующие действия.

1. Разобьем дугу $\overline{AB}$ точками $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ в направлении от точки A к точке B на n дуг $\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$. Начало дуги A мы обозначили через A_0 , а конец B — через A_n . Пусть x_i, y_i, z_i — координаты точки A_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$).

2. На каждой дуге $\overline{A_{i-1}A_i}$ выбираем произвольную точку M_i с координатами ξ_i, η_i, ζ_i . Составим скалярное произведение вектора $\Phi = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, вычисленного в точке M_i , на вектор $\overline{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i\mathbf{i} + \Delta y_i\mathbf{j} + \Delta z_i\mathbf{k}$:

$$\Phi(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i} = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i.$$

3. Составим сумму всех таких произведений:

$$\sum_{i=1}^n \Phi(M_i) \cdot \overline{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i].$$

Эта сумма называется *интегральной суммой*.

4. Если существует предел интегральной суммы при условии, что длины всех дуг $\overline{A_{i-1}A_i}$ стремятся к нулю, не зависящий ни от способа разбиения дуги $\overline{AB}$ на дуги $\overline{A_{i-1}A_i}$, ни от выбора на каждой из них точки M_i , то этот предел называют *криволинейным интегралом* от вектор-функции $\Phi = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ вдоль кривой L (или вдоль дуги $\overline{AB}$) в направлении от A к B и обозначают

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

или

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.*$$

Так как подынтегральное выражение $P dx + Q dy + R dz$ есть скалярное произведение вектора $\Phi = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ и дифференциала $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ радиуса-вектора $\mathbf{r}$ переменной точки кривой L , то криволинейный интеграл от вектор-функции $\Phi = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ можно записать в следующей векторной форме: $\int_L \Phi \cdot d\mathbf{r}$.

Итак, по определению

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i]. \end{aligned}$$

Здесь подразумевается, что при $n \rightarrow \infty$ каждая из дуг $\widehat{A_{i-1}A_i}$ стягивается в точку.

Так как

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i] = \\ & = \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i + \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i, \end{aligned}$$

то предполагая, что существуют пределы сумм, стоящих в правой части последнего равенства, имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i] = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta y_i + \\ & \quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta z_i. \end{aligned} \quad (41)$$

Пределы, стоящие справа, можно рассматривать как криволинейные интегралы вдоль дуги $\widehat{AB}$ соответственно от векторов-функций $P(x, y, z)\mathbf{i}$, $Q(x, y, z)\mathbf{j}$, $R(x, y, z)\mathbf{k}$. Поэтому равенство (41) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_{AB} P(x, y, z) dx + \int_{AB} Q(x, y, z) dy + \int_{AB} R(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

* Криволинейный интеграл от вектор-функции часто называют криволинейным интегралом по координатам.

Определение криволинейного интеграла показывает, что работа силы $\mathbf{F}$ вдоль дуги L есть криволинейный интеграл от силы $\mathbf{F}$ вдоль этой дуги, т. е.

$$E = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz,$$

где P , Q и R — проекции силы на координатные оси.

Так же, как и в случае определенного интеграла, имеет место теорема существования криволинейного интеграла, которую мы принимаем без доказательства.

Теорема существования криволинейного интеграла. Пусть кривая L задана в параметрическом виде уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — функции, имеющие непрерывные производные первого порядка для $\alpha \leq t \leq \beta$. Тогда для всякой вектор-функции $\Phi = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, непрерывной вдоль этой кривой, существует предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа дуг, на которые разбивается кривая L при стремлении к нулю длины каждой из них. Этот предел не зависит от способа разбиения дуги L на части и от выбора промежуточных точек M_i^* .

3. Вычисление криволинейного интеграла

Покажем, что вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению определенного интеграла.

Пусть дуга L ($\overline{AB}$) задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, причем функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка. Предположим, что начальной точке A дуги $\overline{AB}$ соответствует значение параметра $t = \alpha$, а конечной точке B — значение $t = \beta$ и при изменении параметра t от α до β переменная точка $M(x; y; z)$ описывает дугу в направлении от A к B . Пусть далее $P(x, y, z)$ непрерывная функция, заданная вдоль кривой L . Так как $P(x, y, z)$ — непрерывная функция переменных x, y, z , а x, y, z — непрерывные функции от t , то сложная функция $P[x(t), y(t), z(t)]$ является непрерывной функцией от t на сегменте $\alpha \leq t \leq \beta$. Так как кривая L и функция $P(x, y, z)$ удовлетворяют условиям теоремы существования криволинейного интеграла, то существует криволинейный интеграл $\int_L P(x, y, z) dx$ и, следовательно, существует предел интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i,$$

который не зависит ни от способа разбиения дуги L на части, ни

* Вектор-функция $\Phi = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ называется непрерывной, если ее проекции P , Q и R являются непрерывными функциями.

от выбора промежуточных точек $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$. Разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ на n частей точками $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$; кроме того, обозначим $t_0 = \alpha, t_n = \beta$. Этим значениям параметра t соответствуют точки дуги L $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B$, имеющие следующие координаты.

[illegible]

При этом точки $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, делящие дугу, расположены последовательно в направлении от точки A к точке B .

При переходе из точки A_{i-1} к точке A_i абсцисса x получает приращение $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1})$. Применим к разности $x(t_i) - x(t_{i-1})$ теорему Лагранжа о конечном приращении:

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i) \Delta t_i, \text{ где } \Delta t_i = t_i - t_{i-1} \text{ и } t_{i-1} < \tau_i < t_i.$$

Значению параметра $t = \tau_i$ соответствует на кривой точка M_i с координатами $\xi_i = x(\tau_i)$, $\eta_i = y(\tau_i)$, $\zeta_i = z(\tau_i)$, лежащая на дуге $A_{i-1} \overline{A_i}$. Составим для выбранного разбиения дуги L на части и для выбранных выше точек M_i интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n P[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)] x'(\tau_i) \Delta t_i$$

и перейдем к пределу при условии, что шаг разбиения λ сегмента $[\alpha, \beta]$ стремится к нулю. Как можно доказать, при этом длины дуг $A_{i-1}A_i$ стремятся к нулю, и мы имеем согласно определению криволинейного интеграла

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y, z) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)] x'(\tau_i) \Delta t_i \end{aligned}$$

Сумма, стоящая в правой части последнего равенства, является интегральной суммой для непрерывной функции одной переменной t : $P[x(t), y(t), z(t)]x'(t)$, заданной на сегменте $[\alpha, \beta]$. Ее предел равен определенному интегралу:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)] x'(\tau_i) \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) dt.$$

Таким образом,

$$\int_L P(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) dt. \quad (42)$$

Это и есть искомая формула, позволяющая свести вычисление криволинейного интеграла к вычислению определенного интеграла*.

Итак, для того чтобы вычислить криволинейный интеграл $\int_L P(x, y, z) dx$, надо задать кривую L параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и в подынтегральном выражении $P(x, y, z) dx$ заменить переменные x , y и z их выражениями через параметр t , а dx —дифференциалом функции $x = x(t)$ (т. е. положить $dx = x'(t) dt$). За нижнюю границу в получившемся определенном интеграле нужно принять значение параметра, соответствующее началу дуги, а за верхнюю границу—значение параметра, соответствующее концу дуги.

Аналогично получим,

$$\int_L Q(x, y, z) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q[x(t), y(t), z(t)] y'(t) dt, \quad (42')$$

$$\int_L R(x, y, z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} R[x(t), y(t), z(t)] z'(t) dt. \quad (42'')$$

Складывая почленно равенства (42), (42') и (42''), получим

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t), z(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)] y'(t) + \\ & \quad + R[x(t), y(t), z(t)] z'(t)\} dt. \end{aligned} \quad (43)$$

Если, в частности, дуга L является плоской, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), а $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ —непрерывные функции, определенные на кривой L , то для вычисления криволинейного интеграла по этой плоской кривой от вектор-функции $\Phi = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$ мы получим формулу

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t)] x'(t) + Q[x(t), y(t)] y'(t)\} dt. \end{aligned} \quad (44)$$

Из формулы (44) легко получить формулу для вычисления криволинейного интеграла в случае, когда плоская кривая задана уравнением $y = \varphi(x)$. Пусть при перемещении точки по кривой L

* Мы предполагали, что заданному направлению на кривой L существует изменение параметра t от α до β (где $\alpha < \beta$). Формула (42) остается справедливой и в случае $\alpha > \beta$.

из точки A в точку B x меняется от a до b . Принимая в этом случае x за параметр, получим следующие параметрические уравнения кривой L : $x = x$, $y = \varphi(x)$, причем x меняется от a до b . Применяя формулу (44) и замечая, что $x' = \frac{dx}{dx} = 1$, получим

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \varphi'(x)] dx. \quad (45)$$

В частности,

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx. \quad (46)$$

В заключение приведем следующие два почти очевидных свойства криволинейного интеграла.

Свойство 1. *Значение криволинейного интеграла зависит от направления, в котором проходится кривая L . Если ту же кривую проходить не от точки A к точке B , а в обратном направлении, от B к A , то значение интеграла изменит знак на противоположный, т. е.*

$$\int_{AB} = - \int_{BA}.$$

Это объясняется тем, что при изменении направления обхода кривой приращения Δx_i , Δy_i , Δz_i , входящие в интегральную сумму, изменяют свои знаки на противоположные.

Свойство 2 (свойство аддитивности). *Если кривая L состоит из нескольких кривых $L_1, L_2, \dots, L_s$ и на каждой из этих кривых криволинейные интегралы существуют, то существует интеграл вдоль всей кривой L и он равен сумме интегралов вдоль каждой из ее частей, т. е.*

$$\int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \dots + \int_{L_s}.$$

При этом предполагается, что все кривые проходятся в одном направлении.

Рассмотрим теперь примеры на вычисление криволинейных интегралов.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} 2xy dx + y^2 dy + z^2 dz$, где AB — один виток винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$ от точки $A(1; 0; 0)$ до точки $B(1; 0; 4\pi)$.

Решение. Вдоль дуги AB параметр t меняется от 0 до 2π . Применяя формулу (43) и замечая, что $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$, $z' = 2$,

* Ради сокращения записи мы иногда не будем выписывать подынтегральные выражения.

получим

$$\begin{aligned} & \int_{AB} 2xy \, dx + y^2 \, dy + z^2 \, dz = \\ &= \int_0^{2\pi} [2 \cos t \sin t (-\sin t) + \sin^2 t \cos t + 4t^2 \cdot 2] \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t \cos t + 8t^2) \, dt = -\frac{\sin^3 t}{3} + \frac{8t^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{64}{3} \pi^3. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} (x^2 + y^2) \, dx + 2xy \, dy$$

вдоль дуги кубической параболы $y = x^3$ от точки $A(1; 1)$, до точки $B(2; 8)$.

Решение. Применяя формулу (45), получим

$$\begin{aligned} & \int_{AB} (x^2 + y^2) \, dx + 2xy \, dy = \\ &= \int_1^2 \{ [x^2 + (x^3)^2] + 2x \cdot x^3 \cdot 3x^2 \} \, dx = \int_1^2 (x^2 + 7x^6) \, dx = 129 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Если криволинейный интеграл $\int \Phi \, dr$ от вектор-функции $\Phi = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$ берется по замкнутому контуру L , то он называется *циркуляцией* векторного поля Φ по замкнутому контуру L и обозначается

$$\oint_L \Phi \, dr \text{ или } \oint_L P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz.$$

Пример 3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\Phi = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ вдоль окружности L , образованной от пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ плоскостью $z = 1$.

Решение. Запишем параметрические уравнения окружности L :

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1 \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Так как $x' = -\sin t$, $y' = \cos t$ и $z' = 0$, то по формуле (43) получим

$$\begin{aligned} \oint_L (x \, dx + 2y \, dy + z \, dz) &= \int_0^{2\pi} [\cos t (-\sin t) + 2 \sin t \cdot \cos t + 0] \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt = \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Итак, циркуляция вектора $\Phi = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ вдоль окружности L равна нулю.

4. Формула Остроградского — Грина *

Рассмотрим на плоскости Oxy область σ , ограниченную кривой, пересекающейся с прямыми, параллельными координатным осям, не более чем в двух точках (рис. 256). Пусть далее $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции, непрерывные вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области σ . Тогда имеет место следующая формула, называемая *формулой Остроградского — Грина*:

$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \\ = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

где двойной интеграл берется по области σ , а криволинейный интеграл — вдоль замкнутого контура L , ограничивающего область σ . При этом контур L проходимся в положительном направлении, т. е. при движении вдоль него область σ остается слева (см. рис. 256).

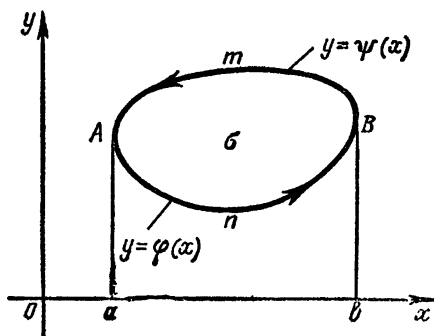


Рис. 256

Для вывода этой формулы рассмотрим вначале двойной интеграл $\iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma$. Пусть $y = \varphi(x)$ — уравнение дуги $\widetilde{AnB}$, а $y = \psi(x)$ — уравнение дуги $\widetilde{AmB}$ (см. рис. 256). Тогда по правилу вычисления двойного интеграла получим

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

Так как $P(x, y)$ при постоянном x есть одна из первообразных для $\frac{\partial P}{\partial y}$, то

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = P(x, y) \Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} = P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x)).$$

Поэтому

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \int_a^b [P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))] dx = \\ = \int_a^b P(x, \psi(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx.$$

* М. В. Остроградский (1801—1861) — выдающийся русский математик и механик.

Д. Грин (1793—1841) — английский математик и физик.

Интеграл $\int_a^b P(x, \varphi(x)) dx$, как это следует из формулы (46) предыдущего пункта, равен криволинейному интегралу $\int_{AnB} P(x, y) dx$ вдоль дуги AnB :

$$\int_a^b P(x, \varphi(x)) dx = \int_{AnB} P(x, y) dx.$$

Аналогично

$$\int_a^b P(x, \psi(x)) dx = \int_{AmB} P(x, y) dx.$$

Следовательно,

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \int_{AmB} P(x, y) dx - \int_{AnB} P(x, y) dx.$$

Изменив направление вдоль дуги AmB на противоположное по свойству 1 криволинейного интеграла, имеем

$$\int_{AmB} P(x, y) dx = - \int_{BmA} P(x, y) dx.$$

Поэтому

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = - \left(\int_{BmA} P(x, y) dx + \int_{AnB} P(x, y) dx \right).$$

Так как дуги $\widetilde{BmA}$ и $\widetilde{AnB}$ дают в совокупности границу L области σ , проходящую в положительном направлении, то, принимая во внимание свойство аддитивности, получим

$$\int_{BmA} P(x, y) dx + \int_{AnB} P(x, y) dx = \oint_L P(x, y) dx.$$

Следовательно,

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = - \oint_L P(x, y) dx. \quad (47)$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} d\sigma = \oint_L Q(x, y) dy. \quad (48)$$

Вычитая почленно из равенства (48) равенство (47), получим формулу Остроградского—Грина

$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Эта формула выведена в предположении, что контур L пересекается прямыми, параллельными осями координат, не более чем в двух

точках, однако, как можно показать, она остается справедливой, когда это условие не выполнено (например, для области σ , изображенной на рис. 234).

Применим формулу Остроградского—Грина к вычислению площади плоской области с помощью криволинейного интеграла. Рассмотрим функции $P(x, y) \equiv 0$ и $Q(x, y) \equiv x$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, а $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, то, применяя формулу Остроградского—Грина, получим

$$\iint_{\sigma} (1 - 0) d\sigma = \oint 0 dx + x dy,$$

или

$$\iint_{\sigma} d\sigma = \oint x dy.$$

Но интеграл $\iint_{\sigma} d\sigma$ численно равен площади области σ . Поэтому окончательно имеем

$$\sigma = \oint_L x dy. \quad (49)$$

Аналогично, полагая $P \equiv -y$, а $Q \equiv 0$, можно получить еще одну формулу для вычисления площади области с помощью криволинейного интеграла:

$$\sigma = - \oint_L y dx. \quad (49')$$

Эти формулы дают возможность с помощью криволинейного интеграла подсчитать площадь плоской области σ .

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом, заданным параметрическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Если обходить эллипс в положительном направлении, то параметр t изменяется от 0 до 2π . Применяя формулу (49) и правила вычисления криволинейного интеграла, получим

$$\sigma = \oint x dy = \int_0^{2\pi} a \cos t \, b \cos t \, dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi ab.$$

5. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования

Пусть дано плоское векторное поле $\Phi = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$. В дальнейшем мы будем предполагать, что функции P и Q непрерывны вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой области G плоскости Oxy .

Рассмотрим в области G две произвольные точки A и B . Эти точки можно соединить различными линиями, лежащими в области G ,

вдоль которых значения криволинейного интеграла $\int_{AB} P dx + Q dy$, вообще говоря, различны. Так, например, рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int_L (x+y) dx + 2xy dy$$

и две точки $A(1; 1)$ и $B(2; 4)$. Вычислим этот интеграл, во-первых, вдоль отрезка l_1 прямой $y = 3x - 2$, соединяющей точки A и B , и, во-вторых, вдоль дуги l_2 параболы $y = x^2$, соединяющей эти же точки. Применяя правила вычисления криволинейного интеграла, найдем

а) вдоль отрезка l_1 :

$$\begin{aligned} & \int_{l_1} (x+y) dx + 2xy dy = \\ & = \int_1^2 [x + (3x-2) + 2x(3x-2) \cdot 3] dx = \int_1^2 (18x^2 - 8x - 2) dx = 28; \end{aligned}$$

б) вдоль дуги l_2 параболы:

$$\begin{aligned} & \int_{l_2} (x+y) dx + 2xy dy = \\ & = \int_1^2 [x + x^2 + 2x \cdot x^2 \cdot 2x] dx = \int_1^2 (4x^4 + x^2 + x) dx = 28 \frac{19}{30}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что значения криволинейного интеграла $\int_L (x+y) dx + 2xy dy$ зависят от пути интегрирования, т. е. зависят от вида линии, соединяющей точки A и B . Наоборот, как нетрудно проверить, криволинейный интеграл $\int_L (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$ вдоль тех же линий l_1 и l_2 , соединяющих точки $A(1; 1)$ и $B(2; 4)$, дает одно и то же значение, равное $33 \frac{1}{3}$.

Разобранные примеры показывают, что криволинейные интегралы, вычисленные по различным путям, соединяющим две данные точки, в одних случаях различны между собой, а в других случаях принимают одно и то же значение.

Пусть A и B — две произвольные точки области G . Рассмотрим различные кривые, лежащие в области G и соединяющие точки A и B . Если криволинейный интеграл $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ по любому из этих путей принимает одно и то же значение, то говорят, что он *не зависит от пути интегрирования*.

В следующих двух теоремах приводятся условия, при которых криволинейный интеграл $\int_L P dx + Q dy$ не зависит от пути интегрирования.

Теорема 1. Для того чтобы криволинейный интеграл $\int_L Pdx + Qdy$ в некоторой области G не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в этой области, был равен нулю.

Доказательство. Достаточность.

Пусть интеграл $\int_L Pdx + Qdy$ по любому замкну-

тому контуру, проведенному в области G , равен нулю. Покажем, что этот интеграл не зависит от пути интегрирования. В самом деле, пусть A и B две точки, принадлежащие области G . Соединим эти точки двумя различными, произвольно выбранными кривыми $\overline{Amb}$ и $\overline{AnB}$,

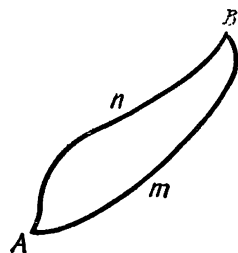


Рис. 257

лежащими в области G (рис. 257). Покажем, что $\int_{\overline{AmB}} = \int_{\overline{AnB}}$. Дуги $\overline{AmB}$

и $\overline{AnB}$ образуют замкнутый контур $\overline{AmBnA}$. Учитывая свойства криволинейных интегралов, получим

$$\oint_{\overline{AmBnA}} = \int_{\overline{AmB}} + \int_{\overline{BnA}} = \int_{\overline{AmB}} - \int_{\overline{AnB}},$$

так как $\int_{\overline{BnA}} = - \int_{\overline{AnB}}$. Но по условию $\oint_{\overline{AmBnA}} = 0$ как интеграл по замкнутому контуру.

Следовательно, $\int_{\overline{AmB}} - \int_{\overline{AnB}} = 0$, или $\int_{\overline{AmB}} = \int_{\overline{AnB}}$. Таким образом, криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

Необходимость. Пусть в области G криволинейный интеграл $\int_L Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования. Покажем, что интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в этой области, равен нулю. В самом деле, рассмотрим произвольный замкнутый контур, лежащий в области G , и возьмем на нем две произвольные точки A и B (см. рис. 257). Тогда

$$\oint_{\overline{AmBnA}} = \int_{\overline{AmB}} + \int_{\overline{BnA}} = \int_{\overline{AmB}} - \int_{\overline{AnB}} = 0,$$

так как по условию $\int_{\overline{AmB}} = \int_{\overline{AnB}}$. Итак, интеграл по любому замкнутому контуру L , лежащему в области G , равен нулю.

Следующая теорема дает удобные для практического использования условия, при соблюдении которых криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

Теорема 2. Для того чтобы криволинейный интеграл $\int_L Pdx + Qdy$ не зависел от пути интегрирования в односвязной* области G ,

* Определение односвязной области см. в гл. IX, § 2, п. 3.

необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (50)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть в области G $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Покажем, что криволинейный интеграл $\int_L P dx + Q dy$ по любому замкнутому контуру L , лежащему в области G , равен нулю. Рассмотрим площадку σ , ограниченную контуром L . В силу односвязности области G площадка σ целиком принадлежит этой области. На основании формулы Остроградского—Грина $\oint_L P dx + Q dy = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$. Но в области G и, частности, на площадке σ $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Поэтому $\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = 0$, а следовательно, $\oint_L P dx + Q dy = 0$. Итак, интеграл по любому замкнутому контуру L в области G равен нулю. На основании теоремы 1 заключаем, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

Необходимость. Пусть криволинейный интеграл $\int_L P dx + Q dy$ не зависит от пути интегрирования в некоторой области G . Покажем, что во всех точках области $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Предположим противное, т. е. что в некоторой точке $P_0(x_0, y_0)$ области G $\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{P_0} \neq \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{P_0}$. Пусть для определенности $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{P_0} - \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{P_0} > 0$. В силу предположения о непрерывности частных производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ разность $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ будет непрерывной функцией. Следовательно, около точки P_0 можно описать круг σ (лежащий в области G), во всех точках которого, как и в точке P_0 , разность $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ будет положительной. Применим к кругу σ формулу Остроградского—Грина:

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma,$$

где L — граница круга σ . Так как во всех точках круга σ $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$, то на основании свойства двойного интеграла $\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma > 0$.

Следовательно, $\oint_L P dx + Q dy > 0$. Итак, криволинейный интеграл, взятый по границе L круга σ , не равен нулю. Это противоречит тому, что по условию интеграл не зависит от пути интегрирования. Полученное противоречие доказывает, что во всех точках области G имеет место равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Пример 1. Криволинейный интеграл $\int_L (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$ не зависит от пути интегрирования, так как для него выполняются условия теоремы 2. Действительно, здесь $P = x^2 + y^2$, $Q = 2xy$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$ и, следовательно, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Пример 2. Рассмотрим криволинейный интеграл $\int_L (x + y) dx + 2xy dy$. Выше мы уже видели, что этот интеграл зависит от пути интегрирования (см. стр. 484). Это подтверждается и доказанной теоремой. Здесь

$$P = x + y, \quad Q = 2xy, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

6. Отыскание первообразной по полному дифференциалу

Пусть дано дифференциальное выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, причем P и Q непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ во всей плоскости Oxy или в некоторой односвязной области G . Выясним прежде всего, при каких условиях данное дифференциальное выражение $P dx + Q dy$ является полным дифференциалом некоторой функции. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы дифференциальное выражение $P dx + Q dy$ в односвязной области G было полным дифференциалом некоторой функции $U = U(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы в области G выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (50)$$

Доказательство. Необходимость. Если $P dx + Q dy$ есть полный дифференциал, то существует функция $U(x, y)$, для которой

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = P dx + Q dy.$$

Следовательно, $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$. Продифференцировав первое равенство по y , а второе — по x , получим $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Так как вторые смешанные производные непрерывны (в силу предпо-

ложения о непрерывности $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то они равны друг другу $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$. Следовательно, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Достаточность. Пусть в области G выполнено соотношение (50). Покажем, что существует функция $U(x, y)$, для которой $dU = Pdx + Qdy$ или, что то же самое, $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ и $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$. Из условия (50) следует (см. теорему 2 предыдущего пункта), что криволинейный интеграл $\int_{AB} P dx + Q dy$ не зависит от пути интегрирования,

а зависит только от положения начальной точки A и конечной точки B . Поэтому, если мы зафиксируем точку A , то значение криволинейного интеграла будет зависеть только от положения точки B , т. е. интеграл будет функцией координат точки B . Пусть x_0, y_0 координаты точки A , а x, y — координаты точки B . Обозначим через $\int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy$ криволинейный интеграл, взятый по произвольной кривой, соединяющей точки $A(x_0; y_0)$ и $B(x; y)$.

Этот интеграл является функцией от x и y , которую обозначим через $U(x, y)$:

$$U(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy.$$

Покажем, что в каждой точке области G полный дифференциал этой функции равен $P dx + Q dy$. Для этого достаточно показать, что в любой точке области G имеют место равенства $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$. Итак,

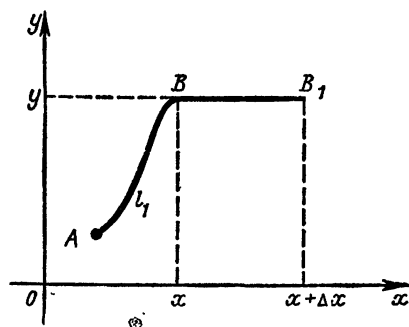


Рис. 258

пусть $B(x, y)$ — произвольная фиксированная точка области G . Найдем частную производную по x от функции $U(x, y)$ в точке B . Сохраняя y постоянным, сместимся из точки B в точку B_1 с координатами $x + \Delta x, y$ (рис. 258). Значение функции $U(x + \Delta x, y)$ в точке B_1 равно значению криволинейного интеграла вдоль любого пути, соединяющего точку A с точкой B_1 , т. е.

$$U(x + \Delta x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x + \Delta x; y)} P dx + Q dy.$$

Частное приращение $\Delta_x U$ функции $U(x, y)$ при переходе из точки B в точку B_1

$$\Delta_x U = U(x + \Delta x, y) - U(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x + \Delta x; y)} - \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)}.$$

Так как криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, то для вычисления криволинейных интегралов в последнем равенстве можно брать произвольные пути. Возьмем в качестве пути, соединяющего точки A и B , произвольную кривую l_1 , лежащую в области G , а в качестве пути, соединяющего точки A и B_1 , возьмем кривую l_1 и отрезок BB_1 (см. рис. 258). Тогда

$$\Delta_x U = \int_{(x_0; y_0)}^{(x+\Delta x; y)} - \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} = \int_{ABB_1} - \int_{AB} = \int_{AB} + \int_{BB_1} - \int_{AB} = \int_{BB_1} P dx + Q dy. \quad (51)$$

Криволинейный интеграл, стоящий в правой части равенства (51), легко выразить через определенный интеграл. Для этого напомним параметрические уравнения отрезка BB_1 : $x=t$, $y=y$, где t меняется в границах от x до $x+\Delta x$, а y постоянен. Так как $dx=dt$, $dy=0$, то по правилу вычисления криволинейного интеграла получим

$$\int_{BB_1} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt.$$

Итак,

$$\Delta_x U = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt.$$

Замечая, что $P(t, y)$ при постоянном y является функцией одной переменной t , применим к последнему интегралу теорему о среднем значении:

$$\Delta_x U = \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt = P(\bar{x}, y) \Delta x,$$

где $\bar{x}$ содержится между x и $x+\Delta x$. Разделив $\Delta_x U$ на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим частную производную

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(\bar{x}, y).$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ $\bar{x}$ стремится к x . В силу непрерывности функции $P(x, y)$ имеем $\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} P(\bar{x}, y) = P(x, y)$.

Таким образом, в точке B $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$. Аналогично доказывается, что в этой же точке $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$. Так как $B(x, y)$ — произвольная точка, то для любой точки области G имеем $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$ и, следовательно, $dU = P dx + Q dy$. Итак, криволинейный интеграл $\int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy$ есть та функция, полный дифференциал которой равен $P dx + Q dy$. Таким образом, теорема полностью доказана.

Введем теперь следующее определение:

Функция $U(x, y)$, полный дифференциал которой равен дифференциальному выражению $P dx + Q dy$, называется первообразной от этого выражения.

Следовательно, криволинейный интеграл $\int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy$ является первообразной от дифференциального выражения $P dx + Q dy$.

При нахождении первообразной $U(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy$ можно

взять любую линию, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x, y) , так как криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования. Для того

чтобы не смешивать координаты точки (x, y) с переменными интегрирования, обозначим последние буквами ξ и η . Тогда выражение для $U(x, y)$ можно переписать следующим образом:

$$U(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(\xi, \eta) d\xi + Q(\xi, \eta) d\eta. \quad (52)$$

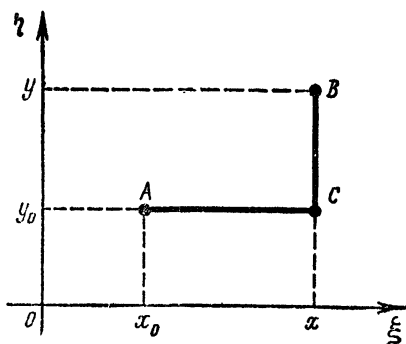


Рис. 259

Для упрощения вычислений целесообразно в качестве пути интегрирования взять ломаную ACB со сторонами AC и CB , соответственно параллельными координатным осям (рис. 259). Тогда $\int_{ACB} = \int_{AC} + \int_{CB}$. Уравнения отрезка AC можно записать следующим образом: $\xi = t$, $\eta = y_0$, причем параметр t меняется от x_0 до x . Заметим, что при интегрировании по отрезку AC интеграл $\int_{AC} Q(\xi, \eta) d\eta$ равен нулю, так как вдоль этого отрезка η постоянна и, следовательно, $d\eta = 0$. Поэтому

$$\int_{AC} P(\xi, \eta) d\xi + Q(\xi, \eta) d\eta = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt.$$

Уравнения отрезка CB таковы: $\xi = x$, $\eta = t$, причем параметр t меняется от y_0 до y . Так как вдоль этого отрезка ξ постоянно, то $d\xi = 0$. Поэтому

$$\int_{CB} P(\xi, \eta) d\xi + Q(\xi, \eta) d\eta = \int_{y_0}^y Q(x, t) dt.$$

Итак,

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt. \quad (53)$$

Ясно, что если $U(x, y)$ есть первообразная от некоторого дифференциального выражения, то $U(x, y) + C$ также является первообразной. Можно показать, что любая первообразная может быть представлена в виде $U(x, y) + C$.

Пример. Найти первообразную от дифференциального выражения $(x^2 + y^2)dx + 2xy dy$.

Решение. Здесь $P(x, y) = x^2 + y^2$, $Q(x, y) = 2xy$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$, то условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено во всей плоско-

сти Oxy . Следовательно, $U(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} (\xi^2 + \eta^2) d\xi + 2\xi\eta d\eta$. За начальную точку $(x_0; y_0)$ возьмем начало координат. Тогда по формуле (53) получим

$$U(x, y) = \int_{(0; 0)}^{(x; y)} (\xi^2 + \eta^2) d\xi + 2\xi\eta d\eta = \int_0^x (t^2 + 0^2) dt + \int_0^y 2x \cdot t dt = \\ = \frac{x^3}{3} + xy^2.$$

Итак, одной из первообразных будет функция $U = \frac{x^3}{3} + xy^2$.

Пусть выражение $P dx + Q dy$ имеет первообразную

$$U(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy.$$

Рассмотрим криволинейный интеграл $\int_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} P dx + Q dy$, где $x_1; y_1$ и $x_2; y_2$ — соответственно начальная и конечная точки пути интегрирования. Очевидно,

$$\int_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} = \int_{(x_1; y_1)}^{(x_0; y_0)} + \int_{(x_0; y_0)}^{(x_2; y_2)} = \int_{(x_0; y_0)}^{(x_2; y_2)} - \int_{(x_0; y_0)}^{(x_1; y_1)}.$$

Н,

$$\int_{(x_0; y_0)}^{(x_1; y_1)} = U(x_1, y_1), \quad \int_{(x_0; y_0)}^{(x_2; y_2)} = U(x_2, y_2)$$

и

$$\int_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} P dx + Q dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1). \quad (54)$$

Таким образом, если дифференциальное выражение $P dx + Q dy$ имеет первообразную, то криволинейный интеграл $\int_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} P dx + Q dy$

равен разности значений первообразной в конечной и начальной точках пути интегрирования. Формула (54) аналогична формуле Ньютона — Лейбница для определенного интеграла.

Рассмотрим силовое поле $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, заданное в некоторой области G плоскости Oxy . Силовое поле называется *потенциальным*, если существует такая функция $U(x, y)$, градиент которой равен $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \text{grad } U \text{ или } P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}. \quad (55)$$

Функция $U(x, y)$ называется *потенциальной функцией* или *потенциалом*.

Из равенства (55) следует, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ и $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$, т. е. потенциал $U(x, y)$ есть первообразная от дифференциального выражения

$$P dx + Q dy \text{ и, следовательно, } U(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

На основании изложенного выше можно сказать, что силовое поле $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ потенциально в некоторой односвязной области G тогда и только тогда, когда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Как мы знаем, работа E силы $\mathbf{F}$ вдоль дуги $\overline{AB}$ выражается через криволинейный интеграл: $E = \int_{AB} P dx + Q dy$. В потенциальном поле работа, очевидно, не зависит от пути, соединяющего точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Применяя формулу (54), получим

$$E = \int_{AB} P dx + Q dy = \int_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} P dx + Q dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1). \quad (56)$$

Таким образом, в потенциальном поле работа равна разности потенциалов.

Пример. Рассмотрим материальную точку массы m , на которую действует сила тяжести, равная mg . Допустим, что точка перемещается в вертикальной плоскости. Введем в этой плоскости систему координат Oxy , направив ось Oy вертикально вниз (к земле). Очевидно, $\mathbf{F} = mg\mathbf{j}$. Здесь $P = 0$, $Q = mg$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, и, следовательно, поле тяжести потенциально. Найдём потенциальную функцию $U(x, y)$. Так как $dU = P dx + Q dy = 0 dx + mg dy = mg dy$ то, очевидно, одной из потенциальных функций будет функция $U(x, y) = mgy$. Выражение для работы, совершаемой при перемещении массы из точки $A(x_1; y_1)$ в точку $B(x_2; y_2)$, получим по формуле (56)

$$E = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1) = mgy_2 - mgy_1 = mg(y_2 - y_1).$$

7. Криволинейный интеграл по длине дуги

В предыдущих пунктах мы рассматривали криволинейный интеграл от вектор-функции (криволинейный интеграл по координатам). Однако некоторые задачи приводят к криволинейному интегралу другого рода. Рассмотрим в плоскости Oxy кривую $\overline{AB}$ длины l . Пусть вдоль этой кривой распределена масса с линейной плотностью $\gamma = f(M) = f(x; y)$. Определим массу m кривой. Для этого разобьем кривую $\overline{AB}$ точками деления $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ на n частей, обозначая для единообразия точки A и B соответственно через A_0 и A_n . Обозначим через Δm_i массу дуги $\overline{A_{i-1}A_i}$ длины Δl_i . Ясно, что, $m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i$. Подсчитаем приближенно массу дуги $\overline{A_{i-1}A_i}$. Пусть $M_i(x_i, y_i)$ — произвольная точка дуги $\overline{A_{i-1}A_i}$. Считая, что плотность в каждой точке дуги $\overline{A_{i-1}A_i}$ такая же, как в точке M_i , получим приближенное значение массы: $\Delta m_i \approx f(M_i) \Delta l_i = f(x_i, y_i) \Delta l_i$. Суммируя, найдем приближенное значение массы m :

$$m \approx \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta l_i. \quad (57)$$

За точное значение массы кривой $\overline{AB}$ примем предел суммы (57) при условии, что все $\Delta l_i \rightarrow 0$. Итак,

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta l_i. \quad (58)$$

К подобного рода суммам и их пределам приводят и другие задачи. Отвлекаясь от конкретного содержания приведенной задачи, рассмотрим непрерывную функцию $f(x, y)$, определенную в точках дуги $\overline{AB}$. Составленная для нее сумма вида (57) называется интегральной суммой. Предел интегральной суммы (57) при условии, что все $\Delta l_i \rightarrow 0$, называется *криволинейным интегралом* от функции $f(x, y)$ по длине дуги $\overline{AB}$ и обозначается символом $\int_{AB} f(M) dl$ или

$$\int_{AB} f(x, y) dl.$$

Итак,

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta l_i.$$

Таким образом, масса дуги равна криволинейному интегралу от плотности по длине этой дуги:

$$m = \int_{AB} f(x, y) dl. \quad (59)$$

Следует обратить внимание на то, что, в отличие от криволинейного интеграла по координатам, криволинейный интеграл по длине дуги не зависит от выбора направления на кривой.

Можно показать, что вычисление криволинейного интеграла по длине дуги сводится к вычислению определенного интеграла. Если дуга AB задана уравнением $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$), то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f[x; y(x)] \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (60)$$

Подынтегральное выражение в правой части равенства (60) получается из подынтегрального выражения в левой части заменой $y = y(x)$ и дифференциала дуги dl на его выражение в декартовых координатах $\sqrt{1 + y'^2} dx$.

Пример. Найти массу дуги кривой $y = \ln x$ между точками с абсциссами $x = 1$ и $x = 2$, если плотность $\gamma = x^2$.

Решение. Применяя формулы (59) и (60), получим

$$\begin{aligned} m &= \int_{AB} x^2 dl = \int_1^2 x^2 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_1^2 x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \\ &= \int_1^2 x \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + x^2) = \left. \frac{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_1^2 = \\ &= \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) \text{ ед. массы.} \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Часто криволинейный интеграл по длине дуги называют *криволинейным интегралом первого рода*, а криволинейный интеграл от вектор-функции — *криволинейным интегралом второго рода*.

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1. Основные определения

Пусть дана последовательность чисел $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$

Определение. Числовым рядом называется выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называются членами ряда; в частности u_1 — первый член, u_2 — второй член, $\dots, u_n$ — n -й или общий член ряда.

Ряд считается заданным, если известен общий член ряда u_n , как функция его номера n : $u_n = f(n)$.

Приведем несколько примеров рядов:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots, \text{ общий член ряда } u_n = \frac{1}{n(n+1)};$$

$$2 + 6 + 18 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} + \dots, \text{ общий член ряда } u_n = 2 \cdot 3^{n-1};$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots, \text{ общий член ряда } u_n = (-1)^{n-1};$$

$$\sin \frac{\pi}{1} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{3} + \dots + \sin \frac{\pi}{n} + \dots, \text{ общий член ряда } u_n = \sin \frac{\pi}{n}.$$

Определение. Сумма S_n первых n членов ряда называется n -й частичной суммой ряда:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n. \quad (2)$$

Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots \quad (3)$$

Составим последовательность частичных сумм S_n этого ряда. Для этого прежде всего заметим, что общий член ряда можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3};$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}.$$

Подобным же образом найдем, что

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} = \\ = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда следует, что предел последовательности частичных сумм этого ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1.$$

Рассмотрим еще ряд

$$2 + 6 + 18 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} + \dots \quad (4)$$

Найдем последовательность его частичных сумм:

$$S_1 = 2, \quad S_2 = 2 + 6 = 8, \quad S_3 = 2 + 6 + 18 = 26, \quad \dots \\ S_n = 2 + 6 + 18 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Эти частичные суммы можно переписать следующим образом:

$$S_1 = 2 = 3 - 1, \quad S_2 = 8 = 3^2 - 1, \quad S_3 = 26 = 3^3 - 1, \quad \dots, \quad S_n = 3^n - 1^*.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 1) = \infty.$$

Для ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots \quad (5)$$

последовательность частичных сумм имеет вид

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0 \quad \dots$$

В этом примере последовательность частичных сумм не стремится ни к какому пределу.

Таким образом, для некоторых рядов последовательность частичных сумм стремится к определенному пределу, для других же рядов такой предел не существует.

Определение. Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел S последовательности его частичных сумм S_n при неограниченном возрастании номера суммы, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S. \quad (6)$$

Определение. Предел S последовательности частичных сумм сходящегося ряда называется *суммой ряда*.

Если S является суммой сходящегося ряда $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$, то пишут:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

Если последовательность частичных сумм ряда не имеет предела, то ряд называется *расходящимся*. Расходящийся ряд суммы не имеет.

* Вывод этой формулы можно выполнить с помощью математической индукции.

Возвращаясь к рассмотренным выше примерам, заключаем, что ряд (3) сходится и его сумма $S=1$, а ряды (4) и (5) расходятся и суммы не имеют.

Ряды являются очень важным аппаратом математического анализа и применяются для вычислений и исследований как в различных разделах самой математики, так и во многих задачах.

2. Геометрическая прогрессия

Одним из простейших, но очень часто встречающихся рядов, является геометрическая прогрессия:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots; \quad (7)$$

a называется первым членом прогрессии, а множитель q — знаменателем прогрессии.

Сумма n первых членов (n -я частичная сумма) прогрессии, как известно, может быть вычислена при $q \neq 1$ по формуле

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

1) Если $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (см. гл. V, § 1, п. 8), пример 6) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1 - q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}.$$

Таким образом, при $|q| < 1$ геометрическая прогрессия является сходящимся рядом, сумма которого

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

2) Если $|q| > 1$, то $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ (см. гл. V, § 1 п. 8) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \infty.$$

Следовательно, в этом случае ряд расходится.

3) Если $q = 1$, то ряд (7) принимает вид

$$a + a + a + \dots + a + \dots$$

Для него $S_n = na$ и при $a \neq 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, т. е. ряд расходится.

4) Если $q = -1$, то ряд (7) принимает вид

$$a - a + a - a + \dots$$

В этом случае $S_n = 0$ при n четном и $S_n = a$ при n нечетном. Следовательно, при $a \neq 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

Итак, геометрическая прогрессия является сходящимся рядом при $|q| < 1$ и расходящимся при $|q| \geq 1$.

3. Простейшие свойства числовых рядов

Рассмотрим несколько простых свойств числовых рядов, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Теорема 1. Если ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (8)$$

сходится и имеет сумму S , то ряд

$$au_1 + au_2 + au_3 + \dots + au_n + \dots, \quad (9)$$

где a заданное число, также сходится и его сумма равна aS .

Доказательство. Пусть n -я частичная сумма ряда (8) будет S_n , а n -я частичная сумма ряда (9) — σ_n . Тогда

$$\sigma_n = au_1 + au_2 + au_3 + \dots + au_n = a(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n) = aS_n.$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} aS_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = aS.$$

Таким образом, ряд (9) сходится и имеет сумму aS .

Теорема 2. Если ряды

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (10)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (11)$$

сходятся и имеют соответственно суммы S и $\bar{S}$, то ряд

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \dots + (u_n + v_n) + \dots, \quad (12)$$

получающийся почленным сложением данных рядов, также сходится и имеет сумму $S + \bar{S}$.

Доказательство. Обозначим n -е частичные суммы рядов (10), (11) и (12) соответственно S_n , $\bar{S}_n$ и σ_n . Имеем:

$$\sigma_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \dots + (u_n + v_n) = S_n + \bar{S}_n.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + \bar{S}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n = S + \bar{S}.$$

Итак, ряд (12) сходится. Ряд (12) называется *суммой* рядов (10) и (11).

З а м е ч а н и е. Аналогично можно доказать, что будет сходиться ряд

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + \dots + (u_n - v_n) + \dots \quad (13)$$

и его сумма будет равна $S - \bar{S}$. Ряд (13) называется *разностью* рядов (10) и (11).

Рассмотрим два ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{k-1} + u_k + u_{k+1} + \dots + u_{n-1} + u_n + \dots \quad (14)$$

и

$$u_{k+1} + \dots + u_{n-1} + u_n + \dots \quad (14')$$

Теорема 3. Если сходится данный ряд (14), то сходится и ряд (14'), полученный из ряда (14) отбрасыванием конечного числа k его первых членов. Обратно, если сходится ряд (14'), то сходится и данный ряд (14).

Доказательство. Обозначим через S_n сумму n первых членов ряда (14), через S_k сумму k отброшенных членов ($k < n$) и через σ_{n-k} сумму $n-k$ первых членов ряда (14'):

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n,$$

$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k, \quad \sigma_{n-k} = u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n.$$

Следовательно,

$$S_n = S_k + \sigma_{n-k}, \quad (15)$$

причем S_k — некоторое число, не зависящее от n .

1. Пусть ряд (14) сходится и имеет сумму S , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Тогда из равенства (15) следует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_k = S - S_k.$$

Итак, частичные суммы σ_{n-k} ряда (14') при $n \rightarrow \infty$ имеют предел, т. е. ряд (14') сходится.

2. Пусть ряд (14') сходится и имеет сумму σ , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k} = \sigma$.

Из (15) следует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_k + \sigma_{n-k}) = S_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-k} = S_k + \sigma,$$

т. е. ряд (14) сходится.

Теорему (13) можно сформулировать также следующим образом.

На сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых членов.

4. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ сходится, то его общий член u_n стремится к нулю при неограниченном возрастании номера n .

Доказательство. Пусть дан сходящийся ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots,$$

имеющий сумму S . Рассмотрим его частичные суммы

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$$

и

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}.$$

Отсюда $u_n = S_n - S_{n-1}$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}.$$

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$, так как при $n \rightarrow \infty$ и $n-1 \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = S - S = 0. \quad (16)$$

Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Следствие (достаточный признак расходимости ряда). Если общий член ряда не стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера n , то ряд обязательно расходится.

Действительно, если бы ряд сходил, то по предыдущей теореме его общий член обязан был бы стремиться к нулю, что противоречит условию. Например, для ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

Общий член $u_n = \frac{n}{n+1}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \neq 0$, то ряд расходится.

Условие $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ является *необходимым для сходимости ряда*, но не *достаточным*. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Примером может служить ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots \quad (17)$$

Здесь $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Однако легко показать, что этот ряд расходится.

Для этого рассмотрим частичную сумму ряда

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$, ..., то очевидно, что

$$S_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ или } S_n > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ т. е. } S_n > \sqrt{n}.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty,$$

и, следовательно, ряд расходится.

5. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Как мы уже знаем, суммой ряда называется предел последовательности его частичных сумм $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Однако нахождение этого предела во многих случаях связано с большими трудностями. В таких случаях сумму ряда находят приближенно, заменяя ее частичной суммой S_n с достаточно большим номером n . Но для этого надо быть уверенным, что данный ряд сходится. Сходимость или расходимость ряда во многих случаях удается установить с помощью так называемых *достаточных признаков*. В этом пункте будут рассмотрены достаточные признаки сходимости и расходимости для рядов с положительными членами. Такие ряды называются *знакоположительными*.

Прежде всего заметим следующее. Так как в знакоположительном ряде все члены положительны, то его частичные суммы $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$, $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ возрастают с увеличением номера суммы n . Таким образом, частичные суммы ряда образуют монотонно возрастающую числовую последовательность

$$S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_n < \dots$$

Здесь возможны два случая.

1. Последовательность частичных сумм неограничена. В этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ и, следовательно, ряд расходится.

2. Последовательность частичных сумм ограничена, т. е. $S_n < C$ при любом n . В этом случае последовательность частичных сумм имеет предел (см. гл. V, § 1, п. 8) и, следовательно, ряд сходится.

Таким образом, при доказательстве того, что тот или иной знакоположительный ряд сходится, достаточно доказать только ограниченность последовательности его частичных сумм.

Рассмотрим теперь некоторые наиболее часто встречающиеся признаки сходимости и расходимости рядов.

Признаки сравнения рядов

Теорема 1 (достаточный признак сходимости). *Даны два знакоположительных ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots; \quad (U)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots. \quad (V)$$

Пусть члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряда:

$$u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2, u_3 \leq v_3, \dots, u_n \leq v_n, \dots, \quad (18)$$

и второй ряд сходится. В таком случае первый ряд также сходится и его сумма не превосходит суммы второго ряда.*

* Заключение теоремы 1 остается в силе, если некоторые члены ряда (U) равны нулю.

Доказательство. Обозначим через S_n и δ_n соответственно n -е частичные суммы первого и второго рядов:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n, \quad \delta_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n.$$

Из неравенств (18) следует, что $S_n \leq \delta_n$. Так как второй ряд (V) сходится, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \delta$. При этом, поскольку члены

ряда положительны, очевидно, что $\delta_n < \delta$, а следовательно, и $S_n < \delta$. Таким образом, частичные суммы ряда (U) ограничены и, следовательно, ряд (U) сходится, причем его сумма не превосходит суммы ряда (V), как это следует из неравенства $S_n < \delta$.

Теорема 2 (достаточный признак расходимости ряда). Даны два знакоположительных ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots; \quad (U)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (V)$$

Пусть члены первого ряда не меньше соответствующих членов второго ряда

$$u_1 \geq v_1, u_2 \geq v_2, u_3 \geq v_3, \dots, u_n \geq v_n, \dots, \quad (19)$$

и второй ряд расходится. В таком случае первый ряд также расходится.

Доказательство. Обозначим снова через S_n и δ_n соответственно частичные суммы первого и второго рядов:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n, \quad \sigma_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n.$$

Из неравенств (19) следует, что $S_n \geq \sigma_n$. Так как ряд (V) расходится и его частичные суммы возрастают, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$. В таком случае и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ и, следовательно, ряд (U) расходится.

При исследовании рядов с помощью признаков сравнения необходимо иметь для сравнения ряды, относительно которых известно, сходятся они или расходятся.

В п. 2 мы рассмотрели геометрическую прогрессию и установили, что она представляет собой ряд, сходящийся при $|q| < 1$ и расходящийся при $|q| \geq 1$.

Ниже будет показано, что ряд

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad (20)$$

сходится при показателе $p > 1$ и расходится при $0 < p \leq 1$. При $p = 1$ получается ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (21)$$

который называется *гармоническим*. Ряд (20) называется *обобщенным гармоническим рядом*.

Геометрическая прогрессия, гармонический и обобщенный гармонический ряды очень часто используются при исследовании рядов с помощью признаков сравнения.

Пример 1. Исследовать, сходится ли ряд

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots \quad (22)$$

Решение. Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \quad (23)$$

Ряд (23) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$ и, следовательно, сходится. Так как члены ряда (22) не превосходят соответствующих членов ряда (23), то по теореме 1 ряд (22) также сходится.

Пример 2. Исследовать, сходится ли ряд

$$\frac{1}{\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{\sqrt{\ln 3}} + \frac{1}{\sqrt{\ln 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}} + \dots \quad (24)$$

Решение. Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots, \quad (25)$$

который расходится (см. п. 4). Так как каждый член ряда (24) больше соответствующего члена ряда (25):

$$\ln n < n, \sqrt{\ln n} < \sqrt{n}, \frac{1}{\sqrt{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt{n}},$$

то по теореме 2 ряд (24) также расходится.

Применение признаков сравнения при исследовании рядов часто бывает затруднительно из-за необходимости составлять вспомогательный ряд. Общих приемов для этого, годных для всех случаев, не существует. Поэтому при исследовании рядов часто применяются другие достаточные признаки, в частности следующий признак.

Признак Даламбера*. Если для знакоположительного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (26)$$

существует предел отношения последующего члена к предыдущему при неограниченном возрастании номера члена n , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho, \quad (27)$$

то при $\rho < 1$ ряд сходится, а при $\rho > 1$ ряд расходится.

Доказательство. а) Пусть $\rho < 1$. Покажем, что ряд сходится. Действительно, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

то на основании определения предела для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое N , зависящее от ε , что для всех членов ряда, номер

* Даламбер (1717—1783)—французский математик.

которых $n \geq N$, выполняется неравенство $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho \right| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} - \rho < +\varepsilon,$$

или

$$\rho - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \rho + \varepsilon.$$

Полагая $\rho + \varepsilon = q$, будем иметь $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$. Так как ρ по предположению меньше единицы, а ε произвольно мало, то ε можно выбрать настолько малым, чтобы $q = \rho + \varepsilon < 1$. Таким образом, для $n \geq N$ будем иметь:

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < q, \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < q, \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < q, \dots$$

или

$$u_{N+1} < u_N q, u_{N+2} < u_{N+1} q < u_N q^2, u_{N+3} < u_{N+2} q < u_N q^3, \dots$$

Рассмотрим два ряда

$$u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \dots, \quad (28)$$

$$u_N + u_N q + u_N q^2 + u_N q^3 + \dots \quad (29)$$

Ряд (29) сходится, как геометрическая прогрессия со знаменателем $|q| < 1$. Так как члены ряда (28) не превосходят соответствующих членов ряда (29), то на основании признака сравнения (теорема 1) ряд (28) также сходится.

Но ряд (28) получается из данного ряда (26) отбрасыванием конечного числа членов $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{N-1}$; следовательно, по теореме 3 п. 3 ряд (26) также сходится.

б) Пусть теперь $\rho > 1$. Покажем, что ряд расходится. Действительно, в этом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho > 1.$$

Отсюда следует, что начиная с достаточно больших значений $n \geq N$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \text{ или } u_{n+1} > u_n.$$

Таким образом, члены ряда возрастают с увеличением номера члена n . Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, т. е. не выполнен необходимый признак сходимости ряда и ряд должен расходиться.

Замечание 1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$, то ряд также расходится, так как и в этом случае для достаточно больших n $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$.

Замечание 2. Подчеркнем еще раз, что, если расходимость ряда установлена с помощью признака Даламбера, то общий член ряда не стремится к нулю.

Замечание 3. При $\rho = 1$ признак Даламбера на вопрос о том, сходится или расходится ряд, ответа не дает. Как показывают примеры, в этом случае может иметь место как сходимость, так и расходимость.

Рассмотрим примеры исследования рядов на сходимость с помощью признака Даламбера.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \dots + \frac{2n-1}{3^n} + \dots$$

Решение. Вычисляем

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}} : \frac{2n-1}{3^n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n(2n+1)}{3^{n+1}(2n-1)} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Итак, $\rho = 1/3 < 1$ и, следовательно, данный ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{2}{1} + \frac{4}{16} + \frac{8}{81} + \dots + \frac{2^n}{n^4} + \dots$$

Решение. Вычисляем

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)^4} : \frac{2^n}{n^4} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}n^4}{(n+1)^4 \cdot 2^n} = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4} = 2. \end{aligned}$$

Так как $\rho = 2 > 1$, то данный ряд расходится.

Рассмотрим теперь два примера рядов, для которых $\rho = 1$, и покажем, что один из этих рядов сходится, а другой расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Решение. Вычисляем

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} : \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

На основании признака Даламбера сделать заключение о сходимости или расходимости ряда мы не можем. Однако, как было указано в п. 4 этого параграфа, этот ряд расходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Решение. Вычисляем

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

Выше (см. п. 1 этого параграфа) непосредственным нахождением суммы этого ряда было показано, что он сходится.

В тех случаях когда признак Даламбера не позволяет сделать вывода о сходимости или расходимости ряда, наряду с признаками сравнения часто применяется следующий достаточный признак сходимости ряда.

Интегральный признак Коши *. Пусть члены знакоположительного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (30)$$

являются значениями при $x=1, 2, 3, \dots, n, \dots$ некоторой функции $f(x)$, положительной, непрерывной, монотонно убывающей на интервале $1 \leq x < +\infty$, так что

$$u_1 = f(1), u_2 = f(2), u_3 = f(3), \dots, u_n = f(n), \dots$$

Тогда:

а) если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то сходится и ряд (30);

б) если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то ряд (30) также расходится.

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y=f(x)$ с основанием от $x=1$ до $x=n$. Впишем в эту трапецию и опишем около нее две ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников, основаниями которых служат сегменты $[1, 2], [2, 3], [3, 4], \dots$

Высотами первой из них служат значения функции $f(2), f(3), f(4), \dots, f(n)$, а высотами второй — значения $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n-1)$ (рис. 260). Как видно из рисунка, площадь криволинейной трапеции, выражаемая интегралом $\int_1^n f(x) dx$, заклю-

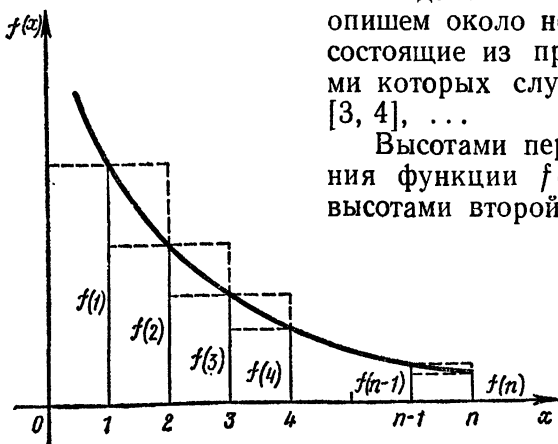


Рис. 260

чается между площадями вписанной и описанной ступенчатых фигур.

Так как площадь вписанной фигуры выражается суммой

$$f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 + \dots + f(n) \cdot 1 = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n,$$

* О. Коши (1789—1857) — французский математик.

а описанной — суммой

$$f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + \dots + f(n-1) \cdot 1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1},$$

то получаем неравенства

$$u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n < \int_1^n f(x) dx < u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1},$$

или короче,

$$S_n - u_1 < \int_1^n f(x) dx < S_n - u_n.$$

Отсюда получаем

$$S_n < u_1 + \int_1^n f(x) dx, \quad (31)$$

$$S_n > u_n + \int_1^n f(x) dx. \quad (32)$$

Рассмотрим теперь следующие случаи.

а) Пусть несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится (существует).

Это значит, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = I$. Так как $f(x) > 0$, то с возрастанием $n \int_1^n f(x) dx$ возрастает и не превосходит своего предела:

$$\int_1^n f(x) dx < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = I.$$

Из неравенства (31) следует, что $S_n < u_1 + I$. Таким образом, в этом случае последовательность частичных сумм ограничена и, следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, т. е. ряд сходится.

б) Пусть несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится (не существует). В этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = +\infty$. Из неравенства (32) следует, что последовательность частичных сумм S_n неограничена и, следовательно, ряд расходится.

Рассмотрим примеры на применение интегрального признака. Выше в этом пункте было указано без доказательства, что обобщенный гармонический ряд (20)

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots,$$

где предполагается, что $p > 0$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Докажем это с помощью интегрального признака.

Члены ряда здесь равны значениям положительной монотонно убывающей функции $f(x) = \frac{1}{x^p}$ при $x = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Рассмотрим

несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. Как мы знаем (см. гл. VIII,

§ 5, п. 1), при $p \leq 1$ этот интеграл расходится, а при $p > 1$ — сходится. Следовательно, ряд (20) сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

6. Знакопеременные ряды

До сих пор мы изучали только ряды, все члены которых были положительными*. Теперь мы перейдем к рассмотрению рядов, содержащих как положительные, так и отрицательные члены. Такие ряды называются *знакопеременными*.

В качестве примера знакопеременного ряда приведем ряд

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} - \dots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n^2} + \dots \quad (33)$$

Изучение знакопеременных рядов мы начнем с частного случая, так называемых *знакопеременных рядов*, т. е. рядов, в которых за каждым положительным членом следует отрицательный и за каждым отрицательным членом следует положительный.

Обозначая через $u_1, u_2, \dots, u_n$ — абсолютные величины членов ряда и считая, что первый член положителен, знакопеременный ряд запишем следующим образом**:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots \quad (34)$$

Для знакопеременных рядов имеет место достаточный признак сходимости Лейбница.

Признак Лейбница. Если в знакопеременном ряде (34) абсолютные величины членов убывают:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots \quad (35)$$

и общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд сходится и его сумма не превосходит первого члена ряда.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму четного числа членов ряда

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2m-1} - u_{2m}.$$

* Ряд, все члены которого отрицательны, не представляет нового по сравнению со знакоположительным рядом, так как он получается умножением членов знакоположительного ряда на (-1) .

** Исследование знакопеременного ряда с отрицательным первым членом $-u_1 + u_2 - u_3 + \dots - (-1)^{n-1} u_n + \dots$ путем умножения всех его членов на (-1) сводится к исследованию ряда (34).

Сгруппируем члены попарно:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Так как по условию абсолютные величины членов ряда убывают, то все разности в скобках положительны и, следовательно, сумма S_{2m} положительна и возрастает при увеличении m .

Запишем теперь S_{2m} , группируя члены иным образом:

$$S_{2m} = u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \dots + (u_{2m-2} - u_{2m-1}) + u_{2m}].$$

Сумма в квадратных скобках будет также положительной. Поэтому для любого значения m $S_{2m} < u_1$. Таким образом, последовательность четных частичных сумм S_{2m} возрастает с увеличением m , оставаясь при этом ограниченной. Следовательно, S_{2m} имеет предел $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$.

При этом, так как $S_{2m} < u_1$, то ясно, что $S \leq u_1$.

Рассмотрим теперь сумму нечетного числа членов:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}.$$

При $m \rightarrow \infty$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = S,$$

так как по условию $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ и, следовательно, $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = 0$.

Таким образом, частичные суммы как четного, так и нечетного числа членов имеют общий предел S . Это означает, что вообще $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, т. е. ряд сходится. При этом, как видно из доказательства, сумма ряда S не превосходит первого члена ряда.

Пример 1. Исследовать, сходится или расходится ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2^2} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n(n+1)^2} - \dots$$

Решение. Этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница:

$$1) \frac{1}{1 \cdot 2^2} > \frac{1}{2 \cdot 3^2} > \frac{1}{3 \cdot 4^2} > \dots > \frac{1}{n(n+1)^2} > \dots,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = 0.$$

Следовательно, ряд сходится.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая знакопеременного ряда. Будем предполагать, что в ряде

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (36)$$

числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Для таких рядов имеет место следующий достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

Теорема. Если для знакопеременного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (37)$$

сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n|, \quad (38)$$

то данный знакопеременный ряд также сходится.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (37) и (38):

$$\frac{u_1 + |u_1|}{2} + \frac{u_2 + |u_2|}{2} + \dots + \frac{u_n + |u_n|}{2} + \dots \quad (39)$$

Имеем:

$$\text{при } u_n > 0 \quad u_n = |u_n| \text{ и } \frac{u_n + |u_n|}{2} = \frac{|u_n| + |u_n|}{2} = |u_n|;$$

$$\text{при } u_n < 0 \quad |u_n| = -u_n \text{ и } \frac{u_n + |u_n|}{2} = \frac{u_n + (-u_n)}{2} = 0.$$

Таким образом, члены ряда (39) либо равны членам сходящегося ряда (38), либо меньше их. Поэтому ряд (39) сходится на основании признака сравнения (см. п. 5, теорему 1 и сноску на стр. 501).

Умножив все члены сходящегося ряда (38) на $\frac{1}{2}$, получим сходящийся ряд

$$\frac{|u_1|}{2} + \frac{|u_2|}{2} + \dots + \frac{|u_n|}{2} + \dots \quad (40)$$

(см. п. 3, теорема 1). Рассмотрим теперь ряд, являющийся разностью сходящихся рядов (39) и (40)

$$\left(\frac{u_1 + |u_1|}{2} - \frac{|u_1|}{2} \right) + \left(\frac{u_2 + |u_2|}{2} - \frac{|u_2|}{2} \right) + \\ + \dots + \left(\frac{u_n + |u_n|}{2} - \frac{|u_n|}{2} \right) + \dots$$

Этот ряд сходится на основании теоремы 2 п. 3.

Но ряд (37) получается из последнего ряда умножением всех его членов на 2:

$$2 \cdot \left[\frac{u_n + |u_n|}{2} - \frac{|u_n|}{2} \right] = 2 \cdot \frac{u_n}{2} = u_n.$$

Следовательно, ряд (37) также сходится (п. 3, теорема 1).

Пример 2. Исследовать на сходимость знакопеременный ряд (33)

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \quad (41)$$

Этот ряд сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $p = 2 > 1$. Следовательно, на основании доказанного признака сходится и данный ряд (33).

Этот признак является достаточным, но не необходимым. Это значит, что существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, в то

время как ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Действительно рассмотрим ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots, \quad (42)$$

который, очевидно, сходится по признаку Лейбница. Между тем, ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \quad (43)$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда (42), является гармоническим и, следовательно, расходится.

Хотя рассмотренные выше ряды (33) и (42) оба сходятся, однако характер их сходимости различен.

Ряд (33) сходится одновременно с рядом (41), составленным из абсолютных величин его членов, тогда как ряд (43), составленный из абсолютных величин сходящегося ряда (42), расходится.

В связи с этим введем следующие определения.

Определение. Знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$.

На основании достаточного признака сходимости знакопеременного ряда всякий абсолютно сходящийся ряд будет сходящимся.

Определение. Знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ называется неабсолютно сходящимся, если он сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$, расходится.

Возвращаясь к рассмотренным выше примерам, можем сказать, что ряд (33) является абсолютно сходящимся, а ряд (42) — неабсолютно сходящимся.

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место. Это объясняется тем, что на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм. Особое значение имеет свойство переместительности, которым обладают только абсолютно сходящиеся ряды.

Это свойство, которое мы приводим без доказательства, формулируется следующим образом.

Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется от любой перестановки его членов.

Наоборот, в неабсолютно сходящемся ряде нельзя переставлять члены, так как в случае их перестановки может измениться сумма ряда и даже получиться расходящийся ряд.

Говоря о перестановке членов, мы подразумеваем, что меняем местами бесконечное множество членов, так как, переставляя два, три, четыре или любое конечное число членов, мы, очевидно, не изменим суммы ряда.

Рассмотрим в качестве примера неабсолютно сходящийся ряд (42)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

сумму которого обозначим через S .

Переставим члены этого ряда, поместив после каждого положительного члена два отрицательных. Получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \dots \quad (42')$$

Обозначим частичные суммы ряда (42) через S_n и ряда (42') через σ_n . Тогда

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

$$S_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{37}{60}, \dots;$$

$$\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \quad \sigma_6 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{7}{24},$$

$$\sigma_9 = \frac{7}{24} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{37}{120}, \dots$$

Итак, $\sigma_3 = \frac{1}{2} S_2$, $\sigma_6 = \frac{1}{2} S_4$, $\sigma_9 = \frac{1}{2} S_6$, ... и вообще, как можно показать, $\sigma_{3n} = \frac{1}{2} S_{2n}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{3n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \frac{S}{2}$.

Итак, последовательность частичных сумм ряда (42) с номерами, кратными трем, имеет своим пределом $\frac{1}{2} S$. Можно показать, что этот же предел $\frac{1}{2} S$ имеют последовательности всех частичных сумм σ_n ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, \dots$).

Таким образом, $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ существует и, значит, ряд (42') сходится. При этом его сумма составляет половину суммы ряда (42), из которого он получен перестановкой членов.

7. Остаток ряда и его оценка

Рассмотрим сходящийся ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots \quad (44)$$

Как известно, его сумма S является пределом последовательности его частичных сумм $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ при $n \rightarrow \infty$:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Поэтому для достаточно больших n имеем приближенное равенство

$$S \approx S_n. \quad (45)$$

Точность этого равенства возрастает с увеличением n . Для оценки точности приближенного равенства (45) введем понятие остатка сходящегося ряда.

Определение. Разность между суммой ряда S и его n -й частичной суммой S_n называется n -м остатком сходящегося ряда (44).
Остаток ряда обозначается r_n :

$$r_n = S - S_n. \quad (46)$$

Как видно из равенства (46), остаток ряда представляет собой сумму сходящегося ряда, полученного из данного ряда отбрасыванием n его первых членов:

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k} + \dots \quad (47)$$

Из определения остатка ряда ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0. \quad (48)$$

Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = S - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0.$$

Абсолютная погрешность при замене суммы ряда S его частичной суммой S_n , очевидно, равна модулю остатка ряда:

$$\Delta_S = |S - S_n| = |r_n|.$$

Таким образом, если требуется найти сумму ряда с точностью до $\epsilon > 0$, то надо взять сумму такого числа n первых членов ряда, чтобы выполнялось неравенство $|r_n| < \epsilon$. Однако в большинстве случаев находить остаток r_n точно мы не умеем. Поэтому выясним, как выбирать номер остатка n , чтобы его модуль не превосходил заданного числа ϵ .

Оценка остатка знакоположительного ряда

Теорема 1. Если все члены сходящегося знакоположительного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (49)$$

не превосходят соответствующих членов другого сходящегося знакоположительного ряда

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (50)$$

то n -й остаток ряда (49) не превосходит n -го остатка ряда (50).

Доказательство. Обозначим через r_n и r'_n n -е остатки рядов (49) и (50)

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots; \quad (51)$$

$$r'_n = v_{n+1} + v_{n+2} + \dots \quad (52)$$

Каждый из этих остатков является суммой сходящегося знакоположительного ряда.

Так как по условию $u_{n+1} \leq v_{n+1}$, $u_{n+2} \leq v_{n+2}$, ..., то на основании признака сравнения (п. 5, теорема 1) сумма первого ряда не превосходит суммы второго ряда, т. е.

$$r_n \leq r'_n.$$

Определение. Если даны два сходящихся ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots ; \quad (U)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots , \quad (V)$$

причем члены ряда (V) больше соответствующих членов ряда (U), то ряд (V) называется мажорирующим рядом по отношению к ряду (U).

Из предыдущей теоремы следует, что остаток мажорирующего ряда всегда больше или равен остатку основного ряда.

Обычно в качестве мажорирующего ряда берут ряд, остаток которого r'_n можно легко вычислить (например, геометрическую прогрессию).

Тогда, по только что доказанной теореме, мы легко оценим остаток r_n данного ряда.

Пример 1. Оценить третий остаток ряда

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots + \frac{1}{(n+1) 5^n} + \dots$$

Решение. Каждый член этого ряда меньше соответствующего члена геометрической прогрессии

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n} + \dots$$

со знаменателем $q = \frac{1}{5}$. Следовательно, третий остаток r_3 данного ряда меньше третьего остатка r'_3 этой прогрессии:

$$r_3 < r'_3 = \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \dots + \frac{1}{5^n} + \dots = \frac{\frac{1}{5^4}}{1 - 1/5} = \frac{1}{500}.$$

Таким образом, сумма данного ряда отличается от суммы его трех первых членов меньше, чем на $\frac{1}{500}$.

Оценка остатка знакопеременного ряда

Теорема 2. Пусть дан абсолютно сходящийся знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

Тогда абсолютная величина его n -го остатка не превосходит n -го остатка ряда, составленного из абсолютных величин членов этого ряда.

Доказательство. Пусть знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (53)$$

сходится абсолютно. Это значит, что сходится и ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \quad (54)$$

Рассмотрим n -е остатки этих рядов

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots ,$$

$$r'_n = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \dots .$$

При любом p имеем:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $p \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|],$$

или

$$|r_n| \leq r'_n.$$

Пример 2. Оценить третий остаток r_3 ряда

$$\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} + \dots$$

Решение. Данный ряд знакопеременный, так как, например,

$$\sin 1 > 0, \sin 2 > 0, \sin 3 > 0, \sin 4 < 0,$$

$$\sin 5 < 0, \sin 6 < 0, \sin 7 > 0, \dots$$

Рассмотрим ряд

$$\left| \frac{\sin 1}{2} \right| + \left| \frac{\sin 2}{2^2} \right| + \left| \frac{\sin 3}{2^3} \right| + \dots + \left| \frac{\sin n}{2^n} \right| + \dots$$

Этот ряд сходится, так как его члены не превосходят соответствующих членов геометрической прогрессии $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$:

$$\left| \frac{\sin n}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Поэтому данный ряд сходится абсолютно.

Обозначая остатки данного ряда, ряда, составленного из абсолютных величин, и геометрической прогрессии соответственно через r_3 , r'_3 , и r''_3 , имеем

$$|r_3| < r'_3 \leq r''_3.$$

Таким образом, находим оценку третьего остатка данного ряда

$$|r_3| \leq \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{\frac{1}{2^4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

**Оценка остатка знакопередающегося ряда,
сходящегося по признаку Лейбница**

Особенно проста оценка остатка в случае знакопередающегося ряда.

Теорема 3. Если знакопередающийся ряд сходится по признаку Лейбница, то его n -й остаток по абсолютной величине не превосходит первого из отброшенных членов.

Доказательство. Пусть ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

сходится по признаку Лейбница. Тогда n -й остаток ряда

$$r_n = \pm (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots)$$

сам является суммой знакопередающего ряда. На основании признака Лейбница остаток r_n по абсолютной величине должен быть не больше первого члена ряда, т. е.

$$|r_n| \leq u_{n+1}. \quad (55)$$

Пример 3. Вычислить с точностью до 0,01 сумму ряда

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} + \dots *$$

Решение. Данный ряд сходится по признаку Лейбница, поэтому

$$\Delta_S = |S - S_n| = |r_n| \leq u_{n+1}.$$

Так как сумма ряда должна быть вычислена с точностью до 0,01, то достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|r_n| \leq u_{n+1} \leq 0,01$, или

$$\frac{1}{(2n-1)!} \leq 0,01.$$

Это неравенство выполняется, начиная с $n=3$. Таким образом,

$$S \approx S_3 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \approx 1 - 0,167 + 0,008 \approx 0,841 \approx 0,84.$$

§ 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

1. Область сходимости функционального ряда

Перейдем теперь к изучению таких рядов, членами которых являются не числа, а функции, определенные в некоторой области изменения аргумента x :

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (56)$$

Например,

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx + \dots$$

Такие ряды называются *функциональными*. Придавая x какое-либо значение x_0 из области определения функций $u_n(x)$, получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (57)$$

Этот ряд может сходиться или расходиться. Если он сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда (56). Если при $x = x_0$ ряд (57) расходится, то точка x_0 называется *точкой расходимости* функционального ряда. Для одних точек, взятых

* Произведение натуральных чисел от 1 до какого-либо натурального числа m , т. е. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m$, называется *факториалом* и обозначается $m!$. Таким образом, $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m$. Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

из области определения функций $u_n(x)$, ряд может сходиться, а для других — расходиться.

Определение. Совокупность всех точек сходимости функционального ряда называется областью его сходимости.

Частичная сумма функционального ряда, т. е. сумма первых его n членов

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) \quad (58)$$

является функцией переменной x .

Из определения области сходимости функционального ряда следует, что для любой точки x этой области существует предел частичной суммы $S_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$. В точках, не принадлежащих области сходимости, частичная сумма $S_n(x)$ не имеет предела. Ясно, что сумма $S(x)$ функционального ряда является некоторой функцией переменной x , определенной в области сходимости ряда.

В этом случае пишут

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Если функциональный ряд сходится и имеет сумму $S(x)$, то разность $S(x) - S_n(x)$ называется, как и для числовых рядов, его остатком. Остаток ряда будем обозначать через $r_n(x)$: $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$. Ясно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$. Остаток $r_n(x)$ есть сумма ряда, полученного из ряда (56) отбрасыванием его первых n членов

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x) + \dots \quad (59)$$

Пример. Определить область сходимости функционального ряда

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \dots + \frac{1}{x^{2n}} + \dots \quad (60)$$

Решение. Члены ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{x^2}$. Как мы знаем, геометрическая прогрессия сходится, если $|q| < 1$, и расходится, если $|q| \geq 1$. Поэтому данный ряд сходится для тех значений x , для которых $\frac{1}{x^2} < 1$, или $x^2 > 1$. Таким образом, наш ряд сходится для всех точек x , для которых $|x| > 1$. Область сходимости данного ряда состоит из двух бесконечных интервалов $-\infty < x < -1$ и $1 < x < +\infty$.

2. Правильно сходящиеся функциональные ряды и их свойства

Определение. Функциональный ряд (56)

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

называется правильно сходящимся на сегменте $[a, b]$, если существует такой знакположительный сходящийся ряд

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (61)$$

что абсолютные величины членов данного ряда (56) для любого значения x , принадлежащего сегменту $[a, b]$, не превосходят соответствующих членов знакоположительного ряда (61), т. е.

$$|u_n(x)| \leq b_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (62)$$

Приведем без доказательства некоторые теоремы о свойствах правильно сходящихся рядов.

Теорема 1. *Всякий функциональный ряд, правильно сходящийся на сегменте $[a, b]$, сходится абсолютно в любой точке этого сегмента.*

Известно, что сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная. Этим же свойством обладает сумма правильно сходящегося функционального ряда, члены которого являются непрерывными функциями, т. е. имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если члены правильно сходящегося на сегменте $[a, b]$ функционального ряда*

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

непрерывны, то сумма также непрерывна на сегменте $[a, b]$.

Как мы знаем, сумму конечного числа функций можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Если

$$f(x) = \varphi(x) + \omega(x) + g(x),$$

то

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= [\varphi(x) + \omega(x) + g(x)]' = \varphi'(x) + \omega'(x) + g'(x), \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} [\varphi(x) + \omega(x) + g(x)] dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \omega(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Оказывается, что эти свойства не всегда выполняются, если число слагаемых бесконечно, т. е. для рядов. Однако эти свойства сохраняются для правильно сходящихся на сегменте функциональных рядов.

Теорема 3. *Если члены правильно сходящегося на сегменте $[a, b]$ функционального ряда*

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

непрерывны на этом сегменте, то ряд можно почленно интегрировать.

Это значит, что если x_1 и x_2 любые две точки сегмента $[a, b]$, то

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots] dx &= \int_{x_1}^{x_2} u_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} u_2(x) dx + \dots \\ &\quad \dots + \int_{x_1}^{x_2} u_n(x) dx + \dots \end{aligned} \quad (64)$$

Теорема 4. *Пусть функциональный ряд*

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

сходится на сегменте $[a, b]$ и его члены имеют непрерывные производные $u'_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда, если ряд, полученный после почленного дифференцирования является правильно сходящимся на сегменте $[a, b]$, то его сумма равна производной от суммы данного ряда:

$$[u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots]' = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots \quad (65)$$

Теорема 5. Если правильно сходящийся на сегменте $[a, b]$ ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

умножить на ограниченную функцию $\varphi(x)$, то полученный ряд

$$\varphi(x) \cdot u_1(x) + \varphi(x) \cdot u_2(x) + \dots + \varphi(x) \cdot u_n(x) + \dots \quad (66)$$

будет правильно сходящимся на сегменте $[a, b]$.

§ 3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Важным частным случаем функциональных рядов являются степенные ряды.

О п р е д е л е н и е. Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots, \quad (67)$$

где a и коэффициенты ряда $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ — постоянные. В частности, при $a=0$ степенной ряд имеет вид

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (68)$$

1. Область сходимости степенного ряда

Изучим сперва свойства степенных рядов вида (68)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Прежде всего выясним, какой вид имеет область сходимости степенного ряда (68). Для этого рассмотрим знакоположительный ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (68):

$$|a_0| + |a_1x| + \dots + |a_nx^n| + \dots, \quad (69)$$

и применим к нему признак Даламбера. Для этого найдем предел отношения последующего члена $u_{n+1} = |a_{n+1}x^{n+1}|$ к предыдущему $u_n = |a_nx^n|$ при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Предположим, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0$. Обозначим его че-

рез $\frac{1}{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}.$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |x| \cdot \frac{1}{R}.$$

На основании признака Даламбера заключаем, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{R} < 1$, т. е. если $|x| < R$, то ряд (69) сходится. Но в таком случае по общему достаточному признаку сходимости знакопеременных рядов ряд (68) также сходится при $|x| < R$, причем, очевидно, сходится абсолютно. Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, то ряд (69) расходится. Так как в этом случае для всех достаточно больших n члены ряда (69) возрастают (см. стр. 505), то общий член $u_n = |a_n x^n|$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, не стремится к нулю и общий член ряда (68), т. е. $a_n x^n$. Поэтому для всех значений x , удовлетворяющих неравенству $|x| > R$, степенной ряд (68) расходится.

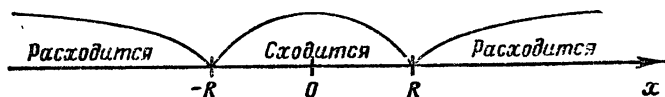


Рис. 261

Если, наконец, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{R} = 1$, т. е. если $|x| = R$, то здесь признак Даламбера неприменим и как ряд (69), так и ряд (68) могут сходиться или расходиться в зависимости от конкретных случаев.

Таким образом, в предположении, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ существует и не равен нулю, доказана следующая теорема.

Теорема. Областью сходимости степенного ряда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

является интервал $(-R, R)$, к которому, в зависимости от конкретных случаев, могут быть добавлены концевые точки $-R$ и R (рис. 261). В каждой точке интервала $(-R, R)$ ряд сходится абсолютно*.

Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда, а половина его длины, т. е. число R — *радиусом сходимости*.

Ясно, что всякий степенной ряд (68) сходится при $x=0$, так как при $x=0$ получается числовой ряд $a_0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$. Если других точек сходимости нет, то в этом случае будем считать,

* Можно показать, что теорема остается справедливой и в случае, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ не существует.

что радиус сходимости $R=0$. Если степенной ряд сходится во всех точках числовой оси, то будем считать, что радиус сходимости $R=\infty$.

Рассмотрим примеры на отыскание области сходимости степенных рядов.

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда

$$\frac{x}{\sqrt{1}} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \dots \quad (70)$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда (70):

$$\frac{|x|}{\sqrt{1}} + \frac{|x|^2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} + \dots \quad (71)$$

Здесь $u_n = \frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$, $u_{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} : \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} \right] = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x|.$$

Таким образом, ряд (71), а следовательно, и ряд (70) сходится для $|x| < 1$, т. е. в интервале $(-1, 1)$, и расходится для $|x| > 1$. Радиус сходимости ряда $R=1$. Исследуем теперь сходимость ряда на концах интервала сходимости, т. е. в точках $x=1$ и $x=-1$.

Подставляя в ряд (70) $x=1$, получим расходящийся обобщенный гармонический ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

(так как $p = \frac{1}{2} < 1$, см. § 1, п. 5, стр. 508.)

В точке $x=-1$ получим знакочередующийся ряд

$$-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots,$$

который сходится на основании признака сходимости Лейбница.

Таким образом, окончательно, областью сходимости ряда (70) является интервал $(-1, 1)$, к которому добавляется левая конечная точка $x=-1$: $-1 \leq x < 1$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (72)$$

Решение. Найдем предел отношения последующего члена к предыдущему для ряда, члены которого равны абсолютным величинам членов данного ряда:

$$1 + \frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^2}{2!} + \dots + \frac{|x|^n}{n!} + \dots; \quad (73)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|x|^n}{n!} \right] = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Итак, для любого значения x $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$. Следовательно, на основании признака Даламбера ряд (73), а значит и ряд (72) сходятся на всей числовой оси. Здесь радиус сходимости $R = \infty$.

2. Свойства степенных рядов

Пусть степенной ряд (68)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

имеет интервал сходимости $(-R, R)$. Рассмотрим ряды, получающиеся из ряда (68) почленным дифференцированием и интегрированием:

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots; \quad (74)$$

$$a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \dots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (75)$$

Применяя признак Даламбера к рядам, составленным из абсолютных величин членов ряда (74) и (75), и предполагая при этом, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ существует, легко убедиться, что ряды (74) и (75) имеют тот же интервал сходимости, что и исходный ряд (68).

Таким образом, имеем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

имеет интервал сходимости $(-R, R)$. Тогда ряды, полученные из данного ряда почленным его дифференцированием и интегрированием, имеют тот же интервал сходимости, что и данный ряд.

Теорема 2. Пусть степенной ряд (68)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

имеет интервал сходимости $(-R, R)$; а r — произвольное положительное число, меньшее чем R ($0 < r < R$). Тогда данный степенной ряд является правильно сходящимся на сегменте $[-r, r]$.

Доказательство. Как мы знаем, степенной ряд сходится абсолютно в любой точке интервала сходимости. Поэтому в точке $x=r$ знакоположительный ряд

$$|a_0| + |a_1|r + |a_2|r^2 + \dots + |a_n|r^n + \dots \quad (76)$$

сходится. Пусть x — любая точка сегмента $[-r, r]$. Так как $|x| \leq r$, то $|a_nx^n| \leq |a_n|r^n$. Поэтому члены ряда, составленного из абсолютных величин членов данного ряда (68)

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \dots + |a_nx^n| + \dots,$$

для любого значения x , принадлежащего сегменту $[-r, r]$, не превосходят соответствующих членов числового знакоположительного ряда (76). А это означает, согласно определению, что данный сте-

пенной ряд правильно сходящийся на сегменте $[-r, r]$. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3. Сумма степенного ряда (68)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

является непрерывной функцией в каждой точке его интервала сходимости $(-R, R)$.

Доказательство. Пусть x_0 — любая точка интервала сходимости. Тогда существует такое положительное число r , $|x_0| < r < R$, что сегмент $[-r, r]$ содержит точку x_0 (рис. 262). По теореме 2 степенной ряд (68) на сегменте $[-r, r]$ правильно сходящийся.

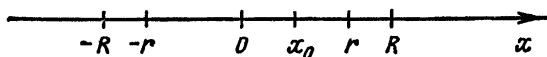


Рис. 262

Потому, на основании теоремы 2, § 2, его сумма является непрерывной функцией в любой точке сегмента $[-r, r]$ и, в частности, в точке x_0 .

Теорема 4. Степенной ряд (68)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

можно почленно дифференцировать в любой точке его интервала сходимости.

Доказательство. Пусть степенной ряд (68) имеет интервал сходимости $(-R, R)$. Рассмотрим ряд, составленный из производных членов данного ряда:

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \quad (*)$$

Согласно теореме 1, его интервал сходимости совпадает с интервалом сходимости данного ряда. Пусть x_0 — произвольная точка интервала сходимости. Рассмотрим сегмент $[-r, r]$, лежащий внутри интервала сходимости и содержащий точку x_0 ($|x_0| < r < R$) (см. рис. 262). По теореме 2 степенной ряд (*) правильно сходящийся. Следовательно, на основании теоремы 4, § 2, его сумма равна производной от суммы данного ряда, т. е.

$$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots)' = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$$

Теорема 5. Степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

можно почленно интегрировать в интервале сходимости $(-R, R)$, т. е. если x_1 и x_2 — точки, принадлежащие интервалу сходимости, то

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots) dx &= \int_{x_1}^{x_2} a_0 dx + \int_{x_1}^{x_2} a_1x dx + \dots + \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} a_nx^n dx + \dots \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим сегмент $[-r, r]$, лежащий в интервале сходимости и содержащий точки x_1 и x_2 . Так как на сегменте $[-r, r]$ степенной ряд правильно сходящийся, то по теореме 3, § 2 его можно почленно интегрировать.

3. Ряды по степеням разности $x-a$

Рассмотрим теперь ряды по степеням разности $x-a$:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (77)$$

Ряды вида (68) являются частным случаем рядов (77) при $a=0$. Положив $x-a=t$, приведем ряд (77) к ряду вида (68)

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots \quad (78)$$

Если ряд (78) имеет интервал сходимости $(-R, R)$, т. е. сходится для всех значений t , удовлетворяющих неравенствам $-R < t < R$, то, очевидно, ряд (77) сходится для всех тех значений x , для которых $-R < x-a < R$, т. е. для всех x , лежащих в интервале $a-R < x < a+R$. Так как ряд (78) расходится для всех t , таких, что $|t| > R$, то, следовательно, ряд (77) расходится для всех значений x , удовлетворяющих условию $|x-a| > R$.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда (77) является интервал с центром в точке a длины $2R$. Во всех точках этого интервала ряд (77) сходится абсолютно, а вне этого интервала ряд (77) расходится. В точках $x=a+R$ и $x=a-R$ (т. е. на концах интервала сходимости) в зависимости от конкретных видов ряда может иметь место сходимость или расходимость.

Свойства степенных рядов по степеням x сохраняются и для рядов по степеням $x-a$.

Степенной ряд (77) абсолютно сходится на интервале $(a-R, a+R)$ и его сумма есть непрерывная функция на этом интервале. Степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри его интервала сходимости, причем полученные ряды имеют тот же интервал сходимости, что и исходный ряд (77).

Практически интервал сходимости ряда (77) можно находить так же с помощью признака Даламбера.

Пример. Найти область сходимости степенного ряда

$$\frac{x-2}{1 \cdot 2} + \frac{(x-2)^2}{2 \cdot 2^2} + \dots + \frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n} + \dots \quad (79)$$

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\frac{|x-2|}{1 \cdot 2} + \frac{|x-2|^2}{2 \cdot 2^2} + \dots + \frac{|x-2|^n}{n \cdot 2^n} + \dots \quad (79')$$

Применяем признак Даламбера: $u_n = \frac{|x-2|^n}{n \cdot 2^n}$, $u_{n+1} = \frac{|x-2|^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-2|^{n+1} \cdot n \cdot 2^n}{|x-2|^n (n+1) 2^{n+1}} = \frac{|x-2|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x-2|}{2}.$$

По признаку Даламбера ряд (79') сходится, если $\frac{|x-2|}{2} < 1$, и рас-
сходится, если $\frac{|x-2|}{2} > 1$. Следовательно, и данный ряд (79) сxo-
дится, если $\frac{|x-2|}{2} < 1$, и расходится, если $\frac{|x-2|}{2} > 1$. Поэтому
ряд (79) сходится в интервале $0 < x < 4$ с центром в точке $a=2$.
Радиус сходимости $R=2$. Исследуем сходимость ряда (79) в точках
 $x=0$, $x=4$, т. е. на концах интервала сходимости. При $x=4$ по-
лучаем расходящийся гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

При $x=0$ получаем неабсолютно сходящийся знакочередующийся ряд

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} + \dots$$

Итак, ряд (79) сходится для всех x , удовлетворяющих условию
 $0 \leq x < 4$.

4. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора

Пусть функция $f(x)$ является суммой степенного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots, \quad (80)$$

интервал сходимости которого $(a-R, a+R)$.

В этом случае говорят, что функция $f(x)$ разлагается в степен-
ной ряд в окрестности точки a или по степеням $x-a$. Найдем
коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ этого степенного ряда.

Мы знаем, что в интервале сходимости степенной ряд можно
почленно дифференцировать, причем в результате получается ряд,
имеющий тот же интервал сходимости $(a-R, a+R)$, что и исход-
ный ряд. Последовательно дифференцируя тождество (80), получим
тождества, справедливые для любого x из интервала сходимости

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 + \dots$$

$$\dots + a_n(x-a)^n + a_{n+1}(x-a)^{n+1} + \dots,$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \dots$$

$$\dots + na_n(x-a)^{n-1} + (n+1)a_{n+1}(x-a)^n + \dots,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-a) + 3 \cdot 4a_4(x-a)^2 + \dots$$

$$\dots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + (n+1)na_{n+1}(x-a)^{n-1} + \dots,$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x-a) + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} +$$

$$+ (n+1)n(n-1)a_{n+1}(x-a)^{n-2} + \dots,$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2a_n + (n+1)n(n-1) \dots 3 \cdot 2a_{n+1}(x-a) + \dots$$

$$\dots$$

Полагая в полученных тождествах $x=a$, получим

$$f(a) = a_0, \quad f'(a) = a_1, \quad f''(a) = 2a_2, \quad f'''(a) = 2 \cdot 3a_3, \\ f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2a_n, \dots$$

Отсюда находим коэффициенты степенного ряда:

$$a_0 = f(a), \quad a_1 = f'(a), \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2}, \quad a_3 = \frac{f'''(a)}{2 \cdot 3}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}, \dots$$

или

$$a_0 = f(a), \quad a_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \dots$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в равенство (80), получим

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Итак, если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд по степеням $x-a$, то этот ряд имеет следующий вид:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (81)$$

Полученный ряд (81) называется *рядом Тейлора** для функции $f(x)$.

В частном случае, при $a=0$ ряд (81) принимает вид

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (82)$$

Этот ряд называется *рядом Маклорена*** для функции $f(x)$.

Таким образом, если функция разлагается в ряд по степеням $x-a$, то этот ряд является ее рядом Тейлора (или рядом Маклорена, если $a=0$).

Как мы видим, если функция разлагается в степенной ряд по степеням $x-a$, то она имеет производные всех порядков в точке $x=a$, или, как говорят, бесконечно дифференцируема в точке a .

Рассмотрим теперь обратную задачу. Пусть дана бесконечно дифференцируемая в точке a функция $f(x)$. Составим для нее формально ряд Тейлора

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!} + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Поставим следующий вопрос: будет ли сумма данного ряда Тейлора совпадать с функцией $f(x)$, для которой он составлен? Как показывают примеры, это не всегда так.

Пример. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

* Тейлор (1685—1731)—английский математик.

** Маклорен (1698—1746)—шотландский математик.

Можно показать, что в точке $x=0$ эта функция имеет производные всех порядков, причем $f^{(n)}(0)=0$ ($n=1, 2, \dots$). Поэтому ряд Маклорена для этой функции будет иметь вид

$$0 + \frac{0}{1!} + \frac{0}{2!} x^2 + \dots + \frac{0}{n!} x^n + \dots$$

Его сумма $S(x)$ тождественно равна 0 и, следовательно, не совпадает с данной функцией.

Выясним теперь, при каких условиях сумма ряда Тейлора данной функции совпадает с функцией, для которой этот ряд составлен. Запишем частичную сумму ряда Тейлора

$$S_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Эта частичная сумма называется *многочленом Тейлора степени n* . Рассмотрим разность между функцией $f(x)$ и ее многочленом Тейлора степени n . Эта разность называется *остаточным членом ряда Тейлора* и обозначается через $R_n(x)$ *:

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x). \quad (83)$$

Теорема. Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в точке a функция $f(x)$ являлась суммой составленного для нее ряда Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $R_n(x)$ стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Условие необходимо. Пусть $f(x)$ есть сумма ряда Тейлора, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$. Тогда из формулы (83) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Условие достаточно. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Тогда из формулы (83) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = 0$, т. е. что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$. А это и значит, что $f(x)$ есть сумма ряда.

Эта теорема показывает, что для исследования вопроса о разложимости функции в ряд Тейлора нужно исследовать поведение его остаточного члена $R_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Если для данного значения $x = x_0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x_0) = 0$, то сумма ряда Тейлора равна значению функции в точке x_0 , т. е. $f(x_0)$. Если $R_n(x_0)$ не стремится к нулю, то ряд Тейлора либо расходится, либо его сумма при $x = x_0$ не совпадает со значением функции в данной точке x_0 .

Найдем, какой вид имеет остаточный член $R_n(x)$. Из формулы (83) имеем

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

* Не следует смешивать остаточный член ряда Тейлора с остатком ряда Тейлора. Остаток ряда Тейлора есть разность между его суммой $S(x)$ и частичной суммой $S_n(x)$: $S(x) - S_n(x)$, а остаточный член ряда Тейлора $R_n(x)$ есть разность между функцией $f(x)$, для которой этот ряд составлен, и $S_n(x)$. Остаток ряда Тейлора будет совпадать с остаточным членом ряда Тейлора только в случае, если $S(x) = f(x)$.

Подставляя в последнее соотношение выражение для $S_n(x)$, получим

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \quad (84)$$

Будем искать остаточный член $R_n(x)$ в виде

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q, \quad (85)$$

где величина Q подлежит определению.

Тогда формулу (84) можно переписать в виде

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q. \quad (86)$$

Зафиксируем x . Тогда Q будет иметь некоторое числовое значение. Для нахождения Q составим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q.$$

Полагая $t=x$, получим, очевидно, что $F(x)=0$. Принимая во внимание равенство (86), убеждаемся, что и $F(a)=0$. Найдем производную от $F(t)$ по переменной t , полагая при этом, что x постоянно:

$$\begin{aligned} F'(t) = & -f'(t) + f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{2f''(t)}{2!}(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \\ & + \frac{3f'''(t)}{3!}(x-t)^2 - \frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 + \dots + \frac{nf^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} - \\ & - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(x-t)^n(n+1)}{(n+1)!} Q, \end{aligned}$$

или, после упрощений,

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(x-t)^n}{n!} Q.$$

Итак, на сегменте $[a, x]$ функция $F(t)$ дифференцируема и на концах сегмента обращается в нуль. Следовательно, она удовлетворяет условиям теоремы Ролля (см. гл. VI, § 6, п. 2). Поэтому существует такое значение $t=c$, заключенное между a и x , для которого производная $F'(t)$ обращается в нуль: $F'(c)=0$, т. е.

$$F'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{(x-c)^n}{n!} Q = 0.$$

Из последнего соотношения находим Q :

$$Q = f^{(n+1)}(c).$$

Подставляя найденное значение Q в равенство (85), получим

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad (87)$$

где c заключено между a и x .

Выражение остаточного члена по формуле (87) называется *остаточным членом в форме Лагранжа*.

В частном случае при $a=0$, получим выражение остаточного члена для ряда Маклорена

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (88)$$

где c содержится между 0 и x .

Приведенные виды остаточного члена во многих случаях позволяют легко исследовать его поведение при $n \rightarrow \infty$.

Принимая во внимание соотношение (86) и выражение (87) для остаточного члена, получим

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad (89)$$

где c заключено между a и x .

Формула (89) называется *формулой Тейлора*, а ее частный случай при $a=0$ называют *формулой Маклорена*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad (90)$$

где c заключено между 0 и x .

5. Разложение некоторых элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена

Приведем примеры на разложение в степенные ряды некоторых элементарных функций.

1. Разложение в степенной ряд функции $f(x) = e^x$. Находим производные: $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ..., $f^{(n)}(x) = e^x$, ... При $x=0$ имеем: $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$, ..., $f^{(n)}(0) = 1$, ...

Напишем ряд Маклорена для функции $f(x) = e^x$, воспользовавшись формулой (82):

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (91)$$

Определим область сходимости этого ряда, применяя признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, для любого x $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$, т. е. ряд (91) сходится абсолютно на всей числовой оси.

Для того чтобы установить, что этот ряд имеет своей суммой функцию e^x , покажем, что для любого x $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Напишем остаточный член ряда Маклорена. Так как

$f^{(n+1)}(c) = e^c$, то по формуле (88) $R_n(x)$ имеет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1},$$

где c заключено между 0 и x . Функция e^x монотонно возрастает, поэтому $e^c < e^{|x|}$, так как $c < |x|$. Таким образом,

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}. \quad (92)$$

Мы только что видели, что ряд с общим членом $\frac{|x|^n}{n!}$ сходится на всей числовой оси. Поэтому в силу необходимого признака сходимости при любом x $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$. Но тогда и $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ также стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, на основании неравенства (92) $R_n(x) \rightarrow 0$ для любого значения x и сумма ряда (91) совпадает с функцией e^x .

Итак, на всей числовой оси имеет место разложение

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (93)$$

2. Разложение в степенной ряд функции $f(x) = \sin x$. Находим производные: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x$, $f^V(x) = \cos x$, $f^{VI}(x) = -\sin x$, ..., $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$ (см. гл. VI, § 2, п. 1, формула (55)).

При $x=0$ имеем:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{IV}(0) = 0, \\ f^V(0) &= 1, \quad \dots, \quad f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}, \quad f^{(2n)}(0) = 0, \dots \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулу (82), получим для функции $\sin x$ следующий ряд Маклорена:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Как легко проверить, полученный ряд сходится на всей числовой оси. Исследуем его остаточный член $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} =$

$$= \frac{\sin\left[c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(n+1)!} x^{n+1}, \text{ где } c \text{ содержится между } 0 \text{ и } x. \text{ Так как}$$

$|f^{(n+1)}(c)| = \left| \sin\left[c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right] \right| \leq 1$, то $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Принимая во внимание, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (см. предыдущий пример), заключаем, что $R_n(x) \rightarrow 0$.

Поэтому для функции $\sin x$ на всей числовой прямой имеет место разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (94)$$

3. Разложение в степенной ряд функции $f(x) = \cos x$. Разложение функции $\cos x$ можно было бы получить приемом, аналогичным тому, с помощью которого было получено разложение в ряд функции $\sin x$. Однако проще получить разложение функции $\cos x$, если почленно продифференцировать разложение $\sin x^*$:

$$(\sin x)' = (x)' - \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^5}{5!}\right)' - \dots + \left[\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]' + \dots$$

Следовательно,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \quad (95)$$

Это разложение справедливо на всей числовой оси.

4. Биномиальный ряд. Разложим по степеням x функцию $f(x) = (1+x)^m$, где m — любое действительное число, отличное от нуля.

Дифференцируя, имеем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(1+x)^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \\ \dots, f^{(n)}(x) &= m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \dots \end{aligned}$$

При $x=0$

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \quad f'(0) = m, \quad f''(0) = m(m-1), \quad f'''(0) = m(m-1)(m-2), \\ \dots, f^{(n)}(0) &= m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1). \end{aligned}$$

Подставляя в формулу (82), получим ряд Маклорена для функции $(1+x)^m$:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \\ \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \end{aligned}$$

Этот ряд называется *биномиальным*. Найдем его интервал сходимости. Применяя признак Даламбера, получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} \right|}{\left| \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n \right|} = \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m-n}{n+1} \right| = |x|. \end{aligned}$$

Мы видим, что ряд сходится при $|x| < 1$, т. е. в интервале $-1 < x < 1$. Можно показать, что и в данном случае остаточный член $R_n(x)$ для $|x| < 1$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Однако в связи со сложностью этого доказательства мы его опускаем.

Итак, в интервале $-1 < x < 1$ имеет место разложение

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \\ &+ \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (96) \end{aligned}$$

* Почленное дифференцирование законно на основании свойств степенных рядов.

При $|x| > 1$, если только m не является натуральным числом, ряд расходится. На границах интервала сходимости ряд будет сходиться или расходиться в зависимости от конкретных значений m^* . Если m — натуральное число, то начиная с $n = m + 1$ все коэффициенты обращаются в нуль, и получаем многочлен, называемый биномом Ньютона (см. в сноске на стр. 184 формулу бинома Ньютона, в которой следует положить $a = 1$, $b = x$, $n = m$).

Приведем несколько примеров биномиальных рядов для различных значений m .

а) $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$. Здесь $m = \frac{1}{2}$. Применяя формулу (96), получим

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}x}{1!} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2!} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3}{3!} + \dots$$

$$\dots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)x^n}{n!} + \dots,$$

или, после упрощений,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2 \cdot 1!} - \frac{1 \cdot x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3x^3}{2^3 \cdot 3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)x^n}{2^n n!} + \dots \quad (97)$$

Это разложение имеет место во всяком случае для $-1 < x < 1$. Более подробные исследования показывают, что оно справедливо и при $x = -1$, и при $x = 1$ (см. сноску.)

б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$. Здесь $m = -\frac{1}{2}$. По формуле (96)

получим разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1 \cdot x}{2 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^n + \dots, \quad (98)$$

справедливое для $|x| < 1$. Можно показать, что разложение (98) справедливо и для $x = 1$ (см. сноску.)

в) $f(x) = (1+x)^5$. Здесь $m = 5$. Применяя формулу (96), получим после упрощений

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$$

* Поведение ряда на концах интервала сходимости при различных значениях m видно из следующей таблицы:

$x = 1$	$m \leq -1$ $-1 < m < 0$ $m > 0$	расходится сходится условно сходится абсолютно
$x = -1$	$m < 0$ $m > 0$	расходится сходится абсолютно

5. Разложение в степенной ряд функции $y = \ln x$. При $x = 0$ функция $\ln x$ не определена, поэтому ее нельзя разложить по степеням x , т. е. в ряд Маклорена. Разложим функцию $y = \ln x$, например, по степеням $x - 1$.

Находим производные:

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad f''(x) = -1 \cdot x^{-2}, \quad f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}, \\ f^{IV}(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}, \dots$$

При $x = 1$ получим

$$f(1) = \ln 1 = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -1, \quad f'''(1) = 2!, \\ f^{IV}(1) = -3!, \quad \dots, \quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} (n-1)!, \dots$$

Применяя формулу (81), получим ряд Тейлора для функции $\ln x$:

$$\frac{x-1}{1!} - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2! (x-1)^3}{3!} - \frac{3! (x-1)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!} (x-1)^n + \dots,$$

или, после сокращений,

$$\frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n} + \dots$$

Применяя признак Даламбера и исследуя ряд на концах, найдем, что он сходится для всех значений x , удовлетворяющих неравенствам $0 < x \leq 2$. Можно показать, что для всех значений x , принадлежащих области сходимости, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Поэтому для $0 < x \leq 2$ имеет место следующее разложение:

$$\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n} + \dots$$

Разложение функций в степенной ряд по формулам (81) и (82) часто связано с громоздкими вычислениями при нахождении производных и исследовании остаточного члена. Покажем некоторые приемы, позволяющие при разложении функции в степенной ряд, избежать этих трудностей. С одним из таких приемов, основанным на возможности почленного дифференцирования степенного ряда в интервале его сходимости, мы познакомились при разложении функции $y = \cos x$.

Применение формулы суммы геометрической прогрессии. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Легко видеть, что эта функция является суммой геометрической прогрессии с первым членом, равным единице, и со знаменателем $q = -x$. Поэтому

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (99)$$

Это разложение имеет место для $|x| < 1$. Заметим, что функцию $f(x)$ можно записать в виде $f(x) = (1+x)^{-1}$ и, следовательно, ряд (99) является биномиальным и его можно было бы получить по формуле (96) при $m = -1$.

Метод подстановки. Сущность этого метода ясна из следующих примеров.

Пример 1. Разложить в степенной ряд функцию e^{-x^2} .

Решение. Положим $-x^2 = t$. Тогда $e^{-x^2} = e^t$. Напишем разложение функции e^t , применив формулу (93):

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$$

Это разложение имеет место для всех значений t . В частности, при $t = -x^2$ получим разложение

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots, \quad (100)$$

справедливое для всех значений x .

Пример 2. Разложить по степеням x функцию $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Полагаем $t = -x^2$. Тогда $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{2}}$. Воспользовавшись формулой (98), получим разложение $\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{1 \cdot t}{2 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3 t^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 t^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) t^n}{2^n \cdot n!} + \dots$, справедливое для интервала $-1 < t < 1$.

Подставив в это разложение $-x^2$ вместо t , получим разложение, годное для всех значений x из интервала $-1 < x < 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1 \cdot x^2}{2 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^4}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^6}{2^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) x^{2n}}{2^n \cdot n!} + \dots \quad (101)$$

Пример 3. Разложить по степеням x функцию $\frac{1}{1+x^2}$.

Решение. Полагая $t = x^2$, получим $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+t}$. По формуле (99)

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots$$

Подставив в это разложение x^2 вместо t , получим

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad (102)$$

справедливое для интервала $-1 < x < 1$.

Разложение в степенной ряд методом интегрирования. Сущность метода заключается в следующем. Допустим, что известно разложение в степенной ряд для производной от функции $f(x)$. Тогда, интегрируя ряд почленно, получим разложение в ряд функции $f(x)$.

Пример 4. Разложить по степеням x функцию $\ln(1+x)$.

Решение. Рассмотрим следующее тождество: $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$. Разложим подынтегральную функцию $\frac{1}{1+t}$ по форму-

ле (99) в степенной ряд

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots,$$

который сходится для всех значений t из интервала $-1 < t < 1$. Так как в интервале сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать, то для $|x| < 1$ имеем

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots) dt = t \Big|_0^x - \\ &\quad - \frac{t^2}{2} \Big|_0^x + \frac{t^3}{3} \Big|_0^x - \frac{t^4}{4} \Big|_0^x + \dots + \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x + \dots = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, если $-1 < x < 1$, то

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots \quad (103)$$

Можно показать, что это равенство справедливо и для $x=1$.

Пример 5. Разложить по степеням x функцию $\operatorname{arctg} x$.

Решение. Рассмотрим тождество

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Разложим подынтегральную функцию $\frac{1}{1+t^2}$ в степенной ряд, воспользовавшись формулой (102):

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \dots$$

Этот ряд сходится для всех значений t , удовлетворяющих неравенствам $-1 < t < 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots) dt = \\ &= t \Big|_0^x - \frac{t^3}{3} \Big|_0^x + \frac{t^5}{5} \Big|_0^x - \frac{t^7}{7} \Big|_0^x + \dots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Это разложение справедливо для всех значений x из интервала $-1 < x < 1$. Однако можно показать, что оно остается в силе и на концах интервала.

Итак, для всех x , принадлежащих сегменту $[-1, 1]$, имеет место равенство

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЕ РЯДОВ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Числовые и функциональные ряды широко применяются в приближенных вычислениях. Укажем на наиболее важные из этих применений.

1. Вычисление значений функций с помощью рядов

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x=x_0$ с заданной степенью точности. Предположим, что функцию можно разложить в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

на интервале $(a-R, a+R)$ и что точка $x=x_0$ принадлежит данному интервалу. Тогда

$$f(x_0) = a_0 + a_1(x_0-a) + a_2(x_0-a)^2 + \dots + a_n(x_0-a)^n + \dots$$

Взяв достаточное число первых членов ряда, получим приближенное равенство

$$f(x_0) \approx S_n(x_0) = a_0 + a_1(x_0-a) + a_2(x_0-a)^2 + \dots + a_n(x_0-a)^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с возрастанием n . Абсолютная погрешность этого приближенного равенства, т. е. $|f(x_0) - S_n(x_0)|$, равна модулю остатка ряда:

$$|f(x_0) - S_n(x_0)| = |r_n(x_0)|,$$

где

$$r_n(x_0) = a_{n+1}(x_0-a)^{n+1} + a_{n+2}(x_0-a)^{n+2} + \dots$$

Желая вычислить значение функции $f(x_0)$ с точностью $\varepsilon > 0$, мы должны взять сумму такого числа n первых членов, чтобы

$$|f(x_0) - S_n(x_0)| = |r_n(x_0)| < \varepsilon.$$

С методами оценки остатка ряда мы познакомились в § 1, п. 7.

Приведем еще один метод оценки остатка ряда с помощью остаточного члена ряда Тейлора (или Маклорена).

Если функция разложена в степенной ряд, то, как мы знаем, этот ряд есть ряд Тейлора или Маклорена (см. § 3, п. 4). В этом случае абсолютная погрешность, т. е. $|f(x_0) - S_n(x_0)|$, равна модулю остаточного члена ряда Тейлора (или Маклорена).

Таким образом,

$$|f(x_0) - S_n(x_0)| = |R_n(x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x_0-a)^{n+1} \right|,$$

где c содержится между a и x_0 . В зависимости от каждого конкретного случая применяется тот или иной метод оценки остатка ряда.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Вычислить с точностью до 0,001 число e .

Решение. Как известно, для любого x имеет место разложение (93)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

При $x=1$ получим

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Взяв первые $n+1$ членов, получим приближенное равенство

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Оценим погрешность приближения с помощью остаточного члена ряда Маклорена. Так как $f^{(n+1)}(x) = e^x$, то

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1},$$

где c лежит между 0 и x . При $x=1$ имеем

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad 0 < c < 1.$$

Принимая во внимание, что $e^c < e^1 < 3$ (см. гл. V, § 1, п. 8), получим $R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$.

$$\text{При } n=5 \quad \frac{3}{(5+1)!} = \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} > 0,001, \text{ а при } n=6$$

$$\frac{3}{(6+1)!} = \frac{1}{1680} < 0,001.$$

Поэтому для достижения требуемой точности достаточно взять $n=6$.

Итак, с точностью до 0,001 имеем

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}.$$

Каждое слагаемое выпишем с одним дополнительным знаком, чтобы к нашей ошибке не добавлялись ошибки от округления слагаемых:

$$e \approx 1,0000 + 1,0000 + 0,5000 + 0,1667 + \\ + 0,0417 + 0,0083 + 0,0014 = 2,7181.$$

Следовательно, с точностью до 0,001 $e = 2,718$.

Пример 2. Вычислить с точностью до 0,0001 $\sin 18^\circ$.

Решение. Для $\sin x$ имеем разложение (94), справедливое при всех значениях x :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Переводя 18° в радианы, получим $x = \frac{\pi}{10}$. Следовательно,

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3! 10^3} + \frac{\pi^5}{5! 10^5} - \dots \quad (104)$$

Ряд (104) знакочередующийся, члены которого убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю. Поэтому его остаток не превосходит первого отброшенного члена (см. § 1, п. 7). Так как $\frac{\pi^3}{3! \cdot 10^3} > 0,0001$, а $\frac{\pi^5}{5! \cdot 10^5} < 0,0001$, то с точностью до 0,0001 получим

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3! \cdot 10^3}.$$

Все вычисления проводим с одним дополнительным знаком, полагая $\pi \approx 3,14159$. Так как $\pi^3 \approx 31,00624$, то

$$\sin 18^\circ = \frac{3,14159}{10} - \frac{31,00624}{6000} = 0,31416 - 0,00517 = 0,30899,$$

Итак, $\sin 18^\circ \approx 0,3090$.

2. Приближенное вычисление интегралов

Поясним сущность метода примерами.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,0001.

Решение. Применить для вычисления этого интеграла формулу Ньютона—Лейбница мы не можем, так как первообразная для e^{-x^2} хотя и существует, но не выражается в элементарных функциях. Поэтому разложим подынтегральную функцию e^{-x^2} в степенной ряд (см. формулу (100)):

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

Этот ряд сходится на всей числовой оси. Следовательно, его можно почленно интегрировать на любом сегменте и, в частности, на сегменте $\left[0, \frac{1}{3}\right]$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots\right) dx = x \Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{x^3}{3 \cdot 1} \Big|_0^{\frac{1}{3}} + \\ &+ \frac{x^5}{5 \cdot 2!} \Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} \Big|_0^{\frac{1}{3}} + \dots = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 113^3} + \frac{1}{5 \cdot 213^5} - \frac{1}{7 \cdot 313^7} + \dots \end{aligned}$$

Искомый интеграл равен сумме знакочередующегося ряда. Так как

$$\frac{1}{5 \cdot 213^5} = \frac{1}{2430} < 0,001, \text{ а } \frac{1}{3 \cdot 113^3} = \frac{1}{81} > 0,001,$$

то с точностью до 0,001 на основании правила оценки погрешности в случае знакочередующегося ряда (см. § 1, п. 7), имеем

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} \approx 0,3333 - 0,0123 = 0,3210.$$

Итак,

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx \approx 0,321.$$

Замечание. Как мы знаем, первообразная $F(x)$ для функции e^{-x^2} не является элементарной функцией. Ее легко получить в виде суммы степенного ряда, проинтегрировав ряд (100) почленно в границах от 0 до x :

$$F(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots$$

Производная этой функции равна e^{-x^2} : $F'(x) = e^{-x^2}$.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

с точностью до 0,001.

Решение. Так как

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

то деля почленно обе части этого равенства на x , получим разложение

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \quad (105)$$

Интегрируя обе части равенства (105), получим

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right) dx = x \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \\ &+ \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \dots = \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{3 \cdot 3!} - \frac{1}{3 \cdot 3! 2^3} \right) + \left(\frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{5 \cdot 5! 2^5} \right) - \dots \end{aligned}$$

Полученный ряд можно рассматривать как разность двух сходящихся знакопеременных рядов, удовлетворяющих условиям теоремы Лейбница (см. § 1, п. 6):

$$1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots \quad (*)$$

$$\text{и} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 3! 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 5! 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 7! 2^7} + \dots \quad (**)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \left[1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots \right] - \\ &- \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 3! 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 5! 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 7! 2^7} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Но так как в знакочередующемся ряде, сходящемся по признаку Лейбница, погрешность не превосходит модуля первого из отброшенных членов и так как

$$\frac{1}{7 \cdot 7!} < 0,001 \text{ (для ряда *)},$$

$$\frac{1}{5 \cdot 5! \cdot 2^5} < 0,001 \text{ (для ряда **)},$$

то

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx \left[1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} \right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 3! \cdot 2^3} \right] \approx 0,4530.$$

Итак, с точностью до 0,001 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin x}{x} dx = 0,453$.

§ 5. ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

1. Понятие о функции комплексной переменной

Читатель знаком с понятием комплексных чисел из средней школы. Напомним вкратце это понятие. Комплексное число имеет вид $x + iy$, где x и y — действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$. Комплексное число $z = x + iy$ геометрически изображается точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy , координатами которой служат числа x и y . Очевидно и обратно, каждой точке плоскости Oxy соответствует единственное комплексное число z . Поэтому плоскость Oxy будем называть комплексной плоскостью, а точку плоскости, соответствующей комплексному числу $z = x + iy$, называть точкой z .

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называют действительное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом, геометрически модуль комплексного числа представляет собой расстояние точки z комплексной плоскости от начала координат. Неравенству $|z| < R$ (где $R > 0$) соответствует множество точек комплексной плоскости, отстоящих от начала координат на расстояние, меньшее, чем R . Иными словами, неравенству $|z| < R$ соответствует внутренность круга радиуса R с центром в начале координат.

Введем понятие функции комплексной переменной.

Определение. Комплексная переменная w называется функцией комплексной переменной $z = x + iy$, если

- 1) задано множество G комплексных чисел z ;
- 2) задан закон, по которому каждому комплексному числу z из этого множества соответствует одно или несколько значений комплексной переменной $w = u + iv$.

В дальнейшем будем рассматривать только однозначные функции, т. е. такие, для которых каждому значению z соответствует единственное значение w .

Функция комплексной переменной обозначается так же, как и функция действительной переменной: $w = f(z)$.

Примером функции комплексной переменной может служить многочлен

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

где n — натуральное число, а $a_0, a_1, \dots, a_n$ — комплексные числа. Эта функция определена для всех значений z или, как говорят, во всей комплексной плоскости.

Функция, являющаяся отношением двух многочленов, называется *рациональной функцией*. Например, $w = \frac{5z^3 + 6z - 7}{2z^2 + 3z - 2}$ — рациональная функция.

На функции комплексной переменной переносятся понятия предела, непрерывности и производной.

Введем предварительно понятие окрестности точки комплексной плоскости: δ — окрестностью точки z_0 называется внутренность круга радиуса δ с центром в точке z_0 .

Комплексное число $c = a + ib$ называется *пределом функции* $w = f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, если каково бы ни было положительное число ε , существует такая δ — окрестность точки z_0 , что для всех точек z комплексной плоскости, лежащих в этой окрестности (за исключением быть может точки z_0), выполняется неравенство

$$|f(z) - c| < \varepsilon.$$

Предел функции обозначается так:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c.$$

Функция $w = f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0 , если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Можно показать, что сумма и произведение нескольких непрерывных в данной точке функций есть функция непрерывная. Частное двух непрерывных функций будет тоже непрерывной функцией, если знаменатель в данной точке не равен нулю.

Производная от функции комплексной переменной $w = f(z)$ определяется так же, как и производная функции действительной переменной, т. е. как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Пример. Найти производную функции $w = f(z) = z^n$.

Решение. Имеем $f(z + \Delta z) = (z + \Delta z)^n$. Применяя формулу бинома Ньютона, получим:

$$f(z + \Delta z) = (z + \Delta z)^n = z^n + n z^{n-1} \Delta z + \frac{n(n-1)}{2!} z^{n-2} (\Delta z)^2 + \dots + (\Delta z)^n.$$

Найдем приращение функции:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = \left[z^n + nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}(\Delta z)^2 + \dots + (\Delta z)^n \right] - z^n = nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}(\Delta z)^2 + \dots + (\Delta z)^n.$$

Следовательно,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}(\Delta z)^2 + \dots + (\Delta z)^n}{\Delta z} = \\ = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}\Delta z + \dots + (\Delta z)^{n-1} \right] = nz^{n-1}.$$

Итак,

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

Можно показать, что правила дифференцирования суммы, произведения и частного, выведенные для функций действительной переменной, остаются справедливыми и для функции комплексной переменной.

2. Числовые ряды с комплексными членами

Рассмотрим последовательность, члены которой являются комплексными числами

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, \text{ где } z_n = x_n + iy_n.$$

Обобщим понятие предела последовательности для данного случая.

Комплексное число $c = a + ib$ называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если каково бы ни было положительное число ε , найдется такое натуральное число N , что для всех натуральных чисел $n \geq N$ выполняется неравенство

$$|z_n - c| < \varepsilon.$$

Так как $z_n - c = (x_n + iy_n) - (a + bi) = (x_n - a) + i(y_n - b)$, то

$$|z_n - c| = |(x_n - a) + i(y_n - b)| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \varepsilon.$$

Но выражение $\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}$ равно расстоянию между точками $(x_n; y_n)$ и $(a; b)$, т. е. между точками z_n и c ; следовательно, точки z_n неограниченно приближаются к точке c с возрастанием n .

Пусть дан ряд, членами которого являются комплексные числа

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \text{ где } z_n = x_n + iy_n. \quad (106)$$

Если существует предел частичной суммы ряда $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ при $n \rightarrow \infty$, то ряд (106) называется *сходящимся*, а предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ его суммой; если частичная сумма не имеет предела, то ряд называется *расходящимся*.

Имеет место теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема. Пусть дан ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots;$$

если ряд, составленный из модулей членов данного ряда

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots,$$

сходится, то данный ряд также сходится.

Ряд с комплексными членами называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из модулей его членов. Абсолютно сходящиеся ряды с комплексными членами обладают теми же свойствами, что и абсолютно сходящиеся ряды с действительными членами.

3. Степенные ряды в комплексной области

Пусть дан степенной ряд

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots,$$

где $z = x + iy$, а коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ комплексные или действительные числа. Аналогично тому, как это было сделано для степенных рядов в действительной области, можно установить следующее.

1. Для каждого степенного ряда, вообще говоря, существует такое число $R > 0$, что для всех $|z| < R$ степенной ряд сходится, для $|z| > R$ — расходится. Точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, для которых $|z| < R$, лежат внутри круга радиуса R с центром в начале координат. Этот круг называется *кругом сходимости* степенного ряда, а его радиус R — *радиусом сходимости*. Вне круга сходимости, т. е. в точках, где $|z| > R$, степенной ряд расходится. На границе круга сходимости, т. е. в точках, для которых $|z| = R$, в зависимости от конкретных видов ряда может иметь место сходимость или расходимость.

Замечание. Если степенной ряд сходится только в точке $z = 0$, то его радиус сходимости полагают равным нулю: $R = 0$. Если степенной ряд сходится при всех значениях z , т. е. во всей плоскости комплексной переменной, то радиус сходимости полагают равным бесконечности: $R = \infty$.

2. Внутри круга сходимости степенной ряд обладает всеми свойствами, которыми обладают степенные ряды с действительными членами, т. е. внутри круга сходимости степенной ряд абсолютно сходится и его сумма $S(z)$ есть непрерывная функция комплексной переменной; степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать, причем полученный ряд имеет тот же радиус сходимости, что и первоначальный. Эти утверждения мы не доказываем.

Функция комплексной переменной, которая может быть представлена как сумма степенного ряда в некотором круге сходимости, называется аналитической функцией в данном круге сходимости.

Круг сходимости можно найти с помощью признака Даламбера.

В качестве примера найдем область сходимости следующего ряда:

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (107)$$

Рассмотрим ряд, состоящий из модулей членов данного ряда:

$$1 + \frac{|z|}{1} + \frac{|z|^2}{2!} + \dots + \frac{|z|^n}{n!} + \dots \quad (108)$$

Это знакоположительный ряд: $u_n = \frac{|z|^n}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} \right] = |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = |z| \cdot 0 = 0.$$

Итак, при любом z $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$. Следовательно, ряд (108) сходится во всей плоскости комплексной переменной; но тогда по теореме п. 2 ряд (107) также сходится во всей плоскости комплексной переменной, причем сходится абсолютно.

С помощью степенных рядов в комплексной области обобщим понятие показательной и тригонометрических функций на случай комплексной переменной.

Как мы знаем, для любого вещественного значения x имеет место разложение (93)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Рассмотрим ряд, получающийся из ряда (93), если в нем действительную переменную x заменить комплексной переменной z :

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Мы только что видели, что этот ряд сходится во всей плоскости комплексной переменной и его сумма является, таким образом, аналитической функцией, которая при действительных значениях z (т. е. при $z=x$) совпадает с e^x . Обозначим сумму этого ряда и в случае комплексной переменной также e^z . Таким образом, по определению

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (109)$$

Можно показать, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 имеет место равенство $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

Дифференцируя ряд (109) почленно, получим

$$(e^z)' = \frac{1}{1!} + \frac{2z}{2!} + \frac{3z^2}{3!} + \dots + \frac{nz^{n-1}}{n!} + \dots = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Сравнивая с равенством (109), получим $(e^z)' = e^z$. Таким образом, функция e^z в комплексной области обладает основными свойствами показательной функции. Аналогично определим тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ для комплексных значений z :

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad (110)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!} + \dots \quad (111)$$

Эти ряды сходятся абсолютно для всех значений z . При $z = x$ (x — действительная переменная) определенные выше функции совпадают с функциями $\sin x$ и $\cos x$ действительной переменной.

Между показательной функцией e^z и тригонометрическими функциями $\sin z$ и $\cos z$ имеется простая связь. Пусть $z = it$, где t — какое-то комплексное число. Подставим $z = it$ в ряд (109), тогда

$$e^{it} = 1 + \frac{it}{1!} + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \frac{(it)^5}{5!} + \frac{(it)^6}{6!} + \dots$$

Так как $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$ и т. д., то получим

$$e^{it} = 1 + \frac{it}{1!} - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} - \frac{it^7}{7!} + \dots$$

Ряд (109) сходится абсолютно для любого значения z , следовательно сумма ряда не изменится от перестановки слагаемых.

Поэтому

$$e^{it} = \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots\right) + i \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots\right),$$

Но при любом t

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots,$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

Следовательно,

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad (112)$$

где t — любое комплексное число.

Заменяя в равенстве (112) t на $(-t)$, найдем

$$e^{-it} = \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos t - i \sin t.$$

Итак, для любого комплексного числа t имеем

$$\left. \begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i \sin t, \\ e^{-it} &= \cos t - i \sin t. \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Формулы (113) называются *формулами Эйлера* *. Из этих формул легко находим

$$\left. \begin{aligned} \sin t &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \\ \cos t &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Пример. Найти $e^{3+i\frac{\pi}{2}}$.

Решение. По свойству показательной функции $e^{3+i\frac{\pi}{2}} = e^3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Применяя для вычисления $e^{i\frac{\pi}{2}}$ формулу Эйлера при $t = \frac{\pi}{2}$, получим

$$e^{3+i\frac{\pi}{2}} = e^3 e^{i\frac{\pi}{2}} = e^3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = ie^3.$$

* Л. Эйлер (1707—1783) — великий математик, механик и физик.

В заключение заметим, что в комплексной плоскости функция e^z является периодической с периодом $T = 2\pi i$. В самом деле

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z. \quad (115)$$

§ 6. РЯДЫ ФУРЬЕ

1. Периодические процессы и периодические функции

Весьма многие процессы, происходящие в природе и технике, обладают свойством повторяться через определенные промежутки времени. Такие процессы называются периодическими. Примерами периодических процессов могут служить движения шатуна и поршня в двигателях, явления, связанные с распространением электромагнитных колебаний, и многие другие. Изучение периодических процессов математически описывается периодическими функциями. Определение периодической функции дано в гл. I, § 4, п. 8.

Простейшими периодическими функциями являются известные нам тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$. Период этих функций равен 2π :

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x. \quad (116)$$

Функции $\sin \omega x$ и $\cos \omega x$ также являются периодическими, но период их $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Действительно,

$$\sin \left[\omega \left(x \pm \frac{2\pi}{\omega} \right) \right] = \sin(\omega x \pm 2\pi) = \sin \omega x.$$

Сумма двух периодических функций, как, например, функция вида $a \sin \omega_1 x + b \cos \omega_2 x$, вообще говоря, уже не будет периодической. Но можно доказать, что если отношение $\omega_1 : \omega_2$ есть число рациональное, эта сумма будет периодической функцией.

Простейший периодический процесс — гармоническое колебание — описывается периодическими функциями $\sin \omega x$ и $\cos \omega x$. Более сложные периодические процессы, как мы увидим, описываются функциями, составленными либо из конечного, либо из бесконечного числа слагаемых вида $\sin \omega x$ и $\cos \omega x$.

Приведем несколько формул, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Каковы бы ни были целые числа p и k , имеют место следующие равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cdot \cos kx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } p \neq k; \\ \pi, & \text{если } p = k. \end{cases} \quad (117)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \cdot \sin kx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } p \neq k; \\ \pi, & \text{если } p = k. \end{cases} \quad (118)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \cdot \cos kx \, dx = 0. \quad (119)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = 0, \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0. \quad (120)$$

Проверим, например, равенство (117). Воспользуемся известной формулой

$$\cos px \cdot \cos kx = \frac{\cos (p+k)x + \cos (p-k)x}{2}.$$

Пусть сначала $p \neq k$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cdot \cos kx \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (p+k)x}{p+k} + \frac{\sin (p-k)x}{p-k} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

так как $\sin (p+k)\pi = 0$, $\sin (p-k)\pi = 0$.

Если $p = k$, то $\cos px \cdot \cos kx = \cos^2 px = \frac{1 + \cos 2px}{2}$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 px \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2px) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2p} \sin 2px \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Аналогично проверяются и равенства (118), (119) и (120).

2. Ряд Фурье

Рассмотрим функциональный ряд следующего вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots \quad (121)$$

Числа $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ называются *коэффициентами* ряда. Свободный член ряда записан в виде $\frac{a_0}{2}$ для единообразия получающихся в дальнейшем формул. Ряд (121) часто записывается также следующим образом:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (122)$$

Так как члены тригонометрического ряда (122) имеют общий период $T = 2\pi$, то и сумма ряда, если он сходится, будет также периодической функцией с периодом 2π .

Допустим, что функция $f(x)$ есть сумма этого ряда:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (122')$$

В этом случае говорят, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд. Предполагая, что ряд правильно сходящийся на сегменте $[-\pi, \pi]$, покажем, как определить его коэффициенты.

Так как правильно сходящийся на сегменте ряд можно почленно интегрировать на этом сегменте (см. § 2, п. 2), то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx).$$

Но так как $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$ (см. формулы (120),

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0 \pi.$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Пусть теперь k — натуральное число. Для нахождения коэффициента a_k умножим ряд (122') почленно на $\cos kx$. Полученный ряд

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)$$

в силу теоремы 5 § 2, п. 2, будет правильно сходящимся на сегменте $[-\pi, \pi]$. Интегрируя его почленно, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + \\ &+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx). \end{aligned} \quad (123)$$

Вследствие равенств (117) и (118) под знаком суммы отличным от нуля будет только один интеграл при $n = k$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi.$$

Так как по формуле (120) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0$, то равенство (123) запишется в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_k \pi,$$

откуда

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

Аналогично, умножая обе части равенства (122') на $\sin kx$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до π , на основании равенств (118), (119) и (120) найдем выражения для коэффициентов b_k :

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Таким образом, если периодическая функция $y = f(x)$ с периодом 2π является суммой правильно сходящегося на сегменте $[-\pi, \pi]$ тригонометрического ряда (122), то коэффициенты этого ряда определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. \quad (124)$$

По этим формулам можно вычислить все коэффициенты ряда для любого натурального k . Коэффициенты ряда, определенные по этим формулам, называются *коэффициентами Эйлера — Фурье*.

Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

коэффициенты которого определяются по формулам Эйлера — Фурье (124), называется *рядом Фурье**, соответствующим функции $y = f(x)$.

Таким образом, если периодическая функция $y = f(x)$ является суммой правильно сходящегося тригонометрического ряда, то этот ряд является ее рядом Фурье.

3. Сходимость ряда Фурье

При выводе формул (124) мы заранее предполагали, что функция $y = f(x)$ разлагается в правильно сходящийся тригонометрический ряд (122). Если же такого предположения не делать, а допустить только, что для функции $f(x)$ существуют все интегралы, стоящие в правых частях формул (124), то по этим формулам можно вычислить коэффициенты a_0 , a_k и b_k и составить тригонометрический ряд (122), который будет рядом Фурье, соответствующим данной функции.

Будет ли построенный таким образом ряд Фурье сходящимся и если он будет сходиться, то имеем ли мы право утверждать, что

* Ж. Фурье (1768—1830) — французский математик.

он сходится именно к функции $f(x)$, с помощью которой вычислялись коэффициенты ряда?

Подобный же вопрос возникал при изучении степенных рядов.

Оказывается, что сходимость ряда Фурье к заданной функции имеет место для довольно широкого класса функций. Достаточные условия сходимости ряда Фурье и, следовательно, возможность разложения функций в ряд Фурье даются теоремой Дирихле*. Прежде чем формулировать эту теорему, введем два определения.

О п р е д е л е н и е. Функция $y=f(x)$ называется кусочно-монотонной на сегменте $[a, b]$, если этот сегмент можно разделить на конечное число сегментов, внутри каждого из которых функция либо только возрастает, либо только убывает, либо постоянна.

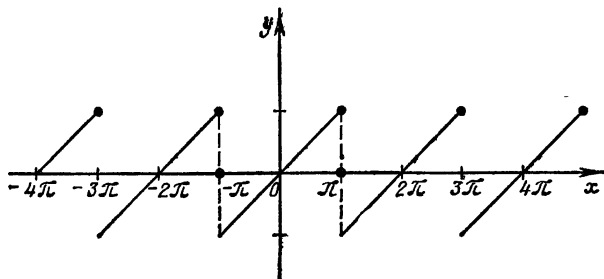


Рис. 263

Дадим теперь основное для этого раздела определение.

О п р е д е л е н и е. Функция $y=f(x)$ называется удовлетворяющей условиям Дирихле на сегменте $[a, b]$, если:

1) функция непрерывна на сегменте $[a, b]$ или же имеет на нем конечное число точек разрыва первого рода**;

2) функция кусочно-монотонна на сегменте $[a, b]$.

Сформулируем теперь теорему Дирихле, дающую достаточные условия разложимости функции $f(x)$ в ряд Фурье.

Теорема Дирихле. Пусть периодическая функция $y=f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет на любом сегменте условиям Дирихле. В таком случае ряд Фурье, соответствующий этой функции, сходится во всех точках числовой оси. При этом в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна значению функции в этой точке. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна среднему арифметическому предельных значений функции при $x \rightarrow x_0$ слева и справа, т. е.

$$S(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \right). \quad (125)$$

Доказательства этой теоремы мы приводить здесь не будем.

Рассмотрим теперь пример разложения функции в ряд Фурье.

* П. Дирихле (1805 — 1859) — немецкий математик.

** Определение точки разрыва первого рода см. гл. V, § 2, п. 1.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π , заданную на интервале $-\pi < x \leq \pi$ формулой $f(x) = x$ (рис. 263).

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Применяя формулы (124), найдем коэффициенты Эйлера—Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} [\pi^2 - (-\pi)^2] = 0; \quad a_0 = 0.$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = \frac{1}{\pi k^2} \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi k^2} [\cos k\pi - \cos k\pi] = 0; \quad a_k = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \\ &= \frac{1}{k\pi} \left[-\pi \cos k\pi - \pi \cos k\pi + \frac{1}{k^2} \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = \\ &= -\frac{2}{k} \cos k\pi = -\frac{2(-1)^k}{k}; \quad b_k = -\frac{2(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots = 0; \\ b_1 &= \frac{2}{1}, \quad b_2 = -\frac{2}{2}, \quad b_3 = \frac{2}{3}, \quad b_4 = -\frac{2}{4}, \dots \end{aligned}$$

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид

$$2 \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx + \dots \right] \quad (126)$$

Так как функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям Дирихле, то в любой точке непрерывности $f(x)$ сумма ряда равна значению функции. В точках $-\pi$ и π функция имеет разрывы первого рода, и сумма ряда будет равна нулю (полусумма предельных значений справа и слева $\frac{-\pi + \pi}{2} = 0$). Это также непосредственно получается из

ряда (126) при $x = \pi$. На рис. 264 показан график функции $f(x)$ и частичные суммы ряда (126), содержащие 1, 2 и 3 члена. Из рисунка видно, как графики частичных сумм ряда приближаются к графику функции $f(x)$ при увеличении числа членов суммы.

* Действительно, $\cos k\pi = 1$ при k четном и $\cos k\pi = -1$ при k нечетном, поэтому можно написать $\cos k\pi = (-1)^k$.

Из формулы (126) можно получить интересное следствие. Полагая $x = \frac{\pi}{2}$, получим

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = 2 \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1} - \frac{\sin \pi}{2} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{3} - \frac{\sin 2\pi}{4} + \frac{\sin \frac{5\pi}{2}}{5} - \dots \right],$$

или

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right]$$

Отсюда находим сумму ранее изучавшегося нами ряда

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \dots = \frac{\pi}{4}. \quad (127)$$

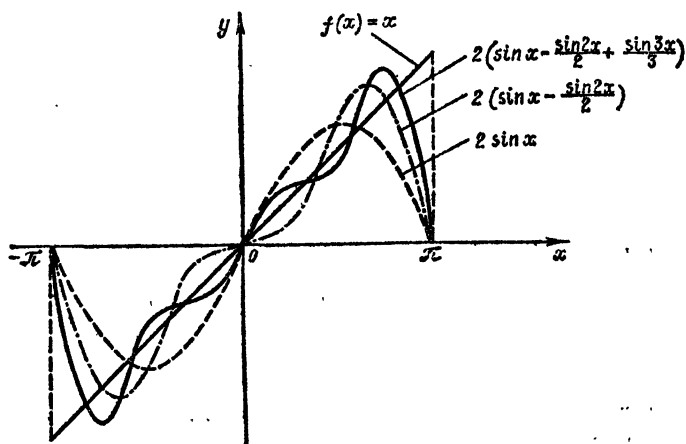


Рис. 264

4. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

В некоторых случаях формулы (124) для вычисления коэффициентов Фурье могут быть упрощены. Это имеет место для четных и нечетных функций (см. гл. I, § 4, п. 8).

Приведем несколько очевидных свойств четных и нечетных функций.

1. Произведение четной функции на четную или нечетной на нечетную есть функция четная.

Пусть, например, $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ — четные функции. Докажем, что функция $\omega(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$ также четная.

Так как $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции четные, то

$$f(-x) = f(x) \text{ и } \varphi(-x) = \varphi(x),$$

отсюда

$$\omega(-x) = f(-x) \cdot \varphi(-x) = f(x) \cdot \varphi(x) = \omega(x),$$

т. е. $\omega(x)$ — функция четная. Аналогично доказывается и вторая часть утверждения I.

II. Произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.

Это свойство доказывается так же, как и свойство I.

III. Если $y = f(x)$ — четная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (128)$$

На основании свойства аддитивности определенного интеграла можем написать

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

В первом интеграле сделаем замену переменной. Положим $x = -z$, тогда $dx = -dz$; при $x = 0$ $z = 0$, при $x = -a$ $z = a$. Поэтому

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-z) dz = \int_0^a f(-z) dz = \int_0^a f(z) dz.$$

Следовательно,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(z) dz + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

так как определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования.

IV. Если $y = f(x)$ — нечетная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (129)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству свойства III.

Допустим теперь, что нужно разложить в ряд Фурье четную функцию $f(x)$. Так как $\cos x$ — функция четная, а $\sin x$ — функция нечетная, то произведение $f(x) \cos x$ будет функцией четной, а $f(x) \sin x$ — функцией нечетной (свойства I и II). На основании свойств III и IV получим

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0. \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Соответственно этому ряд Фурье для четной функции будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (131)$$

Если требуется разложить в ряд Фурье нечетную функцию, то вследствие свойств I и II произведение $f(x) \cos kx$ будет функцией нечетной, а $f(x) \sin kx$ — функцией четной. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= a_k = 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Ряд Фурье для нечетной функции будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (133)$$

Таким образом, *четная функция* разлагается в ряд только по *косинусам*, а *нечетная функция* — только по *синусам* кратных дуг.

Рассмотрим примеры разложения в ряд Фурье четных и нечетных функций. В предыдущем пункте мы нашли ряд Фурье для

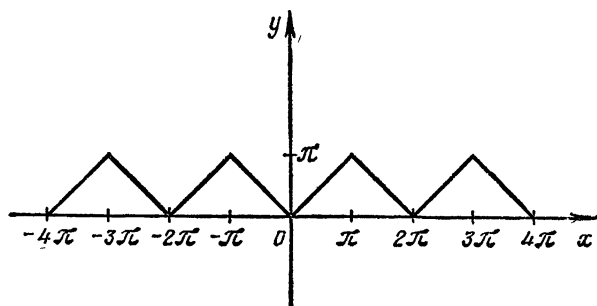


Рис. 265

функции $f(x) = x$ (см. пример). Эта функция нечетная. Поэтому коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ должны обратиться в нуль согласно формулам (132). В рассмотренном примере мы убедились в этом непосредственным вычислением коэффициентов.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π , заданную на интервале $-\pi < x \leq \pi$ формулой $f(x) = |x|$ (рис. 265).

Решение. Функция $f(x)$ — четная, поэтому коэффициенты ряда определяются по формулам (130):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi, \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx \right] = \\ &= \frac{2}{\pi k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} [(-1)^k - 1], \quad b_k = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_0 = \pi, \quad a_1 = -\frac{4}{\pi \cdot 1^2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{4}{\pi \cdot 3^2}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = -\frac{4}{\pi \cdot 5^2}, \dots$$

Ряд Фурье, соответствующий функции $f(x)$, имеет вид

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots + \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2} + \dots \right]$$

Данная функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, следовательно, ряд сходится на всей числовой оси и имеет своей суммой функцию $f(x)$.

5. Разложение в ряд Фурье функций с периодом $2l$

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции периода, отличного от 2π .

Этот случай легко сводится к изученному ранее. Пусть функция $y = f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, имеет период $2l$:

$$f(x + 2l) = f(x).$$

Введем новую независимую переменную z с помощью соотношения

$$z = \frac{\pi}{l} x. \quad (134)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = f\left(\frac{l}{\pi} z\right). \quad (135)$$

Так как из (134) следует, что $x = \frac{l}{\pi} z$, то

$$\varphi(z) = f(x). \quad (136)$$

Покажем, что $\varphi(z)$ есть функция с периодом 2π . Действительно, на основании равенства (135)

$$\varphi(z + 2\pi) = f\left[\frac{l}{\pi}(z + 2\pi)\right] = f\left[\frac{l}{\pi}z + 2l\right] = f(x + 2l).$$

Так как функция $f(x)$ имеет период $2l$, то

$$f(x + 2l) = f(x) = \varphi(z).$$

Следовательно,

$$\varphi(z + 2\pi) = \varphi(z).$$

Составим для функции $\varphi(z)$ ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kz + b_k \sin kz), \quad (137)$$

где коэффициенты a_0, a_k, b_k находятся по формулам Эйлера — Фурье.

Имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} z\right) dz.$$

Делаем подстановку: $z = \frac{\pi}{l} x$. Тогда $dz = \frac{\pi}{l} dx$ и, изменяя соответственно границы интегрирования, получим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} z\right) dz = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx.$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \cos kz dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} z\right) \cos kz dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x \cdot \frac{\pi}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \sin kz dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} z\right) \sin kz dz = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае функции $f(x)$, имеющей период $2l$, коэф-

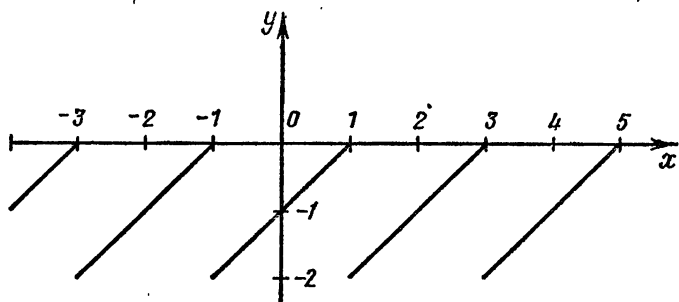


Рис. 266

фициенты Эйлера—Фурье вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, & a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx. \end{aligned} \quad (138)$$

Заменяя в ряде (137) z на $\frac{\pi}{l}x$, получим ряд для функции $f(x)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right). \quad (139)$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию периода $2l=2$, заданную на интервале $-1 < x \leq 1$ формулой $f(x)=x-1$. График функции $f(x)$ изображен на рис. 266.

Решение. Коэффициенты Фурье находим по формулам (138), в которых полагаем $l=1$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^1 (x-1) dx = \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_{-1}^1 = -2, \quad a_0 = -2. \\ a_k &= \int_{-1}^1 (x-1) \cos k\pi x dx = \int_{-1}^1 x \cos k\pi x dx - \int_{-1}^1 \cos k\pi x dx = \\ &= \frac{x \sin k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\sin k\pi x}{k\pi} dx - \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{k^2 \pi^2} \cos k\pi x \Big|_{-1}^1 = 0, \\ b_k &= \int_{-1}^1 (x-1) \sin k\pi x dx = \int_{-1}^1 x \sin k\pi x dx - \int_{-1}^1 \sin k\pi x dx = \\ &= -\frac{x \cos k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\cos k\pi x}{k\pi} dx + \frac{\cos k\pi x}{k\pi} \Big|_{-1}^1 = \\ &= -\frac{1}{k\pi} [\cos k\pi + \cos(-k\pi)] + \frac{\sin k\pi x}{k^2 \pi^2} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{k\pi} [\cos k\pi - \cos(-k\pi)] = \\ &= -\frac{2(-1)^k}{k\pi}. \end{aligned}$$

Итак,

$$a_0 = -2; \quad a_k = 0, \quad b_k = -\frac{2(-1)^k}{k\pi}.$$

В частности, $b_1 = \frac{2}{1 \cdot \pi}$, $b_2 = \frac{2}{2\pi}$, $b_3 = \frac{2}{3\pi}$, ...

Ряд Фурье для функции $f(x)$ будет иметь вид

$$-1 + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1} + \dots \right].$$

Формулы (130) и (132) для коэффициентов Фурье четных и нечетных функций, в случае функций, имеющих период $2l$, преобразуются следующим образом.

Для четной функции:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi}{2} x dx, \quad b_k = 0. \quad (140)$$

Для нечетной функции:

$$a_0 = a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx. \quad (141)$$

Ряды Фурье (131) и (133) в этом случае примут вид:
для четной функции:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x; \quad (142)$$

для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (143)$$

В заключение этого пункта рассмотрим вопрос о разложении в ряд Фурье произвольной непериодической функции. Пусть $y = f(x)$ непериодическая функция, заданная на всей числовой оси. Так как сумма тригонометрического ряда является периодической функцией, то очевидно, что данная непериодическая функция не может быть разложена в ряд Фурье.

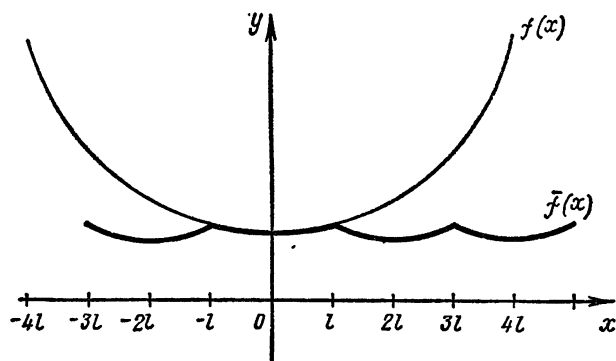


Рис. 267

Рассмотрим теперь эту функцию на интервале $-l < x \leq l$ и попытаемся построить ряд Фурье, который имел бы ее своей суммой на этом интервале.

Для этого рассмотрим вспомогательную функцию $\bar{f}(x)$ периода $2l$, значения которой на интервале $-l < x \leq l$ совпадают со значениями функции $f(x)$ (рис. 267). Если для функции $\bar{f}(x)$ выполняются условия теоремы Дирихле, то ее можно представить соответствующим рядом Фурье. Этот ряд на интервале $-l < x \leq l$ во всех точках непрерывности функции будет иметь своей суммой $\bar{f}(x) = f(x)$.

Иногда приходится иметь дело с функциями, заданными только в интервале $0 < x \leq l$. В этом случае мы можем сначала продолжить по какому-либо закону функцию на интервал $-l < x \leq 0$, а затем продолжить ее на всю числовую прямую периодически с

периодом $2l$. Продолжить функцию из интервала $0 < x \leq l$ на интервал $-l < x \leq 0$ можно произвольным образом.

Чаще всего встречается продолжение функции четным или нечетным образом. Если функция продолжается четным образом, т. е. значения функции в интервале $-l < x \leq 0$ принимаются равными

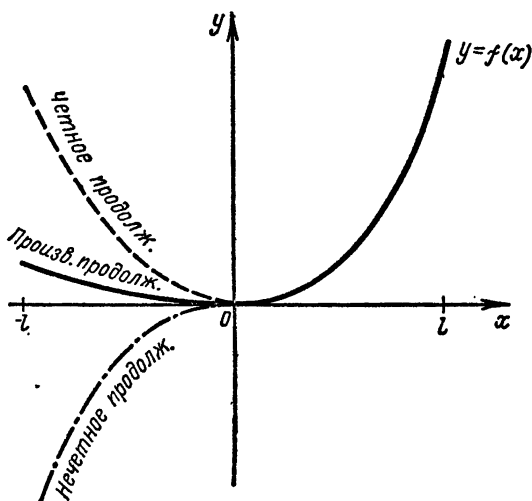


Рис. 268

ее значениям $f(x)$ в интервале $0 < x \leq l$, то ряд Фурье будет содержать только косинусы и свободный член. Если же функция продолжается нечетным образом, т. е. ее значения в интервале $-l < x \leq 0$ принимаются равными $-f(x)$, то ряд Фурье будет содержать только синусы.

Таким образом, если функция задана в интервале $0 < x \leq l$, то продолжая ее на интервал $-l < x \leq 0$, а затем продолжая полученную функцию периодически на всю числовую прямую, мы можем получить бесчисленное множество рядов Фурье.

Однако все эти ряды на

интервале $(0, l)$ будут представлять одну и ту же заданную функцию $f(x)$, а на интервале $(-l, 0)$ каждый ряд будет иметь своей суммой соответствующее продолжение функции $f(x)$ (рис. 268).

Пример 2. Разложить функцию $f(x)=1$, заданную в интервале $0 < x \leq l$, в ряд по синусам.

Решение. Для разложения функции в ряд по синусам надо ее продолжить на интервал $-l < x \leq 0$ нечетным образом (рис. 269)

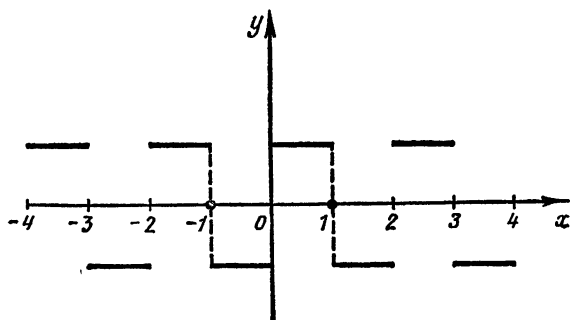


Рис. 269

а затем продолжить полученную функцию периодически на всю числовую ось.

Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$a_0 = a_k = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{2l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx.$$

Здесь надо принять $l=1$ и $f(x)=1$. Тогда

$$b_k = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin k\pi x dx = -\frac{1}{2} \frac{\cos k\pi x}{k\pi} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2k\pi} [\cos k\pi - \cos 0] =$$

$$= -\frac{1}{2k\pi} [(-1)^k - 1].$$

Итак,

$$a_0 = a_k = 0; \quad b_1 = \frac{2}{2\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{2}{2 \cdot 3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{2}{2 \cdot 5\pi}, \dots$$

Ряд Фурье для данной функции имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1} + \dots \right].$$

ГЛАВА XII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям, и некоторые общие понятия

При решении многих задач математики, физики и техники часто не удается установить непосредственную зависимость между искомыми и данными переменными величинами, но зато удается составить уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такое уравнение называется *дифференциальным*. Решая его, находят зависимость уже между самими переменными. Дифференциальное уравнение может не содержать в явном виде независимую переменную и искомую функцию, но обязательно должно содержать одну или несколько производных искомой функции.

Например, уравнения

$$y' + 2y = 0, \quad y'' + y' \cos x = \ln x, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

будут дифференциальными уравнениями.

С простейшим дифференциальным уравнением мы уже встречались при решении задачи об отыскании первообразной функции. Действительно, если функция $y = F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то по определению первообразной

$$y' = f(x). \tag{1}$$

Уравнение (1), содержащее производную искомой функции, является простейшим дифференциальным уравнением.

Рассмотрим некоторые задачи, решение которых приводит к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. Тело охладилось за 10 мин от 100 до 60°. Температура окружающего воздуха поддерживается постоянной и равной 10°. Определить, через сколько минут температура тела станет равной 20°.

На первый взгляд может показаться, что эта задача решается элементарно: если тело за 10 мин охладилось на 40° (от 100 до 60°), то еще на 40° (от 60 до 20°) оно охладится также за 10 мин. Таким образом, от 100 до 20° тело охладится через 20 мин.

Однако такое рассуждение ошибочно. Дело в том, что, как известно из физики, скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой, до которой нагрето тело, и температурой окружающей среды.

Обозначим температуру тела в некоторый момент времени t через $T(t)$, тогда скорость изменения температуры по времени равна производной

$\frac{dT}{dt}$. Так как скорость охлаждения пропорциональна разности между температурой нагрева тела и температурой окружающей среды, то получаем уравнение

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10). \quad (2)$$

Здесь k — множитель пропорциональности, подлежащий определению. Уравнение (2) является дифференциальным уравнением. Искомая функция $T(t)$ должна удовлетворять следующим требованиям, указанным в условии задачи: в начальный момент времени $t=0$ температура тела $T=100^\circ$. При $t=10$ мин температура $T=60^\circ$. Решение уравнения (2) будет дано в п. 3.

Задача 2. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку касания, есть величина постоянная, равная a^2 .

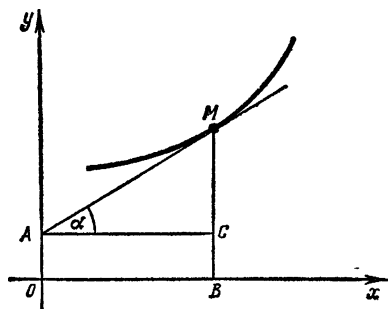


Рис. 270

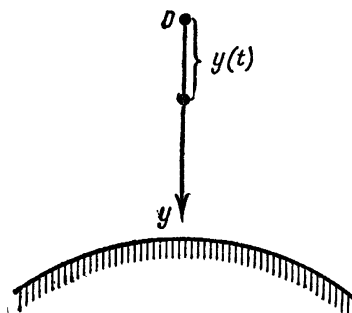


Рис. 271

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомой кривой, уравнение которой $y=f(x)$. Площадь трапеции, указанной в условии задачи, $S = \frac{1}{2}(OA + BM) \cdot OB$ (рис. 270). Для того чтобы составить дифференциальное уравнение данной задачи, выразим отрезки OA , BM и OB через координаты текущей точки $(x; y)$ и через производную y' .

Из рисунка замечаем, что $BM = y$ и $OB = AC = x$,

$$OA = BM - CM = BM - AC \cdot \operatorname{tg} \alpha = y - xy'.$$

Подставляя эти выражения в формулу для площади трапеции, найдем

$$\frac{y - xy' + y}{2} \cdot x = a^2,$$

или

$$2xy - x^2 y' = 2a^2. \quad (3)$$

Уравнение (3) является дифференциальным уравнением. Его решение будет приведено в п. 5.

Задача 3. Материальная точка массы m падает под действием силы земного притяжения. Требуется определить путь, пройденный точ-

кой за время t , если в начальный момент точка имела скорость $v = v_0$.

Примем вертикальную прямую, по которой движется точка, за ось Oy . За начало координат возьмем точку оси, соответствующую положению точки в начальный момент (при $t=0$, $y=0$). За положительное направление оси Oy примем направление к земле (рис. 271). Пройденный точкой путь y будет некоторой функцией времени t . Нужно определить вид функциональной зависимости $y=f(t)$. Из механики известно, что при свободном падении ускорение падающего тела постоянно и равно $g \approx 9,81 \text{ м/сек}^2$. С другой стороны известно, что ускорение равно второй производной от пути по времени, т. е. y'' . Приравнявая эти два выражения, получаем

$$y'' = g. \quad (4)$$

Мы снова получили дифференциальное уравнение. В отличие от дифференциальных уравнений (2) и (3) оно содержит вторую производную. Нам надо найти решение этого уравнения, удовлетворяющее следующим ограничениям, указанным в условии задачи. В начальный момент пройденный путь $y_0=0$ и начальная скорость равна v_0 . Так как скорость есть первая производная от пути по времени, то это условие записывается следующим образом: в начальный момент $y'|_{t=0} = v_0$.

Решение задачи будет приведено в § 2, п. 2.

Как показывают приведенные примеры, дифференциальное уравнение может содержать первую производную, вторую производную или производные более высоких порядков. Введем следующее определение.

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется высший из порядков, входящих в это уравнение производных искомой функции.

Так, например, уравнения $y' + 3xy - y^2 = 0$ и $y' + \sqrt{y} = 0$ — первого порядка; уравнения $y'' + 5xy' + 6y = 0$, $y'' + y^2 \sin x = 5x$, $y'' + x^2 = y$ — второго порядка; уравнение $y^{(IV)} + y'' \ln x = 1$ — четвертого порядка и т. д.

В рассмотренных выше задачах уравнения (2) и (3) были уравнениями первого порядка, а уравнение (4) — уравнением второго порядка.

Перейдем теперь к изучению дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка связывает независимую переменную, искомую функцию и ее первую производную. Поэтому в общем виде его можно записать следующим образом:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (5)$$

Здесь x — независимая переменная, y — искомая функция, а y' — ее производная.

Уравнение (5) может не содержать в явном виде x и y , но обязательно содержит y' .

Разрешая уравнение (5), если это возможно, относительно производной y' , получим

$$y' = f(x, y). \quad (6)$$

Уравнение (6) называется *уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*.

З а м е ч а н и е. Уравнение (6) можно записать в виде $f(x, y)dx - dy = 0$. В таком виде оно является частным случаем более общего уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (6')$$

Условимся уравнение (6') также называть дифференциальным уравнением первого порядка. Например, уравнение $x^2 dx + y^2 dy = 0$ будет дифференциальным уравнением первого порядка.

О п р е д е л е н и е. *Решением дифференциального уравнения первого порядка называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.*

Так, например, функция $y = \sin x$ является решением уравнения $y' + \operatorname{ctg} x \cdot y - 2 \cos x = 0$; действительно,

$$(\sin x)' + \operatorname{ctg} x (\sin x) - 2 \cos x = \cos x + \cos x - 2 \cos x \equiv 0.$$

Как мы увидим ниже, при нахождении решения дифференциального уравнения приходится в большинстве случаев выполнять операции интегрирования. Поэтому процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*.

О п р е д е л е н и е. *График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.*

Выясним прежде всего, каков геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка (6).

Будем рассматривать в уравнении (6) переменные x и y как декартовы координаты точки на плоскости. Пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (6). Это значит, что если в уравнение (6) подставить вместо y функцию $\varphi(x)$, а вместо y' производную $\varphi'(x)$, то получится тождество

$$\varphi'(x) \equiv f[x, \varphi(x)]. \quad (7)$$

Рассмотрим на графике функции $y = \varphi(x)$, т. е. на интегральной кривой, произвольную точку $M(x; y)$ и проведем в этой точке касательную. По геометрическому смыслу производной

$$\varphi'(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad (8)$$

где α — угол наклона касательной к оси Ox . Из соотношений (8), (7) и (6) получаем $\operatorname{tg} \alpha = f[x, \varphi(x)] = f(x, y)$, где $(x; y)$ — координаты точки M . Таким образом, угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в каждой ее точке равен значению в этой точке правой части дифференциального уравнения (6).

Итак, дифференциальное уравнение (6) определяет в каждой точке* направление касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$. В каждой точке $M(x; y)$ проведем маленький отрезок, угловой коэффициент которого равен значению правой части дифференциального уравнения в этой точке: $k = \operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$.

Определение. Часть плоскости (или вся плоскость), каждой точке которой отнесен отрезок так, что тангенс угла наклона его к оси Ox равен значению в данной точке правой части дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, называется полем направлений данного дифференциального уравнения.

Таким образом, дифференциальному уравнению (6) соответствует его поле направлений.

В этом состоит геометрический смысл дифференциального уравнения (6). Проведя такие отрезки для достаточно большого числа точек, получим наглядное изображение поля направлений. Так как касательная в точке интегральной кривой имеет то же направление, что и отрезок поля в этой точке, то задачу решения (интегрирования) дифференциального уравнения (6) геометрически можно сформулировать следующим образом: провести интегральную кривую так, чтобы направление ее касательной в каждой точке совпадало с направлением отрезка поля в этой точке.

Для того чтобы облегчить построение поля направлений, найдем все те точки плоскости Oxy , в которых отрезки поля имеют одно и то же направление.

Определение. Геометрическое место точек плоскости, в которых отрезки поля имеют одно и то же направление, называется изоклиной дифференциального уравнения.

Уравнение изоклины (кривой равных наклонов) найти очень легко. Действительно, в каждой точке изоклины тангенс угла наклона отрезков поля имеет одно и то же значение $\operatorname{tg} \alpha = k$. Так как с другой стороны $\operatorname{tg} \alpha = y' = f(x, y)$, то координаты каждой точки изоклины удовлетворяют уравнению

$$f(x, y) = k. \quad (9)$$

Уравнение (9) и будет уравнением изоклины дифференциального уравнения (6). Если предположить, что в уравнении (9) k может принимать различные значения, то это уравнение можно рассматривать как уравнение семейства изоклин.

Пример 1. Построить поле направлений дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$.

Решение. Уравнения изоклин этого дифференциального уравнения будут

$$x^2 + y^2 = k,$$

т. е. изоклинами здесь являются концентрические окружности радиуса $\sqrt{k}$ с центром в начале координат. В точках каждой из

* В каждой точке, принадлежащей области определения функции $f(x, y)$.

окружностей нужно провести отрезки, образующие с осью Ox один и тот же угол α , тангенс которого равен k . Так, при $k=1/2$ изоклиной будет окружность $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$; при $k=1$ — окружность $x^2 + y^2 = 1$ и т. д. При $k=0$ получаем $x^2 + y^2 = 0$. Этому уравнению удовлетворяет единственная точка $(0; 0)$. В этом случае изоклина состоит только из одной точки, для которой $\operatorname{tg} \alpha = 0$. На рис. 272 изображено поле направлений данного дифференциального уравнения. Для того чтобы построить интегральную кривую, возьмем на плоскости какую-нибудь точку $(x_0; y_0)$. Проведем через нее интегральную кривую так, чтобы она в каждой

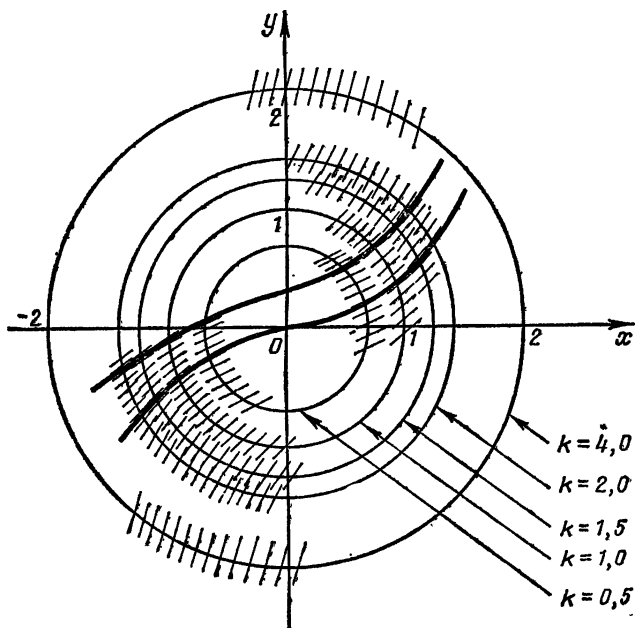


Рис. 272

точке имела направление поля (т. е. чтобы направление касательной к ней в каждой точке совпадало с направлением отрезка поля в этой точке). На рис. 272 построены интегральные кривые, проходящие через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$.

Рассмотренный пример позволяет сделать ряд выводов, которые при определенных условиях оказываются справедливыми для широкого класса дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Дифференциальному уравнению (6) соответствует бесчисленное множество интегральных кривых и, следовательно, бесчисленное множество решений.

2. Для выделения из этого множества конкретной интегральной кривой надо задать точку $(x_0; y_0)$, через которую должна проходить кривая.

Иными словами, надо задать то значение y_0 , которое принимает решение $y = \varphi(x)$ при значении аргумента $x = x_0$. Задание

значения y_0 искомого решения при $x = x_0$ называется *начальным условием*. Оно записывается обычно следующим образом:

$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{или} \quad y(x_0) = y_0. \quad (10)$$

Условия, при которых дифференциальное уравнение (6) имеет решение, составляет содержание основной теоремы теории дифференциальных уравнений. Эта теорема, принадлежащая Коши, носит название теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения (6). Мы приведем эту теорему без доказательства.

Теорема. Если правая часть $f(x, y)$ уравнения $y' = f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой области G изменения переменных x и y , то какова бы ни была внутренняя точка $(x_0; y_0)$ этой области, данное уравнение имеет единственное решение $y = \varphi(x)$, принимающее при $x = x_0$ заданное значение $y = y_0$.

Геометрически это означает, что через каждую внутреннюю точку $(x_0; y_0)$ области G проходит единственная интегральная кривая.

Нахождение решения уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющегоначальному условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши*.

Точки $(x; y)$ плоскости, в которых не выполняются условия теоремы существования и единственности решения, называются *особыми точками* дифференциального уравнения. В этих точках терпит разрыв или функция $f(x, y)$ или ее частная производная $f'_y(x, y)$. Через каждую из таких точек может проходить либо несколько интегральных кривых, либо не проходит ни одной.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = \frac{y}{x}$.

Здесь правая часть $f(x, y) = \frac{y}{x}$ и ее частная производная $f'_y(x, y) = \frac{1}{x}$ непрерывны при $x \neq 0$. Таким образом, во всей плоскости Oxy , за исключением оси Oy , правая часть уравнения удовлетворяет условиям теоремы Коши. Точки, лежащие на оси Oy , являются особыми.

Легко проверить, что решением этого уравнения будет функция $y = Cx$, зависящая от произвольной постоянной C . Это решение называется *общим*. При конкретных значениях постоянной C будем получать частные решения.

Например, при $C = 1$ $y = x$, при $C = 10$ $y = 10x$ и т. д. Для решения задачи Коши задаем начальное условие: $y(x_0) = y_0$. Подставляя в общее решение вместо x и y их значения x_0 и y_0 , получим соотношение для определения постоянной C : $y_0 = Cx_0$. Отсюда $C = \frac{y_0}{x_0}$ и соответствующее частное решение $y = \frac{y_0}{x_0} x$.

Общее решение $y = Cx$ геометрически представляет собой совокупность всех прямых, проходящих через начало координат, за исключением оси Oy . Через каждую точку, не лежащую на оси Oy , проходит единственная прямая (интегральная кривая). Через

начало координат проходит бесчисленное множество интегральных кривых. Нарушение единственности объясняется тем, что начало координат является особой точкой. Отметим также, что через особые точки, лежащие на оси Oy и не совпадающие с началом координат, не проходит ни одной интегральной кривой.

Дадим теперь определения общего и частного решений дифференциального уравнения (6), правая часть которого $f(x, y)$ удовлетворяет в некоторой области G условиям теоремы Коши.

Определение. Функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от аргумента x и произвольной постоянной C , называется общим решением уравнения (6) в области G , если она удовлетворяет двум условиям:

1) при любых значениях произвольной постоянной C , принадлежащих некоторому множеству, функция $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения (6);

2) какова бы ни была точка (x_0, y_0) , лежащая внутри области G , существует единственное значение постоянной $C = C_0$ такое, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$.

Значение $C = C_0$ можно найти из уравнения

$$y_0 = \varphi(x_0, C_0).$$

Определение. Всякое решение $y = \varphi(x, C_0)$ уравнения (6), получающееся из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется частным решением.

Замечание. Если общее решение дифференциального уравнения найдено в виде, не разрешенном относительно y , т. е. в виде $\omega(x, y, C) = 0$, то оно называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Перейдем теперь к рассмотрению методов нахождения решений дифференциальных уравнений первого порядка. Вообще не существует единого метода нахождения решений уравнения (6) для любой правой части $f(x, y)$. Поэтому мы рассмотрим методы решения (методы интегрирования) этого уравнения лишь в некоторых частных случаях.

3. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно записать в виде

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y). \quad (11)$$

Правая часть уравнения (11) представляет собой произведение двух множителей, каждый из которых является функцией только одного аргумента.

Например, уравнение $y' = \frac{x^2}{\sin y + y}$ есть уравнение с разделяющимися переменными, так как в нем можно принять $f_1(x) = x^2$ и $f_2(y) = \frac{1}{\sin y + y}$.

Точно так же, уравнение $xy' + y = y^2$ есть уравнение с разделяющимися переменными, так как его можно записать в виде (11): $y' = \frac{y^2 - y}{x}$, где $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(y) = y^2 - y$.

Напротив, уравнение $xy' + y = x^2$ нельзя представить в виде (11), и, следовательно, оно не является уравнением с разделяющимися переменными.

Метод интегрирования уравнения с разделяющимися переменными состоит в следующем. Перепишем уравнение (11) в виде $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Тогда

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx. \quad (12)$$

Если уравнение (11) представлено в виде (12), то говорят, что в нем *разделены переменные*.

Допустим, что мы нашли решение $y(x)$ уравнения (12). Если эту функцию $y(x)$ подставим в (12), то это уравнение обратится в тождество и, интегрируя его, получим

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} + C_1 = \int f_1(x) dx + C_2.$$

Переноса C_1 в правую часть равенства и обозначая $C_2 - C_1 = C$, получим

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C, \quad (13)$$

где C — произвольная постоянная.

Выражение (13) представляет собой *общий интеграл* уравнения (12).

Пример 1. Решить уравнение $xy' + y = 0$.

Решение. Разрешая уравнение относительно y' , получим $y' = -\frac{y}{x}$, или $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. Разделяя переменные, находим $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Интегрируя, получаем $\ln|y| = \ln|x| + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Для упрощения полученного решения воспользуемся часто применяемым приемом; положим $C_1 = \ln C_2$ ($C_2 > 0$)*, тогда $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_2$, откуда $|y| = \frac{C_2}{|x|}$ или $y = \pm \frac{C_2}{x}$. Полагая $\pm C_2 = C$, окончательно получим

$$y = \frac{C}{x}, \quad (14)$$

где C — произвольная постоянная. Геометрически полученное общее решение (14) представляет собой семейство равносторонних гипербол.

Пусть требуется из найденного общего решения выделить частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=4} = \frac{1}{2}$. Заменяя в (14) x и y начальными данными, получим соотношение

* Заметим, что при изменении C_2 от 0 до ∞ $\ln C_2$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

$\frac{1}{2} = \frac{C}{4}$, из которого найдем $C = 2$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = \frac{2}{x}$.

Приведем теперь решение уравнения (2) задачи 1 п. 1. Уравнение (2) имело вид

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные в уравнении, получим

$$\frac{dT}{T-10} = k dt.$$

Интегрируя, находим:

$$\begin{aligned} \ln |T-10| &= kt + \ln C_1 \quad (C_1 > 0), \\ |T-10| &= C_1 e^{kt}, \quad T-10 = \pm C_1 e^{kt} = C e^{kt}. \end{aligned}$$

Итак,

$$T = C e^{kt} + 10. \quad (15)$$

Формула (15) дает общее решение уравнения (2). Для выделения частного решения используем начальное условие: $T|_{t=0} = 100$. Таким образом, $C e^{k \cdot 0} + 10 = 100$, откуда $C = 90$. Итак, частное решение будет иметь вид

$$T = 90 e^{kt} + 10.$$

Это решение содержит неизвестный множитель k . Для его определения используем второе дополнительное условие: при $t = 10$ температура тела $T = 60^\circ$. Тогда

$$60 = 90 e^{10k} + 10,$$

откуда $e^{10k} = \frac{5}{9}$, и, логарифмируя, находим

$$k = \frac{1}{10} \ln \left(\frac{5}{9} \right).$$

Таким образом, искомое решение уравнения (2) будет

$$T = 90 e^{\frac{t}{10} \ln \left(\frac{5}{9} \right)} + 10 = 90 e^{\ln \left(\frac{5}{9} \right)^{\frac{t}{10}}} + 10 = 90 \left(\frac{5}{9} \right)^{\frac{t}{10}} + 10.$$

Итак,

$$T = 90 \left(\frac{5}{9} \right)^{\frac{t}{10}} + 10.$$

Для ответа на вопрос, через сколько времени тело охладится до 20° , получаем уравнение

$$20 = 90 \left(\frac{5}{9} \right)^{\frac{t}{10}} + 10,$$

откуда

$$\left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{t}{10}} = \frac{1}{9}.$$

Логарифмируя, находим

$$t = \frac{10 \lg 9}{\lg 9 - \lg 5} \approx 37,4 \text{ мин.}$$

Рассмотрим теперь некоторые уравнения, которые с помощью несложных преобразований приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными.

4. Однородные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно записать в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad (16)$$

где правая часть есть функция только от отношения переменных $\frac{y}{x}$.

Например, уравнения $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \sin \frac{y}{x} + 2$ и $\frac{dy}{dx} = \ln \frac{y}{x} + 3e^{\frac{y}{x}}$ — однородные уравнения.

Уравнение $y' = \frac{x^3 + x^2 y}{xy^2}$ также однородное, так как деля числитель и знаменатель правой части на x^3 , получим $y' = \frac{1 + \frac{y}{x}}{(\frac{y}{x})^2}$.

В частности, уравнение, записанное в виде $y' = f(x, y)$, будет однородным, если $f(x, y)$ есть отношение двух однородных многочленов одной и той же степени*.

В однородном уравнении (16) переменные, вообще говоря, не разделяются. Однако оно легко может быть преобразовано в уравнение с разделяющимися переменными.

С этой целью введем новую функцию z , положив

$$\frac{y}{x} = z, \text{ или } y = xz. \quad (17)$$

Дифференцируя (17), находим

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}. \quad (18)$$

Подставляя выражения (17) и (18) в уравнение (16), придадим ему вид

$$z + x \frac{dz}{dx} = \varphi(z).$$

* Однородными многочленами степени n (измерения n) называются многочлены, у которых сумма показателей степени переменных в каждом члене равна n . Например, $x^4 + x^3 y - 2x^2 y^2 + 5y^4$ — однородный многочлен четвертой степени (четвертого измерения).

В полученном уравнении переменные разделяются. Действительно,

$$xdz = [\varphi(z) - z] dx,$$

и предполагая, что $\varphi(z) - z \neq 0$, получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\varphi(z) - z}.$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\ln|x| = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} + C. \quad (19)$$

Найдя интеграл в правой части (19) и возвращаясь к первоначальному переменному y , получим общее решение однородного уравнения (16).

Пример. Проинтегрировать уравнение $2xy y' = x^2 + y^2$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Делая подстановку $y = xz$, получаем

$$\frac{dz}{dx} x + z = \frac{1 + z^2}{2z}, \text{ или } \frac{dz}{dx} x = \frac{1 - z^2}{2z}.$$

В полученном уравнении переменные разделяются:

$$\frac{2z dz}{1 - z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, имеем

$$\ln C_1 - \ln|1 - z^2| = \ln|x|,$$

откуда

$$C_1 = |x| \cdot |1 - z^2|, \text{ или } x(1 - z^2) = \pm C_1.$$

Положим $\pm C_1 = C$; тогда $x(1 - z^2) = C$. Возвращаясь к функции y , получим

$$C = x \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right), \text{ или } x^2 - y^2 - Cx = 0.$$

5. Линейные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, если его можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot y + Q(x), \quad (20)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — заданные функции.

Таким образом, искомая функция y и ее производная $\frac{dy}{dx}$ входят в линейное уравнение в первой степени.

Если в частном случае $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (20) называется линейным уравнением без свободного члена или линейным однородным уравнением.

Например, уравнения $\frac{dy}{dx} = y \cos^2 x + x^2$ и $xy' = y + e^x$ будут линейными уравнениями. Уравнение же $yy' + xy^3 = \sin x$ не будет линейным.

Уравнение (20) интегрируется следующим образом. Рассмотрим соответствующее уравнение без свободного члена

$$\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot y. \quad (21)$$

В этом уравнении переменные разделяются, и его общее решение находится сразу.

Из (21) получаем:

$$\frac{dy}{y} = P(x) dx \text{ и } \ln |y| = \ln C_1 + \int P(x) dx.$$

Отсюда, потенцируя, находим общее решение уравнения (21):

$$y = \pm C_1 e^{\int P(x) dx} = C e^{\int P(x) dx}. \quad (22)$$

Для нахождения общего решения уравнения (20) применим так называемый метод вариации произвольной постоянной. Этот метод заключается в следующем. Общее решение уравнения со свободным членом (20) будем искать по формуле (22), заменяя в ней произвольную постоянную C некоторой дифференцируемой функцией

$$y = z(x) \cdot e^{\int P(x) dx}. \quad (23)$$

Для того чтобы функция (23) была решением уравнения (20), нужно, чтобы она удовлетворяла этому уравнению.

Находим производную

$$\begin{aligned} y' &= z'(x) e^{\int P(x) dx} + z(x) e^{\int P(x) dx} \left(\int P(x) dx \right)' = \\ &= z'(x) e^{\int P(x) dx} + z(x) P(x) e^{\int P(x) dx}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для y и y' в уравнение (20), находим соотношение для определения функции $z(x)$:

$$z'(x) e^{\int P(x) dx} + z(x) P(x) e^{\int P(x) dx} = P(x) \cdot z(x) e^{\int P(x) dx} + Q(x).$$

Отсюда

$$z'(x) e^{\int P(x) dx} = Q(x), \text{ или } z'(x) = Q(x) e^{-\int P(x) dx}.$$

Интегрируя, находим

$$z(x) = \int Q(x) e^{-\int P(x) dx} dx + C_0.$$

Подставляя найденное выражение $z(x)$ в формулу (23), получаем общее решение линейного уравнения (20)

$$y = \left(\int Q(x) e^{-\int P(x) dx} dx + C_0 \right) e^{\int P(x) dx}. \quad (23')$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2$$

и выделить из него частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=1} = \frac{1}{2}$.

Решение. При интегрировании этого уравнения не будем пользоваться готовой формулой (23'), а проделаем все вычисления вновь. Рассмотрим сначала соответствующее уравнение без свободного члена $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. В этом уравнении переменные разделяются: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, находим

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1, \text{ или } y = \pm C_1 x = Cx.$$

В полученном общем решении линейного уравнения без свободного члена заменяем постоянную C функцией $z(x)$, получаем

$$y = z(x) \cdot x.$$

Дифференцируя, находим $y' = z'(x) \cdot x + z(x)$. Подставляем в данное уравнение выражения для y и y' :

$$z'(x) \cdot x + z(x) = \frac{z(x) \cdot x}{x} + x^2,$$

или

$$z'(x) = x.$$

Отсюда $z(x) = \frac{x^2}{2} + C_0$ и общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = z(x) \cdot x = \left(\frac{x^2}{2} + C_0 \right) x,$$

или

$$y = \frac{x^3}{2} + C_0 x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y = \frac{1}{2}$ при $x = 1$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C_0 \cdot 1,$$

Следовательно, $C_0 = 0$ и частное решение запишется в виде

$$y = \frac{1}{2} x^3.$$

Вернемся теперь к задаче 2, рассмотренной в п. 1. Выведенное там уравнение имело вид

$$2xy - x^2 y' = 2a^2, \text{ или } y' = \frac{2}{x} y - \frac{2a^2}{x^2}. \quad (24)$$

Полученное уравнение является линейным и интегрируется указанным выше способом. Сначала рассматриваем уравнение без свободного члена $y' = \frac{2}{x} y$. Находим его общее решение, разделяя переменные и интегрируя:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}, \quad \ln |y| = 2 \ln |x| + \ln C_1, \quad y = \pm C_1 x^2 = Cx^2.$$

Заменяем теперь постоянную C на функцию $z(x)$ и ищем решение данного уравнения (24) в виде $y = z(x) \cdot x^2$. Находим $y' = z'(x) \cdot x^2 + 2x \cdot z(x)$ и подставляем y и y' в уравнение (24):

$$z'(x) x^2 + 2xz(x) = \frac{2}{x} z(x) \cdot x^2 - \frac{2a^2}{x^2},$$

откуда

$$z'(x) = -\frac{2a^2}{x^4}.$$

Интегрируя, получим

$$z = \frac{2a^2}{3x^3} + C_0,$$

и окончательно находим общее решение $y = z \cdot x^2 = \frac{2a^2}{3x} + C_0 x^2$, или $3xy = 3C_0 x^3 + 2a^2$.

6. Уравнение в полных дифференциалах

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (25)$$

Это уравнение первого порядка, так как из него следует, что $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$. Допустим, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции непрерывные вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой области G . Если левая часть уравнения (25) $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, т. е.

$$dU(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (26)$$

то уравнение (25) называется *уравнением в полных дифференциалах* и может быть записано следующим образом:

$$dU(x, y) = 0. \quad (27)$$

Его общий интеграл имеет вид

$$U(x, y) = C. \quad (28)$$

Как известно (см. гл. X, § 3, п. 6), для того чтобы выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ было полным дифференциалом в односвязной области G , необходимо и достаточно, чтобы в области G

тождественно выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (29)$$

Если это условие выполняется, то функция $U(x, y)$ находится следующим образом (гл. X, § 3, п. 6, формула (53)):

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt. \quad (30)$$

Следовательно, общий интеграл дифференциального уравнения (25) запишется так:

$$\int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt = C. \quad (31)$$

Здесь $(x_0; y_0)$ — произвольная фиксированная точка области G .

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy}{3y^2 + x^2}.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(2xy - 1) dx + (3y^2 + x^2) dy = 0.$$

Здесь $P(x, y) = 2xy - 1$, $Q(x, y) = 3y^2 + x^2$. Проверяем выполнение условий (29):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

Таким образом, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Находим его общий интеграл по формуле (31), полагая для упрощения вычислений $x_0 = y_0 = 0$:

$$\int_0^x (2t \cdot 0 - 1) dt + \int_0^y (3t^2 + x^2) dt = C.$$

Выполняя интегрирование, находим общий интеграл данного уравнения:

$$-t \Big|_0^x + (t^3 + x^2 t) \Big|_0^y = C, \text{ или } -x + y^3 + x^2 y = C.$$

7. Особые решения

По теореме Коши, если правая часть уравнения

$$y' = f(x, y)$$

непрерывна в некоторой области G и имеет в ней непрерывную производную $f'_y(x, y)$, то через каждую внутреннюю точку $(x_0; y_0)$ области G проходит единственная интегральная кривая. Однако условия теоремы Коши могут оказаться не выполненными в точках, лежащих на границе области G . Такие точки, где не выполняются условия теоремы Коши, мы назвали особыми (см. стр. 567). Если

$M_0(x_0; y_0)$ — особая точка, то может оказаться, что через нее либо не проходит ни одной интегральной кривой, либо проходит несколько интегральных кривых. Так, мы видели (см. п. 2, пример 2), что для дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{x}$ вся ось Oy состоит из особых точек. При этом через начало координат проходит бесконечное множество интегральных кривых, а через особые точки, отличные от начала координат, не проходит ни одной интегральной кривой.

Если линия $y = \varphi(x)$ состоит только из особых точек и является интегральной кривой дифференциального уравнения, то функция $y = \varphi(x)$ называется *особым решением*.

Условия теоремы Коши являются достаточными условиями для того, чтобы в некоторой области G не существовало особого решения. Поэтому для существования особого решения необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы Коши. Следовательно, для того чтобы найти особое решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, надо найти линию $y = \varphi(x)$, в каждой точке которой терпят разрыв $f(x, y)$ или $f'_y(x, y)$, и проверить, является ли функция $y = \varphi(x)$ решением уравнения. Если функция $y = \varphi(x)$ окажется решением дифференциального уравнения, то она и будет особым решением.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $y' = \sqrt[3]{y^2}$. Правая часть этого уравнения $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$ непрерывна при всех значениях y , однако

производная $f'_y(x, y) = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$ терпит разрыв при $y = 0$, т. е. во всех точках оси Ox . Таким образом, каждая точка прямой $y = 0$ является особой. Очевидно, что функция $y = 0$ является решением данного уравнения. Следовательно, решение $y = 0$ будет особым.

Найдем теперь общее решение данного уравнения. Разделяя переменные, находим $\frac{dy}{y^{2/3}} = dx$. Интегрируя, получаем общее решение:

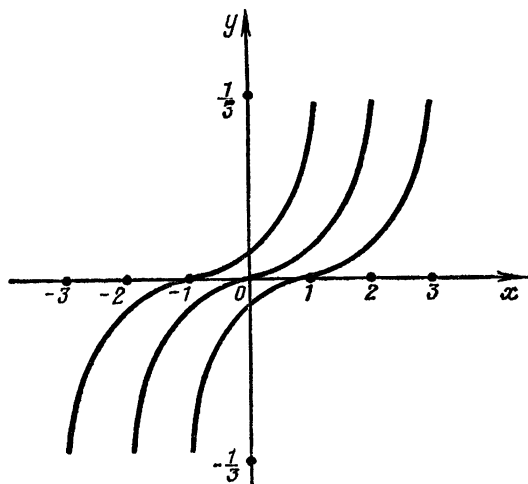


Рис. 273

$$3y^{1/3} = x + C, \text{ или } y = \frac{(x+C)^3}{27}.$$

Семейство интегральных кривых, соответствующих найденному общему решению, состоит из кубических парабол. Так как через каждую точку особого решения $y = 0$ (оси Ox) проходит еще одна интегральная кривая данного уравнения (кубическая парабола), то в каждой точке оси Ox нарушается свойство единственности (рис. 273).

Заметим, что особое решение, вообще говоря, не содержится в общем решении и не может быть выделено из него ни при каком конкретном значении постоянной C .

Пример 2. Рассмотрим уравнение $y' = \sqrt[3]{y^2} + 1$. Как и в предыдущем примере, геометрическим местом особых точек является прямая $y=0$ (ось Ox). Однако функция $y=0$, как легко проверить, не является решением данного уравнения. Поэтому данное уравнение особых решений не имеет.

8. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера

В п. 2 этого параграфа был изложен метод приближенного построения интегральных кривых дифференциального уравнения первого порядка с помощью изоклин.

Рассмотрим теперь еще один приближенный метод нахождения частного решения уравнения, называемый *методом Эйлера*.

Идея метода Эйлера заключается в том, что интегральная кривая, являющаяся графиком частного решения, приближенно заменяется ломаной.

Пусть дано дифференциальное уравнение (6)

$$y' = f(x, y)$$

и начальное условие

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

Требуется на сегменте $x_0 \leq x \leq b$ приближенно построить интегральную кривую $y = \varphi(x)$ уравнения (6), проходящую через точку $(x_0; y_0)$.

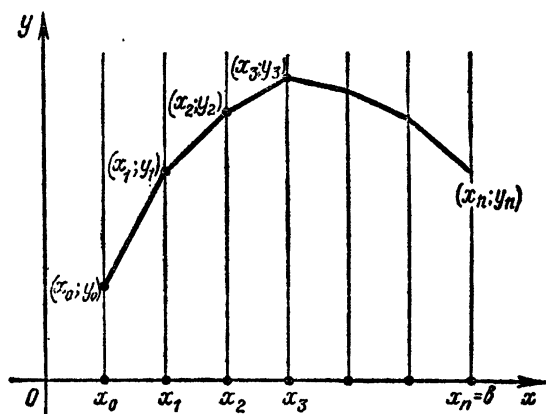


Рис. 274

Разобьем сегмент $[x_0, b]$ точками деления

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

на n равных частей длины $\Delta x = \frac{b-x_0}{n}$ (рис. 274). Величина Δx называется *шагом разбиения* сегмента. Пользуясь уравнением (6), вычислим в начальной точке $(x_0; y_0)$ интегральной кривой угловой коэффициент ее касательной: $y'_0 = f(x_0, y_0)$; тогда уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$ будет иметь вид

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0), \text{ или } y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Заменяя на сегменте $[x_0, x_1]$ искомую интегральную кривую $y = \varphi(x)$ отрезком этой касательной (см. рис. 274), найдем прибли-

женное значение решения y_1 в точке x_1 :

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

или, так как $x_1 - x_0 = \Delta x$,

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \Delta x.$$

Подставив значения x_1 и y_1 в правую часть уравнения (6), найдем $y'_1 = f(x_1, y_1)$.

На сегменте $[x_1, x_2]$ заменим приближенно интегральную кривую $y = \varphi(x)$ отрезком касательной, проходящей через точку (x_1, y_1) и имеющей угловой коэффициент $k = y'_1 = f(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = f(x_1, y_1)(x - x_1), \text{ или } y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1).$$

Полагая в уравнении этой прямой $x = x_2$, найдем приближенное значение искомого решения $y = \varphi(x)$ в точке x_2 :

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1),$$

или, так как $x_2 - x_1 = \Delta x$,

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \Delta x.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательно приближенные значения решения $y = \varphi(x)$ в точках $x_3, x_4, \dots, x_i, \dots, x_n = b$. При этом значение функции в точке x_i вычисляется через значение функции и ее производной в точке x_{i-1} по формуле

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1}) \Delta x \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (32)$$

Таким образом, мы получили приближенные значения искомого решения в точках $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$ и приближенно построили интегральную кривую в виде ломаной.

Замечание. Мы рассмотрели случай $b > x_0$. Если $b < x_0$, то формула (32) остается в силе, но в этом случае $\Delta x = \frac{b - x_0}{n}$ будет отрицательным.

Метод Эйлера является простейшим из методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Недостатком метода является малая точность. Очевидно, что ошибка, которая получается при замене интегральной кривой ломаной, зависит от числа точек разбиения сегмента $[x_0, b]$. Можно показать, что ошибка при вычислении ординат y_i пропорциональна $(\Delta x)^2$.

Пример. Составить на сегменте $[1, 2]$ таблицу приближенных значений частного решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = y^2 - x^2$, удовлетворяющего начальному условию $y|_{x=1} = 1$. Шаг разбиения сегмента $[1, 2]$ принять равным $\Delta x = 0,1$.

Решение. Согласно указанной схеме, вычисления значений решения $y = \varphi(x)$ выполняем по формуле (32). Все вычисления записываем в общей таблице и проводим с точностью до четвертого знака после запятой.

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i) = y_i^2 - x_i^2$	$f(x_i, y_i) \Delta x = (y_i^2 - x_i^2) \Delta x$
0	1,0	1	0	0
1	1,1	1	-0,21	-0,021
2	1,2	0,979	-0,4816	-0,0482
3	1,3	0,9308	-0,8236	-0,0824
4	1,4	0,8484	-1,2402	-0,1240
5	1,5	0,7244	-1,7252	-0,1725
6	1,6	0,5519	-2,2554	-0,2255
7	1,7	0,3264	-2,7835	-0,2784
8	1,8	0,0480	-3,2377	-0,3238
9	1,9	-0,2758	-3,5339	-0,3534
10	2,0	-0,6292		

Столбец y_i таблицы содержит приближенные значения функции $y = \varphi(x)$ в точках x_i .

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Основные понятия

Дифференциальное уравнение второго порядка связывает независимую переменную, искомую функцию и ее первую и вторую производные. В частных случаях в уравнении могут отсутствовать x , y и y' . Однако уравнение второго порядка обязательно должно содержать y'' .

Дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае записывается в виде

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (33)$$

или, если это возможно, в виде, разрешенном относительно второй производной

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (34)$$

В § 1, п. 1 мы рассмотрели задачу, которая привела к простейшему дифференциальному уравнению второго порядка (см. формулу 4, § 1, п. 1).

Как и в случае уравнения первого порядка, для уравнения второго порядка существует общее и частное решение. Рассмотрим сначала на примере, какой вид имеет общее решение уравнения второго порядка и как из него выделяется частное решение.

Возьмем простейшее уравнение второго порядка

$$y'' = 2. \quad (35)$$

Для его решения введем обозначение $y' = v(x)$. Тогда $y'' = v'$, и уравнение (35) примет вид $v' = 2$. Отсюда следует, что $v = 2x + C_1$, или $y' = 2x + C_1$. Интегрируя еще раз, найдем $y = x^2 + C_1x + C_2$.

Полученное решение зависит от двух произвольных постоянных (общее решение). Геометрически это решение представляет множество парабол (интегральных кривых), причем через каждую точку плоскости, очевидно, проходит бесконечное множество парабол, имеющих в этой точке различные касательные (рис. 275). Для выделения из множества этих кривых какой-либо одной интегральной кривой необходимо, кроме координат точки $(x_0; y_0)$, через которую проходят параболы, дополнительно задать угловой коэффициент касательной, т. е. значение в этой точке производной y' .

Таким образом, условия, с помощью которых из общего решения уравнения второго порядка выделяется частное решение (начальные условия), имеют вид:

$$y|_{x=x_0}=y_0, \quad y'|_{x=x_0}=y'_0, \quad \text{где } x_0, y_0 \text{ и } y'_0 \text{ — заданные числа.}$$

Первое из этих условий указывает точку, через которую должна проходить интегральная кривая. Второе условие определяет наклон интегральной кривой в данной точке.

Зададим, например, для уравнения (35) следующие начальные условия: $y|_{x=1}=2, \quad y'|_{x=1}=1$.

Из общего решения $y=x^2+C_1x+C_2$ находим $y'=2x+C_1$. Используя начальные условия, получаем для определения C_1 и C_2 систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2 &= 1 + C_1 + C_2, \\ 1 &= 2 + C_1. \end{aligned} \right\}$$

Из этой системы находим значения $C_1=-1$ и $C_2=2$. Поэтому искомое частное решение имеет вид $y=x^2-x+2$.

Результаты, полученные в этом простейшем примере, остаются справедливыми и в общем случае уравнения второго порядка. Для уравнения второго порядка, как и для уравнения первого порядка, имеет место теорема существования и единственности (теорема Коши), которую мы приводим без доказательства.

Теорема. Пусть правая часть $f(x, y, y')$ уравнения $y''=f(x, y, y')$ и ее частные производные $f'_y(x, y, y')$ и $f'_{y'}(x, y, y')$ определены и непрерывны в некоторой области G изменения переменных x, y и y' . Тогда какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0, y'_0) этой области, данное уравнение имеет единственное решение $y=\varphi(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0}=y_0, \quad y'|_{x=x_0}=y'_0. \quad (36)$$

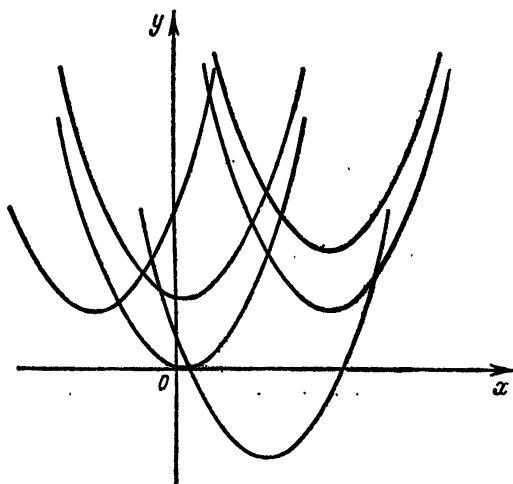


Рис. 275

Задача нахождения решения уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющего заданным начальным условиям, как и в случае уравнения первого порядка, называется *задачей Коши*.

Дадим теперь определения общего и частного решений уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$, правая часть которого удовлетворяет условиям теоремы Коши в некоторой области G изменения переменных x, y и y' .

Определение. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящая от аргумента x и двух произвольных постоянных C_1 и C_2 , называется *общим решением уравнения (34) в области G , если она удовлетворяет двум условиям:*

1) *при любых значениях произвольных постоянных C_1 и C_2 функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ является решением уравнения (34);*

2) *каковы бы ни были начальные условия (36)*

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0,$$

существуют единственные значения постоянных C_{10} и C_{20} такие, что функция $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$ является решением уравнения (34) и удовлетворяет начальным условиям (36).

Замечание 1. Значения постоянных C_{10}, C_{20} находятся из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_{10}, C_{20}), \\ y'_0 &= \varphi'(x_0, C_{10}, C_{20}). \end{aligned} \right\}$$

Замечание 2. При задании начальных условий (36) необходимо, чтобы значения переменных x_0, y_0 и y'_0 принадлежали области G .

Замечание 3. Если общее решение дифференциального уравнения второго порядка получено в виде, не разрешенном относительно искомой функции: $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, то это соотношение называют *общим интегралом* данного дифференциального уравнения.

Определение. *Всякое решение $y = \varphi(x_1, C_{10}, C_{20})$ уравнения (34), получающееся из общего решения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}$, называется частным решением.*

2. Простейшие уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

В этом пункте мы рассмотрим уравнения второго порядка, которые с помощью замены переменной сводятся к уравнениям первого порядка. Такое преобразование уравнения называется *понижением порядка*. Простейшими уравнениями второго порядка, допускающими понижение порядка, являются следующие:

$$\text{I. } y'' = f(x). \tag{37}$$

$$\text{II. } y'' = f(x, y'). \tag{38}$$

$$\text{III. } y'' = f(y, y'). \tag{39}$$

Рассмотрим последовательно, как осуществляется понижение порядка и как интегрируется каждое из указанных уравнений.

I. Уравнение $y'' = f(x)$. Введем новую функцию $v(x)$, положив $y' = v(x)$. Тогда $y'' = v'(x)$, и мы получим уравнение первого порядка: $v'(x) = f(x)$. Решая его, получим

$$v(x) = \int f(x) dx = F(x) + C_1,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных от $f(x)$. Так как $v(x) = y'$, то $y' = F(x) + C_1$. Отсюда, интегрируя еще раз, находим общее решение уравнения (37)

$$y = \int F(x) dx + C_1 x + C_2.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' = \sin x$.

Решение. Полагая $y' = v(x)$, получаем уравнение $v'(x) = \sin x$. Интегрируя, находим $v(x) = -\cos x + C_1$. Заменяя $v(x)$ на y' и интегрируя еще раз, находим общее решение уравнения:

$$y = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

II. Уравнение $y'' = f(x, y')$. Это уравнение не содержит явно искомой функции y . Вводя, как и в предыдущем случае, новую функцию $v(x) = y'$ и замечая, что $y'' = v'(x)$, получаем уравнение первого порядка относительно функции $v(x)$:

$$v'(x) = f(x, v).$$

Допустим, что найдено общее решение этого уравнения

$$v = \varphi(x, C_1).$$

Заменяя в этом решении функцию v на y' , получаем

$$y' = \varphi(x, C_1).$$

Отсюда общее решение уравнения (38) будет иметь вид

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$$

и выделить из него частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$.

Решение. Положим $y' = v(x)$. Тогда $y'' = v'(x)$. Подставляя эти выражения в данное уравнение, получим уравнение первого порядка

$$(1 + x^2)v' - 2xv = 0.$$

Разделяя в этом уравнении переменные, находим

$$\frac{dv}{v} = \frac{2x dx}{1 + x^2}.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln |v| = \ln(1 + x^2) + \ln C_0.$$

Ютенсируя, находим

$$v = \pm C_0 (1 + x^2) = C_1 (1 + x^2).$$

Как как $v = y'$, то $y' = C_1 (1 + x^2)$. Интегрируя еще раз, получаем общее решение данного уравнения

$$y = C_1 \left(x + \frac{x^3}{3} \right) + C_2.$$

Выделим из этого общего решения частное решение. Используя первое начальное условие $y|_{x=1} = 0$, находим $0 = C_1 \left(1 + \frac{1}{3} \right) + C_2$, или $\frac{4}{3} C_1 + C_2 = 0$. Дифференцируем общее решение: $y' = C_1 (1 + x^2)$. Используя второе начальное условие $y'|_{x=1} = 1$, получим $1 = C_1 (1 + 1)$, откуда $C_1 = \frac{1}{2}$.

Таким образом, для определения постоянных C_1 и C_2 получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} C_1 + C_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{2}{3}$. Следовательно, искомое частное решение данного уравнения имеет вид $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} - \frac{2}{3}$.

III. Уравнение $y'' = f(y, y')$. Это уравнение не содержит явно независимой переменной x . Для понижения порядка уравнения снова вводим новую функцию $v(y)$, зависящую от переменной y , полагая

$$y' = v(y).$$

Дифференцируем это равенство по x , помня, что y является функцией от x :

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dv(y)}{dx} = \frac{dv(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Так как $\frac{dy}{dx} = v(y)$, то $y'' = \frac{dv}{dy} \cdot v$. (40)

Подставляя выражения для y' и y'' в данное дифференциальное уравнение, получаем уравнение первого порядка относительно функции $v(y)$:

$$\frac{dv}{dy} v = f(y, v).$$

Пусть функция $v(y) = \Phi(y, C_1)$ является общим решением этого уравнения. Вспоминая, что $v(y) = \frac{dy}{dx}$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = \Phi(y, C_1).$$

Интегрируя его, находим общий интеграл первоначального уравнения (39):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения $1 + y'^2 = 2yy''$.

Решение. Вводим новую неизвестную функцию $v(y)$, полагая

$$y' = v(y);$$

тогда, согласно равенству (40), $y'' = \frac{dv}{dy} v$. Подставляя выражения для y' и y'' в данное уравнение, получим

$$1 + v^2 = 2yv \frac{dv}{dy}.$$

В этом уравнении первого порядка переменные разделяются:

$$\frac{2v dv}{1 + v^2} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, находим: $\ln(1 + v^2) = \ln|y| + \ln C_0$. Отсюда $1 + v^2 = \pm C_0 y = C_1 y$ и $v = \pm \sqrt{C_1 y - 1}$.

Так как $v = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1 y - 1}$ и, следовательно,

$$dx = \frac{dy}{\pm \sqrt{C_1 y - 1}}.$$

Интегрируя, получаем общий интеграл

$$(x + C_2) = \pm \frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1}, \text{ или } (x + C_2)^2 = \frac{4}{C_1^2} (C_1 y - 1).$$

Отсюда находим общее решение:

$$y = \frac{C_1^2 (x + C_2)^2 + 4}{4C_1}.$$

Рассмотрим теперь задачи, решение которых приводит к дифференциальным уравнениям второго порядка. Прежде всего вернемся к задаче о свободном падении материальной точки, рассмотренной в § 1, п. 1. Уравнение, к которому привела эта задача, имело вид (формула 4)

$$y'' = g.$$

Это уравнение вида (37). Аргументом здесь является время. Вводя новую функцию $v(t) = y'$, получаем уравнение $v' = g$. Интегрируя, находим

$$v = gt + C_1.$$

Так как в начальный момент скорость точки должна быть равной v_0 и так как скорость точки есть первая производная y' от пути по времени, то для определения C_1 имеем уравнение $v_0 = g \cdot 0 + C_1$. Отсюда $C_1 = v_0$ и

$$v = gt + v_0.$$

Это известная из физики формула для скорости при свободном падении материальной точки.

Заменяя здесь v на $\frac{dy}{dt}$ и интегрируя еще раз, находим

$$\frac{dy}{dt} = gt + v_0, \quad dy = (gt + v_0) dt, \quad y = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + C_2.$$

Так как в начальный момент пройденный путь равен по условию нулю, то получаем

$$0 = \frac{g \cdot 0}{2} + v_0 \cdot 0 + C_2,$$

откуда $C_2 = 0$. Итак, частное решение уравнения (4) имеет вид

$$y = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t.$$

Это формула пройденного пути при свободном падении тела.

Задача. В моторной лодке, движущейся прямолинейно со скоростью $v_0 = 5$ м/сек, выключается мотор. При своем движении лодка испытывает сопротивление воды, сила которого пропорциональна квадрату скорости лодки, причем коэффициент пропорциональности $k = \frac{m}{50}$, где m — масса лодки. Через сколько времени скорость лодки уменьшится вдвое и какой путь пройдет за это время лодка?

Решение. При решении этой задачи воспользуемся вторым законом Ньютона.

Величина силы, действующей на материальную точку, равна произведению массы точки на величину ее ускорения, а направление силы совпадает с направлением ускорения.

Так как скорость есть первая производная от пути по времени $v = \frac{ds}{dt}$, а ускорение — вторая производная от пути по времени $a = \frac{d^2s}{dt^2}$, то принимая лодку за материальную точку, можем написать уравнение движения лодки в виде $ma = F$, или

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{m}{50} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2. \quad (*)$$

Знак «минус» здесь указывает на то, что сила сопротивления воды направлена противоположно движению лодки.

Так как скорость $v = s'$, то начальные условия будут следующими:

$$s|_{t=0} = 0, \quad s'|_{t=0} = v|_{t=0} = v_0 = 5 \text{ м/сек.}$$

Так как $s'' = v'$, то, подставляя выражения для s' и s'' в уравнение (*), получаем уравнение первого порядка

$$mv' = -\frac{m}{50} v^2,$$

или

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{50}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{50} dt, \quad \frac{1}{v} = \frac{t}{50} + C_1.$$

Используя начальное условие $s'|_{t=0} = v|_{t=0} = 5$, найдем $C_1 = \frac{1}{5}$ и $v = \frac{50}{t+10}$. Так как $v = \frac{ds}{dt}$, то

$$\frac{ds}{dt} = \frac{50}{t+10}.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$s = 50 \ln(t+10) + C_2.$$

Принимая во внимание, что $s|_{t=0} = 0$, получим $0 = 50 \ln(0+10) + C_2$. Следовательно, $C_2 = -50 \ln 10$ и

$$s = 50 \ln \frac{t+10}{10}.$$

Итак, мы получили закон движения лодки. По условию задачи требуется узнать время, через которое скорость лодки уменьшится вдвое. Для этого подставляем в формулу для скорости $v = \frac{50}{t+10}$ значение $v = \frac{1}{2} v_0 = 2,5$. Обозначая через T врем, спустя которое скорость лодки уменьшится вдвое, получим $2,5 = \frac{50}{T+10}$. Отсюда время $T = 10$ сек.

Для вычисления пути, пройденного лодкой за это время, в выражение для s подставляем значение $T = 10$ сек:

$$s = 50 \ln \frac{10+10}{10} = 50 \ln 2 \approx 50 \cdot 0,69 \approx 34,5 \text{ м.}$$

3. Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков

Дифференциальное уравнение n -го порядка в общем виде записывается следующим образом:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

или, если это возможно, в виде, разрешенном относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0. \quad (41)$$

В частном случае дифференциальное уравнение n -го порядка может не содержать в явном виде $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, но обязательно содержит $y^{(n)}$.

Общее решение уравнения n -го порядка зависит от n произвольных постоянных, т. е. является функцией вида

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (42)$$

Решение дифференциального уравнения, получающееся из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}, \dots, C_n = C_{n0}$, называется *частным решением*.

Для того чтобы из общего решения уравнения выделить частное решение, задаются начальные условия. В случае уравнения n -го порядка начальные условия имеют вид

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, y''|_{x=x_0} = y''_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \quad (43)$$

Дифференцируя общее решение (42) $n-1$ раз и используя начальные условия (43), получим систему уравнений для определения постоянных $C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}$:

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \varphi(x, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}), \\ y'_0 &= \varphi'(x, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}), \\ y''_0 &= \varphi''(x_0, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}), \\ &\vdots \\ y_0^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x_0, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0}). \end{aligned} \right\}$$

Для уравнения n -го порядка (41) имеет место теорема существования и единственности решения, аналогичная соответствующим теоремам для уравнений первого и второго порядков.

Задача Коши для уравнения n -го порядка формулируется следующим образом: найти решение дифференциального уравнения (41), удовлетворяющее начальным условиям (43).

Пример. Найти общее решение уравнения третьего порядка

$$y''' = 24x + 6$$

и выделить из него частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0, y''|_{x=0} = 1$.

Решение. Так как $y''' = (y'')'$, то $(y'')' = 24x + 6$. Интегрируя, находим $y'' = 12x^2 + 6x + C_1$. Так как $y'' = (y')'$, то $(y')' = 12x^2 + 6x + C_1$, и, интегрируя еще раз, получаем $y' = 4x^3 + 3x^2 + C_1x + C_2$. Наконец, после еще одного интегрирования получим общее решение

$$y = x^4 + x^3 + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Это решение зависит от трех произвольных постоянных. Выделим из него частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям.

Выпишем еще раз общее решение и первую и вторую его производные:

$$\begin{aligned} y &= x^4 + x^3 + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3, \\ y' &= 4x^3 + 3x^2 + C_1 x + C_2, \\ y'' &= 12x^2 + 6x + C_1. \end{aligned}$$

Подставляя в эти соотношения начальные условия $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=0$, $y''|_{x=0}=1$, последовательно найдем:

$$C_3=0, C_2=0 \text{ и } C_1=1.$$

Итак, частное решение, соответствующее данным начальным условиям, имеет вид

$$y = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2.$$

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Большое количество задач математики, механики, электротехники и других технических наук приводят к особому виду дифференциальных уравнений, так называемым линейным уравнениям. Линейные уравнения первого порядка рассматривались в § 1, п. 5.

В этом параграфе будет изложена теория линейных уравнений второго порядка.

1. Определения и общие свойства

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \quad (44)$$

называется *линейным дифференциальным уравнением второго порядка*.

Здесь коэффициенты уравнения $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ и свободный член $b(x)$ — заданные функции аргумента x . Если $b(x) \equiv 0$, то линейное уравнение принимает вид

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (45)$$

и называется *однородным линейным дифференциальным уравнением* (или уравнением без правой части). Если же $b(x) \not\equiv 0$, то уравнение (44) называется *неоднородным линейным дифференциальным уравнением* (или уравнением с правой частью).

Например, уравнения:

$$xy'' + 5xy' + 2y = e^x \text{ и } y'' + y' + x^3y = 0$$

будут линейными уравнениями, причем первое из них неоднородное, а второе — однородное.

Уравнения

$$y'' + 5(y')^2 - 2y = 0 \text{ и } 3yy'' - x^2y' + y = \cos x$$

не принадлежат к виду (44) и не будут линейными. Первое из них содержит квадрат производной, а второе — член с произведением второй производной на искомую функцию.

Разрешим уравнение (44) относительно y'' :

$$y'' = \frac{b(x) - a_1(x)y' - a_2(x)y}{a_0(x)}. \quad (46)$$

Так как это уравнение является частным видом дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$, то для него справедлива теорема существования и единственности решения Коши, сформулированная в предыдущем параграфе. Однако для линейного уравнения эта теорема может быть сформулирована проще.

Действительно, допустим, что коэффициенты уравнения $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ и свободный член $b(x)$ непрерывны на некотором интервале (α, β) , причем коэффициент $a_0(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала. Тогда правая часть уравнения (46)

$$f(x, y, y') = \frac{b(x) - a_1(x)y' - a_2(x)y}{a_0(x)}$$

и ее частные производные

$$f'_y(x, y, y') = -\frac{a_2(x)}{a_0(x)} \quad \text{и} \quad f'_{y'}(x, y, y') = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$$

будут непрерывными функциями при любых значениях переменных y и y' и при значениях x , принадлежащих интервалу (α, β) . Поэтому уравнение (46) удовлетворяет условиям теоремы Коши. На основании сказанного сформулируем теперь теорему существования и единственности решения линейного дифференциального уравнения (44).

Теорема. Если коэффициенты $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ и правая часть $b(x)$ линейного уравнения (44) непрерывны на интервале (α, β) , причем коэффициент $a_0(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала, то каковы бы ни были начальные условия $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$, где точка x_0 принадлежит интервалу (α, β) , существует единственное решение уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Рассмотрим некоторые свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений.

Теорема 1. Если функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения (45), то и функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ также является решением этого уравнения при любых значениях постоянных C_1 и C_2 .*

Доказательство. Подставив функцию $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ и ее производные в левую часть уравнения (45), получим

$$\begin{aligned} & a_0(x) [C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)]'' + a_1(x) [C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)]' + \\ & + a_2(x) [C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)] = a_0(x) [C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x)] + \\ & + a_1(x) [C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)] + a_2(x) [C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)] = \\ & = C_1 [a_0(x) y_1''(x) + a_1(x) y_1'(x) + a_2(x) y_1(x)] + \\ & + C_2 [a_0(x) y_2''(x) + a_1(x) y_2'(x) + a_2(x) y_2(x)] = 0, \end{aligned}$$

* Выражение $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ называется *линейной комбинацией* функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

так как функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями уравнения (45) и, следовательно, последние два выражения в квадратных скобках равны нулю.

Так как общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2 , то возникает вопрос, не будет ли решение $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ общим решением уравнения (45).

Покажем, что это не всегда имеет место. Так, например, уравнение $y'' + 4y = 0$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения при любых начальных условиях (см. стр. 590). Это уравнение имеет, как легко проверить, частные решения $y_1 = \sin 2x$ и $y_2 = 10 \sin 2x$. Однако их линейная комбинация $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cdot 10 \sin 2x$, являясь решением данного уравнения, не будет его общим решением. Действительно, нетрудно убедиться в том, что функция $y = \cos 2x$, удовлетворяющая начальным условиям $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$, является решением (единственным) уравнения $y'' + 4y = 0$. Однако это решение нельзя получить из линейной комбинации $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cdot 10 \sin 2x$, так как уже первое начальное условие $y|_{x=0} = 1$ для функции $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cdot 10 \sin 2x$ не выполняется ни при каких значениях C_1 и C_2 : $C_1 \sin 0 + C_2 \cdot 10 \sin 0 \neq 1$.

Определение 1. Два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка образуют фундаментальную систему решений на некотором интервале (α, β) , если ни в одной точке этого интервала определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) \quad (47)$$

не обращается в нуль.

Определитель $W(x)$ называется *определителем Вронского** (или *вронскианом*).

Пример 1. Выше мы указали, что уравнение $y'' + 4y = 0$ имеет своими частными решениями функции $y_1 = \sin 2x$, $y_2 = 10 \sin 2x$, $y_3 = \cos 2x$. Легко убедиться, что первое и второе решение не образует фундаментальной системы, а первое и третье образуют фундаментальную систему на всей числовой оси. Действительно,

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & 10 \sin 2x \\ 2 \cos 2x & 20 \cos 2x \end{vmatrix} = 20 \sin 2x \cos 2x - 20 \sin 2x \cos 2x \equiv 0$$

и

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2 \cos 2x & -2 \sin 2x \end{vmatrix} = -2 \sin^2 2x - 2 \cos^2 2x = -2 \neq 0.$$

Пример 2. Легко проверить, что уравнение

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

* Ю. Вронский (1778—1853)—польский математик.

имеет частные решения $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$. Эти решения образуют фундаментальную систему на любом интервале, не содержащем точку $x = 0$. Действительно,

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2,$$

т. е. определитель Вронского не обращается в нуль при $x \neq 0$.

З а м е ч а н и е. Очевидно, всякое линейное однородное уравнение имеет решение $y_1 \equiv 0$. Однако это решение ни с одним другим частным решением $y_2 = y_2(x)$ фундаментальной системы не образует, так как в этом случае определитель Вронского тождественно равен нулю:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ 0 & y_2'(x) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Ответ на поставленный выше вопрос о виде общего решения однородного линейного уравнения дает следующая теорема.

Теорема 2 (о структуре общего решения). Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ уравнения (45) образуют на интервале (α, β) фундаментальную систему, то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \quad (48)$$

При этом предполагается, что коэффициенты $a_0(x)$, $a_1(x)$ и $a_2(x)$ непрерывны и $a_0(x) \neq 0$ на интервале (α, β) .

Доказательство. Прежде всего заметим, что при любых C_1 и C_2 функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ на основании теоремы 1 является решением уравнения (45). Поэтому, чтобы убедиться, что это решение является общим, остается показать, что из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad (49)$$

где точка x_0 принадлежит интервалу (α, β) , а y_0 и y'_0 произвольны.

Пусть $Y = Y(x)$ — какое-либо частное решение уравнения (45), удовлетворяющее начальным условиям (49). Покажем, что оно может быть выделено из решения (48) надлежащим выбором постоянных C_1 и C_2 . Действительно, так как $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ и $y' = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)$, то, подставляя начальные условия, получим

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y'_0 &= C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0). \end{aligned}$$

Эти равенства представляют собой систему уравнений с неизвестными C_1 и C_2 .

Определитель этой системы

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

равен значению определителя Вронского $W(x)$ при $x=x_0$. Так как по условию частные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему частных решений на интервале (α, β) , которому принадлежит точка x_0 , то $W(x_0) \neq 0$. Поэтому для неизвестных C_1 и C_2 получим следующие единственные значения:

$$C_{10} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y'_0 & y'_2(x_0) \end{vmatrix}}{W(x_0)}, \quad C_{20} = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y'_1(x_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{W(x_0)}.$$

Полученное частное решение $y = C_{10}y_1(x) + C_{20}y_2(x)$ в силу теоремы единственности будет совпадать с решением $Y(x)$. Итак, показано, что если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему частных решений, то общее решение имеет вид

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Из доказанной теоремы следует, что для нахождения общего решения достаточно знать два его частных решения, образующие фундаментальную систему.

Пример 3. Рассмотрим уравнение $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$. Как мы видели в примере 2, функции $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$ образуют фундаментальную систему решений на любом интервале, не содержащем точку $x=0$. Поэтому на основании теоремы 2 общее решение этого уравнения имеет вид $y = C_1x + C_2x^2$. Найдем частное решение данного уравнения при следующих начальных условиях: $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$. Так как $y' = C_1 + 2C_2x$, то, подставляя начальные условия, получим систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 1 = C_1 + 2C_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = x^2 - x.$$

3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Рассмотрим теперь основные свойства линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (44)

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x).$$

Линейное однородное уравнение, левая часть которого совпадает с левой частью неоднородного уравнения (44), в дальнейшем будем называть соответствующим однородным уравнением.

Теорема 1. Если $\bar{y}(x)$ частное решение линейного неоднородного уравнения (44), а $Y(x)$ общее решение соответствующего однородного уравнения, то функция $y = \bar{y}(x) + Y(x)$ является общим решением неоднородного дифференциального уравнения (44).

Доказательство. Так как $\bar{y}(x)$ есть решение уравнения (44), то

$$a_0(x) \cdot \bar{y}''(x) + a_1(x) \bar{y}'(x) + a_2(x) \bar{y}(x) \equiv b(x).$$

Аналогично, вследствие того что $Y(x)$ есть решение соответствующего однородного уравнения,

$$a_0(x) Y''(x) + a_1(x) Y'(x) + a_2(x) Y(x) \equiv 0.$$

В таком случае имеем

$$\begin{aligned} a_0(x) [\bar{y}(x) + Y(x)]'' + a_1(x) [\bar{y}(x) + Y(x)]' + a_2(x) [\bar{y}(x) + Y(x)] &= \\ = [a_0(x) \bar{y}''(x) + a_1(x) \bar{y}'(x) + a_2(x) \bar{y}(x)] + [a_0(x) Y''(x) + & \\ + a_1(x) Y'(x) + a_2(x) Y(x)] &\equiv b(x) + 0 \equiv b(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $y = \bar{y}(x) + Y(x)$ действительно является решением неоднородного уравнения (44). Для того чтобы убедиться, что это решение является общим, остается показать, что из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (49):

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ два частных решения соответствующего однородного уравнения, образующие фундаментальную систему частных решений. В таком случае $Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ и

$$y = \bar{y}(x) + Y(x) = \bar{y}(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \quad (50)$$

Пусть $y = \varphi(x)$ какое-либо частное решение неоднородного уравнения (44), удовлетворяющее начальным условиям (49). Покажем, что оно может быть выделено из решения (50) соответствующим подбором C_1 и C_2 .

Действительно, так как

$$y = \bar{y}(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \text{ и } y' = \bar{y}'(x) + C_1 y'_1(x) + C_2 y'_2(x),$$

то, подставляя начальные условия, получим систему уравнений для определения неизвестных C_1 и C_2 :

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= \bar{y}(x_0) + C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0), \\ y'_0 &= \bar{y}'(x_0) + C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0), \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) &= y_0 - \bar{y}(x_0), \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) &= y'_0 - \bar{y}'(x_0). \end{aligned} \right\}$$

Эта система имеет единственное решение C_{10} и C_{20} , так как ее определитель отличен от нуля (см. доказательство теоремы 2, п. 2). Полученное частное решение $y = \bar{y}(x) + C_{10} y_1(x) + C_{20} y_2(x)$ в силу теоремы единственности будет совпадать с решением $y = \varphi(x)$. Таким образом, теорема доказана.

4. Метод вариации произвольных постоянных

В предыдущем пункте было показано, что для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения достаточно знать общее решение соответствующего однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения.

Сейчас мы покажем, как находится частное решение неоднородного уравнения, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (44)

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x).$$

Пусть $Y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ частные решения, образующие фундаментальную систему. Заменим в общем решении постоянные C_1 и C_2 некоторыми функциями $z_1(x)$ и $z_2(x)$. Подберем эти функции так, чтобы

$$\bar{y} = z_1(x)y_1(x) + z_2(x)y_2(x) \quad (51)$$

было решением уже неоднородного уравнения (44). Функция $\bar{y}$, определенная равенством (51), должна быть решением уравнения (44). Поэтому при подстановке $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в уравнение (44) должно получиться тождество.

Продифференцируем $\bar{y}$ по x , получим

$$\bar{y}' = z_1'(x)y_1(x) + z_2'(x)y_2(x) + z_1(x)y_1'(x) + z_2(x)y_2'(x). \quad (52)$$

Мы ввели две новых неизвестных функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$. Для их определения надо составить два уравнения. В качестве одного из этих уравнений примем следующее:

$$z_1'(x)y_1(x) + z_2'(x)y_2(x) = 0. \quad (53)$$

Тогда выражение (52) для $\bar{y}'$ упростится и примет вид

$$\bar{y}' = z_1(x)y_1'(x) + z_2(x)y_2'(x). \quad (54)$$

Дифференцируя это равенство еще раз, найдем

$$\bar{y}'' = z_1'(x)y_1'(x) + z_1(x)y_1''(x) + z_2'(x)y_2'(x) + z_2(x)y_2''(x).$$

Подставляя выражение для $\bar{y}$, $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$ в уравнение (44), получим

$$a_0(x)[z_1'y_1' + z_1y_1'' + z_2'y_2' + z_2y_2''] + a_1(x)[z_1y_1' + z_2y_2'] + + a_2(x)[z_1y_1 + z_2y_2] = b(x),$$

или, группируя члены,

$$[a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1]z_1 + [a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + + a_2(x)y_2]z_2 + a_0(x)[z_1'y_1' + z_2'y_2'] = b(x). \quad (55)$$

Так как функции y_1 и y_2 являются решениями однородного уравнения, то имеют место тождества

$$a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 \equiv 0, \\ a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2 \equiv 0.$$

Поэтому равенство (55) принимает вид

$$a_0(x) [z_1' y_1' + z_2' y_2'] = b(x),$$

или

$$z_1'(x) y_1'(x) + z_2'(x) y_2'(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}. \quad (56)$$

Уравнение (56) является вторым уравнением, которому должны удовлетворять функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$.

Таким образом, объединяя уравнения (53) и (56), для функций $z_1(x)$ и $z_2(x)$ получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} z_1'(x) y_1(x) + z_2'(x) y_2(x) &= 0, \\ z_1'(x) y_1'(x) + z_2'(x) y_2'(x) &= \frac{b(x)}{a_0(x)}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Из системы уравнений (57) можно найти единственные значения для $z_1'(x)$ и $z_2'(x)$, так как определитель системы

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

как определитель Вронского для фундаментальной системы частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Определив $z_1'(x)$ и $z_2'(x)$, интегрированием находим $z_1(x)$ и $z_2(x)$ и затем по формуле (51) составляем частное решение.

Пример. Найти частное решение уравнения $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

Решение. В примере 1 п. 2 мы установили, что уравнение $y'' + 4y = 0$ в качестве фундаментальной системы частных решений имеет функции $y_1(x) = \sin 2x$ и $y_2(x) = \cos 2x$. Поэтому частное решение данного неоднородного уравнения на основании формулы (51) запишется в виде

$$\bar{y} = z_1(x) \sin 2x + z_2(x) \cos 2x. \quad (58)$$

Система (57) для нахождения $z_1'(x)$ и $z_2'(x)$ в данном случае будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} z_1'(x) \sin 2x + z_2'(x) \cos 2x &= 0, \\ 2z_1'(x) \cos 2x - 2z_2'(x) \sin 2x &= \frac{1}{\cos 2x}. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему относительно $z_1'(x)$ и $z_2'(x)$, находим

$$z_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos 2x \\ \frac{1}{\cos 2x} & -2 \sin 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2 \cos 2x & -2 \sin 2x \end{vmatrix}} = \frac{-\cos 2x \cdot \frac{1}{\cos 2x}}{-2 \sin^2 2x - 2 \cos^2 2x} = \frac{1}{2}.$$

Подобным же образом находим $z_2'(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$. Интегрируя, получаем

$$z_1(x) = \frac{1}{2} x, \quad z_2(x) = \frac{1}{4} \ln |\cos 2x|.$$

Произвольных постоянных мы не пишем, так как ищем частное решение. Подставляя эти выражения в равенство (51), получим частное решение $\bar{y}$ данного неоднородного уравнения

$$\bar{y} = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \cdot \ln |\cos 2x|.$$

Замечание. Найдя частное решение $\bar{y}$ неоднородного уравнения и зная фундаментальную систему частных решений соответствующего однородного уравнения, мы можем написать общее решение неоднородного уравнения (см. п. 3, формула (50)) $y = \bar{y} + Y$, или

$$y = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{\cos 2x}{4} \ln |\cos 2x| + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этом параграфе будет рассмотрен частный случай линейных уравнений второго порядка, когда коэффициенты уравнения постоянны, т. е. являются числами. Такие уравнения называются уравнениями с постоянными коэффициентами. Этот вид уравнений находит особенно широкое применение.

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

в котором коэффициенты a_0, a_1, a_2 постоянны. Полагая, что $a_0 \neq 0$, делим все члены уравнения на a_0 и обозначая

$$\frac{a_1}{a_0} = p, \quad \frac{a_2}{a_0} = q,$$

запишем данное уравнение в виде

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (59)$$

Как известно, для нахождения общего решения линейного однородного уравнения второго порядка достаточно знать его фундаментальную систему частных решений. Покажем, как находится фундаментальная система частных решений для однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Будем искать частное решение этого уравнения в виде

$$y = e^{kx}. \quad (60)$$

Дифференцируя эту функцию два раза и подставляя выражения для y, y' и y'' в уравнение (59), получим

$$e^{kx} \cdot k^2 + p k e^{kx} + q e^{kx} = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то, сокращая на e^{kx} , получим уравнение

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (61)$$

Из этого уравнения определяются те значения k , при которых функция e^{kx} будет решением уравнения (59).

Алгебраическое уравнение (61) для определения коэффициента k называется *характеристическим уравнением* данного дифференциального уравнения (59).

Характеристическое уравнение является уравнением второй степени и имеет, следовательно, два корня. Эти корни могут быть либо действительными различными, либо действительными и равными, либо комплексными сопряженными.

Рассмотрим, какой вид имеет фундаментальная система частных решений в каждом из этих случаев.

1. Корни характеристического уравнения действительные и различные: $k_1 \neq k_2$. В этом случае по формуле (60) находим два частных решения:

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Эти два частных решения образуют фундаментальную систему решений на всей числовой оси, так как определитель Вронского нигде не обращается в нуль:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2)x} (k_2 - k_1) \neq 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения согласно формуле (48) имеет вид

$$Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (62)$$

2. Корни характеристического уравнения равные: $k_2 = k_1$. В этом случае оба корня будут действительными. По формуле (60) получаем только одно частное решение

$$y_1 = e^{k_1 x}.$$

Покажем, что второе частное решение $y_2(x)$, образующее вместе с первым фундаментальную систему, имеет вид

$$y_2 = x e^{k_1 x}.$$

Прежде всего проверим, что функция $y_2(x)$ является решением уравнения (59). Действительно,

$$\begin{aligned} y_2'' + p y_2' + q y_2 &= (x e^{k_1 x})'' + p (x e^{k_1 x})' + q (x e^{k_1 x}) = 2k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 x e^{k_1 x} + \\ &+ p(e^{k_1 x} + x k_1 e^{k_1 x}) + q x e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (2k_1 + k_1^2 x + p + p x k_1 + q x) = \\ &= e^{k_1 x} [x(k_1^2 + p k_1 + q) + (p + 2k_1)]. \end{aligned}$$

Но $k_1^2 + p k_1 + q = 0$, так как k_1 есть корень характеристического уравнения (61). Кроме того, по теореме Виета $p = -(k_1 + k_2) = -2k_1$. Поэтому $p + 2k_1 = 0$. Следовательно, $y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0$, т. е. функция $y_2(x) = x e^{k_1 x}$ действительно является решением уравнения (59).

Покажем теперь, что найденные частные решения $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = x e^{k_1 x}$ образуют фундаментальную систему решений. Действительно,

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & x e^{k_1 x} \\ (e^{k_1 x})' & (x e^{k_1 x})' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & x e^{k_1 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & e^{k_1 x} (1 + k_1 x) \end{vmatrix} = e^{2k_1 x} \neq 0.$$

Таким образом, в этом случае общее решение однородного линейного уравнения имеет вид

$$Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x},$$

или

$$Y = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x). \quad (63)$$

3. Корни характеристического уравнения комплексные. Как известно, комплексные корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами являются сопряженными комплексными числами, т. е. имеют вид: $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$. В этом случае частные решения уравнения (59), согласно формуле (60), будут иметь вид:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{k_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}, \\ y_2 &= e^{k_2 x} = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}. \end{aligned}$$

Применяя формулы Эйлера (см. гл. XI, § 5 п. 3), выражения для y_1 и y_2 можно записать в виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x), \\ y_2 &= e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x). \end{aligned}$$

Эти решения являются комплексными. Чтобы получить действительные решения, рассмотрим новые функции

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \frac{1}{2} (y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ \bar{y}_2 &= \frac{1}{2i} (y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned}$$

Они являются линейными комбинациями решений y_1 и y_2 и, следовательно, сами являются решениями уравнения (59) (см. § 3, п. 2, теорему 1).

Легко показать, что определитель Вронского для этих решений отличен от нуля и, следовательно, решения $\bar{y}_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $\bar{y}_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ образуют фундаментальную систему решений.

Таким образом, общее решение однородного линейного дифференциального уравнения в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$$Y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

или

$$Y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (64)$$

Приведем в заключение таблицу формул общего решения уравнения (59) в зависимости от вида корней характеристического уравнения.

Уравнение	$y'' + py' + q = 0$		
Характеристическое уравнение	$k^2 + pk + q = 0$		
Корни характеристического уравнения	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$
Фундаментальная система частных решений	$e^{k_1 x}$ $e^{k_2 x}$	$e^{k_1 x}$ $x e^{k_1 x}$	$e^{\alpha x} \cos \beta x$ $e^{\alpha x} \sin \beta x$
Формула общего решения	$Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$Y = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$	$Y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения имеет вид $k^2 + 5k + 6 = 0$. Его корни $k_1 = -2$, $k_2 = -3$. Фундаментальная система частных решений: $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-3x}$. Общее решение:

$$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет равные корни $k_1 = k_2 = 1$. Фундаментальная система частных решений: $y_1 = e^x$, $y_2 = x e^x$. Общее решение уравнения

$$Y = e^x (C_1 + C_2 x).$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 13 = 0$ имеет корни $k_1 = -2 + 3i$ и $k_2 = -2 - 3i$. Здесь $\alpha = -2$, $\beta = 3$. Фундаментальная система частных решений: $y_1 = e^{-2x} \cos 3x$, $y_2 = e^{-2x} \sin 3x$. Общее решение уравнения имеет вид

$$Y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2 = 0$ имеет корни $k_1 = \sqrt{2}i$ и $k_2 = -\sqrt{2}i$. Здесь $\alpha = 0$ и $\beta = \sqrt{2}$. Фундаментальная система частных решений: $y_1 = \cos \sqrt{2}x$, $y_2 = \sin \sqrt{2}x$. Общее решение уравнения

$$Y = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x.$$

2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (65)$$

в котором коэффициенты p и q по-прежнему некоторые числа и правая часть $f(x)$ известная функция. Как было показано выше (§ 3, п. 3), общее решение уравнения (65) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Метод нахождения общего решения однородного уравнения с постоянными коэффициентами (59) подробно рассмотрен в предыдущем пункте. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения (65) можно применить метод вариации постоянных, изложенный в п. 4 предыдущего параграфа. Этот метод применим, вообще говоря, к любой правой части. Однако для уравнений с постоянными коэффициентами, правые части которых имеют специальный вид, существует более простой способ нахождения частного решения. Этот способ называется *методом подбора формы частного решения*. Не приводя выводов, укажем форму, в которой следует искать частное решение в зависимости от вида правой части $f(x)$ дифференциального уравнения.

I. Правая часть уравнения $f(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

В этом случае частное решение $\bar{y}$ следует искать в виде

$$\bar{y} = Q_n(x)x^r. \quad (66)$$

Здесь $Q_n(x)$ — многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, но с неизвестными коэффициентами, а r — число корней характеристического уравнения, равных нулю.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' + y' = 5x + 3$.

Решение. Здесь характеристическое уравнение $k^2 + k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Соответственно этому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$Y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

Так как правая часть уравнения является многочленом первой степени и так как один из корней характеристического уравнения равен нулю ($r = 1$), то частное решение, согласно формуле (66), надо искать в виде

$$\bar{y} = (Ax + B)x^1 = Ax^2 + Bx.$$

Подберем коэффициенты A и B таким образом, чтобы $\bar{y}$ было решением данного уравнения. Для этого подставим выражения для $\bar{y}$ в данное уравнение:

$$(Ax^2 + Bx)'' + (Ax^2 + Bx)' = 5x + 3.$$

Отсюда

$$2A + 2Ax + B = 5x + 3,$$

или

$$2Ax + (2A + B) = 5x + 3.$$

Полученное равенство является тождеством, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства должны быть

равны. Таким образом, получаем следующую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2A &= 5, \\ 2A + B &= 3, \end{aligned} \right\}$$

из которой находим $A = \frac{5}{2}$, $B = -2$.

Итак, частное решение данного уравнения имеет вид $\bar{y} = \frac{5}{2}x^2 - 2x$, а общее решение —

$$y = \bar{y} + Y = \frac{5}{2}x^2 - 2x + C_1 + C_2e^{-x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = x^2.$$

Решение. Составив характеристическое уравнение $k^2 + 3k + 2 = 0$, найдем его корни $k_1 = -1$, $k_2 = -2$. Поэтому соответствующее однородное уравнение имеет следующее общее решение: $Y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$. Так как правая часть уравнения является многочленом второй степени ($x^2 = x^2 + 0 \cdot x + 0$) и так как ни один корень характеристического уравнения не равен нулю, то частное решение надо искать в форме

$$\bar{y} = (Ax^2 + Bx + C) \cdot x^0 = Ax^2 + Bx + C.$$

Находим производные $\bar{y}' = 2Ax + B$, $\bar{y}'' = 2A$. Подставляя их в данное дифференциальное уравнение, получим

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2,$$

или

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) = x^2.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2A &= 1, \\ 6A + 2B &= 0, \\ 2A + 3B + 2C &= 0, \end{aligned} \right\}$$

решая которую, находим: $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = \frac{7}{4}$. Таким образом, частное решение $\bar{y} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$, а общее решение

$$y = \bar{y} + Y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

II. Правая часть уравнения $f(x) = e^{ax}P_n(x)$. Здесь $P_n(x)$ — многочлен степени n , а коэффициент a в показателе — действительное число.

В этом случае частное решение $\bar{y}$ следует искать в виде

$$\bar{y} = Q_n(x)e^{ax}.$$
 (67)

Здесь $Q_n(x)$ — многочлен той же степени, что и многочлен $P_n(x)$, но с неизвестными коэффициентами, а r — число корней характеристического уравнения, совпадающих с коэффициентом в показателе a .

Замечание. При $a = 0$ имеет место I случай, так как $f(x) = e^{0x}P_n(x) = P_n(x)$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = (x + 2)e^{3x}.$$
 (*)

Решение. Составляем характеристическое уравнение и находим его корни: $k^2 - 2k - 3 = 0$; $k_1 = -1$, $k_2 = 3$. Общее решение уравнения без правой части имеет вид

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

Так как среди корней характеристического уравнения имеется только один корень $k_2 = a = 3$, то $r = 1$, и частное решение $\bar{y}$ следует искать в виде

$$\bar{y} = (Ax + B)e^{3x} \cdot x = (Ax^2 + Bx)e^{3x}.$$

Находим $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$:

$$\begin{aligned}\bar{y}' &= (2Ax + B)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx)e^{3x}, \\ \bar{y}'' &= 2Ae^{3x} + 6(2Ax + B)e^{3x} + 9(Ax^2 + Bx)e^{3x}.\end{aligned}$$

Подставляя выражения $\bar{y}$, $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$ в уравнение (*) и сокращая на множитель $e^{3x} \neq 0$, получаем тождество

$$\begin{aligned}2A + 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx) - 2[(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx)] - \\ - 3(Ax^2 + Bx) = x + 2.\end{aligned}$$

После приведения подобных членов и группировки находим

$$8Ax + (2A + 4B) = x + 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned}8A &= 1, \\ 2A + 4B &= 2,\end{aligned} \right\}$$

из которой находим $A = \frac{1}{8}$ и $B = \frac{7}{16}$.

Подставляя найденные значения A и B в выражение для $\bar{y}$, найдем частное решение уравнения

$$\bar{y} = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x \right) e^{3x}.$$

Общее решение уравнения (*) находится как сумма общего решения Y уравнения без правой части и частного решения $\bar{y}$ уравнения (*), т. е.

$$y = \bar{y} + Y = \frac{x}{8} \left(x + \frac{7}{2} \right) e^{3x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

III. Правая часть уравнения $f(x) = M \cos bx + N \sin bx$, где M , N и b — заданные числа.

В этом случае частное решение $\bar{y}$ следует искать в виде

$$\bar{y} = (A \cos bx + B \sin bx) x^r, \quad (68)$$

где A и B — неизвестные коэффициенты, а r равно числу корней характеристического уравнения, совпадающих с bi .

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 5y = 2 \cos x - \sin x$$

и выделить из него частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 5 = 0$ имеет корни $k_1 = -2 + i$, $k_2 = -2 - i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид (см. формулу (64))

$$Y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Так как $bi = +i$ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$ и частное решение надо искать в форме

$$\bar{y} = A \cos x + B \sin x.$$

Дифференцируя, находим

$$\bar{y}' = -A \sin x + B \cos x, \quad \bar{y}'' = -A \cos x - B \sin x.$$

Подставляя выражения для y'' , y' и y в данное неоднородное дифференциальное уравнение, получим

$$-A \cos x - B \sin x + 4(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 2 \cos x - \sin x.$$

Группируя и приводя подобные члены, имеем

$$(4A + 4B) \cos x + (4B - 4A) \sin x = 2 \cos x - \sin x.$$

Написанное равенство является тождеством. Поэтому коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в левой и правой частях равенства должны быть равны. Приравнявая эти коэффициенты, получим систему уравнений для определения A и B

$$\left. \begin{aligned} 4A + 4B &= 2, \\ 4B - 4A &= -1. \end{aligned} \right\}^*$$

Из этой системы находим $B = \frac{1}{8}$, $A = \frac{3}{8}$.

* Первое из этих уравнений получится из тождества $(4A + 4B) \cos x + (4B - 4A) \sin x = 2 \cos x - \sin x$ при $x = 0$, а второе — при $x = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, частное решение имеет вид $\bar{y} = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$, а общее решение уравнения

$$y = \bar{y} + Y = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x + e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Для выделения частного решения используем заданные начальные условия: $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$. Так как

$$y' = -\frac{3}{8} \sin x + \frac{1}{8} \cos x - 2e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x} (-C_1 \sin x + C_2 \cos x),$$

то

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{3}{8} + C_1, \\ 2 &= \frac{1}{8} - 2C_1 + C_2. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{5}{8}, \quad C_2 = \frac{25}{8}.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y = \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x + e^{-2x} \left(\frac{5}{8} \cos x + \frac{25}{8} \sin x \right).$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y = 5 \sin 2x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет корни $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид $Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Правая часть $f(x) = 5 \sin 2x$ данного дифференциального уравнения принадлежит к рассматриваемому типу, так как ее можно представить в виде $5 \sin 2x + 0 \cdot \cos 2x$. Заметим, кроме того, что $bi = 2i$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения и, следовательно, $r = 1$. Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$\bar{y} = (A \cos 2x + B \sin 2x) x.$$

Дифференцируя и подставляя в уравнение, последовательно получим

$$\begin{aligned} y' &= (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) x + (A \cos 2x + B \sin 2x), \\ y'' &= (-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) x + (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + \\ &+ (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) = (-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) x + \\ &+ (-4A \sin 2x + 4B \cos 2x), \\ &(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) x + (-4A \sin 2x + 4B \cos 2x) + \\ &+ 4(A \cos 2x + B \sin 2x) x = 5 \sin 2x. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов получим

$$-4A \sin 2x + 4B \cos 2x = 5 \sin 2x.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} -4A &= 5, \\ 4B &= 0, \end{aligned} \right\}$$

или $A = -\frac{5}{4}$, $B = 0$. Таким образом, $\bar{y} = -\frac{5}{4}x \cos 2x$, и общее решение неоднородного уравнения запишется в виде

$$y = \bar{y} + Y = -\frac{5}{4}x \cos 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

В заключение приведем теорему, которая часто применяется при решении линейных уравнений.

Теорема. Если $\bar{y}_1$ есть частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x) \quad (69)$$

и $\bar{y}_2$ есть частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_2(x) \quad (70)$$

с одной и той же левой частью, то сумма $\bar{y}_1 + \bar{y}_2$ будет частным решением уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x). \quad (71)$$

Доказательство. Подставив в левую часть уравнения (71) сумму $\bar{y}_1 + \bar{y}_2$, получим на основании равенств (69) и (70)

$$\begin{aligned} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)'' + p(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)' + q(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) &= (\bar{y}_1'' + p\bar{y}_1' + q\bar{y}_1) + \\ &+ (\bar{y}_2'' + p\bar{y}_2' + q\bar{y}_2) = f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

Таким образом, действительно, $\bar{y}_1 + \bar{y}_2$ есть решение уравнения (71).

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 3e^x + x + 1. \quad (72)$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = 1$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения запишется следующим образом: $Y = e^x(C_1 + C_2x)$ (см. формулу 63).

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения рассмотрим два вспомогательных уравнения:

$$y'' - 2y' + y = 3e^x, \quad (*)$$

$$y'' - 2y' + y = x + 1 \quad (**)$$

и находим для каждого из них частные решения $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$. Частное решение уравнения (*) ищем в виде $\bar{y}_1 = Ae^x \cdot x^2$, так как число корней характеристического уравнения, совпадающих с коэффициентом $a = 1$ в показателе, равно 2 ($r = 2$).

Дифференцируя $\bar{y}_1$ и подставляя в уравнение (*), найдем

$$\begin{aligned} \bar{y}_1' &= Ae^x \cdot x^2 + 2Ae^x \cdot x, \quad \bar{y}_1'' = Ae^x \cdot x^2 + 4Ae^x \cdot x + 2Ae^x, \\ (Ae^x \cdot x^2 + 4Ae^x \cdot x + 2Ae^x) - 2(Ae^x \cdot x^2 + 2Ae^x \cdot x) + Ae^x \cdot x^2 &= 3e^x. \end{aligned}$$

Сокращая обе части равенства на множитель $e^x \neq 0$ и приводя подобные члены, получим $2A = 3$, $A = \frac{3}{2}$ и, следовательно, $\bar{y}_1 = \frac{3}{2} e^x \cdot x^2$.

Частное решение уравнения (**) ищем в виде $\bar{y}_2 = Bx + C$. Так как $\bar{y}'_2 = B$ и $\bar{y}''_2 = 0$, то, подставляя в уравнение (**), находим

$$0 - 2B + Bx + C = x + 1.$$

Отсюда $B = 1$ и $C = 3$. Таким образом, $\bar{y}_2 = x + 3$.

На основании предыдущей теоремы частное решение уравнения (72)

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \frac{3}{2} e^x x^2 + x + 3.$$

Общее решение этого уравнения запишется в виде

$$y = \bar{y} + Y = \frac{3}{2} e^x \cdot x^2 + x + 3 + e^x (C_1 x + C_2).$$

3. Приложение линейных дифференциальных уравнений второго порядка к изучению механических и электрических колебаний

Рассмотрим следующую задачу. Материальная точка (груз) массы m , подвешенная к концу пружины, движется по вертикальной прямой. Требуется определить закон движения груза.

Примем, что в положении равновесия вес груза уравновешивается упругой силой пружины. Поместим начало координат в положение равновесия груза, а ось Oy направим вертикально вниз по прямой, вдоль которой движется груз. Положение груза в произвольный момент времени t определяется отклонением y груза от начала координат (рис. 276). Для нахождения закона движения груза надо определить зависимость отклонения y от времени t .

На груз действуют следующие силы.

1) Восстанавливающая сила F_1 , стремящаяся вернуть груз в начальное положение. Сила F_1 направлена вдоль оси Oy , и ее проекция на эту ось пропорциональна отклонению груза от положения равновесия: $F_{1y} = -ky$. Число k называется коэффициентом восстановления ($k > 0$). Знак «минус» в выражении проекции силы F_{1y} указывает на то, что восстанавливающая сила направлена в сторону, противоположную деформации пружины.

2) Сила сопротивления F_2 среды, в которой находится пружина с грузом, направлена противоположно вектору скорости движения груза. Величина силы F_2 , как показывает опыт, пропорциональна величине скорости v груза. Поэтому проекция силы F_2 на ось Oy запишется в виде $F_{2y} = -\lambda v$ (где $\lambda > 0$).

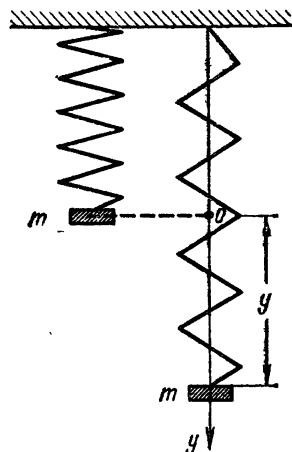


Рис. 276

Силу веса груза мы не учитываем, так как она уравнивается упругой силой пружины, а весом самой пружины пренебрегаем.

Для составления дифференциального уравнения движения груза воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$ma = \sum F. \quad (73)$$

Здесь a — вектор ускорения и $\sum F$ — сумма действующих на материальную точку сил.

В нашем случае на материальную точку (груз) действуют две силы F_1 и F_2 , направленные вдоль оси Oy . Проектируя векторы, стоящие в обеих частях равенства (73), на ось Oy и замечая, что проекция вектора ускорения a на ось Oy равна $\frac{d^2y}{dt^2}$, получаем иско-
мое дифференциальное уравнение

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda \frac{dy}{dt},$$

или

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = 0. \quad (74)$$

Уравнение (74) является уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и называется уравнением *свободных колебаний*.

Если на груз, кроме того, действует внешняя «возмущающая» сила, направленная вдоль оси Oy , величина которой $F(t)$ есть заданная функция времени t , то уравнение (74) принимает вид

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky = F(t) \quad (75)$$

и называется уравнением *вынужденных колебаний*.

Разделив обе части уравнения (75) на m и введя обозначения

$$\frac{\lambda}{m} = 2b, \quad \frac{k}{m} = \omega^2, \quad \frac{F(t)}{m} = f(t),$$

получим уравнение вынужденных колебаний в следующей окончательной форме

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = f(t). \quad (76)$$

Уравнение (76) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка.

Рассмотрим некоторые частные случаи этого уравнения.

1) Пусть отсутствуют сопротивление среды ($b=0$) и внешняя возмущающая сила ($f(t) \equiv 0$). В этом случае уравнение (76) примет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \quad (77)$$

Уравнение (77) является уравнением свободных колебаний груза при отсутствии сопротивления среды. Характеристическое уравнение $k^2 + \omega^2 = 0$ имеет корни $k_1 = +\omega i$, $k_2 = -\omega i$, и общее решение уравнения (77) запишется в форме

$$Y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (78)$$

Введем вместо произвольных постоянных C_1 и C_2 новые произвольные постоянные N и φ , связанные с постоянными C_1 и C_2 соотношениями

$$C_1 = N \sin \varphi, \quad C_2 = N \cos \varphi.$$

Отсюда N и φ выражаются следующим образом:

$$N = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1}{C_2}.$$

Подставляя выражения C_1 и C_2 в равенство (78), получим

$$Y = N \sin \varphi \cos \omega t + N \cos \varphi \sin \omega t = N \sin (\omega t + \varphi).$$

Итак, общее решение уравнения (77) можно представить в виде

$$Y = N \sin (\omega t + \varphi).$$

Эта формула показывает, что груз совершает простое периодическое движение, которое называется *гармоническим колебанием*. Период колебания $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (см. гл. XI, § 6, п. 1). Величина ω называется *собственной частотой* колебания. Величина N представляет собой наибольшее отклонение груза от положения равновесия и называется *амплитудой* колебания; φ называется *начальной фазой*.

2) Пусть теперь имеет место сопротивление среды ($b \neq 0$), но прежнему отсутствует внешняя возмущающая сила ($f(t) \equiv 0$). В этом случае уравнение (76) имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad (79)$$

Его характеристическое уравнение $k^2 + 2bk + \omega^2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$.

Рассмотрим практически наиболее интересный случай малого сопротивления, когда $b < \omega$. В этом случае корни будут комплексными: $k_{1,2} = -b \pm \tilde{\omega}i$, где $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - b^2}$. Общее решение уравнения (79) имеет вид

$$Y = e^{-bt} (C_1 \cos \tilde{\omega} t + C_2 \sin \tilde{\omega} t) = N e^{-bt} \sin (\tilde{\omega} t + \varphi),$$

где

$$C_1 = N \sin \varphi, \quad C_2 = N \cos \varphi.$$

Отсюда видно, что груз будет совершать колебания, амплитуда которых $N \cdot e^{-bt}$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Такие колебания называются *затухающими*.

Заметим, что при $b > \omega$ корни характеристического уравнения будут действительными и различными. Общее решение уравнения (79) в этом случае имеет вид

$$Y = C_1 e^{(-b + \sqrt{b^2 - \omega^2}) t} + C_2 e^{(-b - \sqrt{b^2 - \omega^2}) t}.$$

В этом случае груз, не совершая колебаний, приближается к положению равновесия (при $t \rightarrow \infty Y \rightarrow 0$). Это же обстоятельство имеет место и при $b = \omega$.

3) Рассмотрим теперь случай, когда сопротивление среды отсутствует ($b=0$), но на груз действует внешняя периодическая возмущающая сила $f(t)=a \sin \mu t$. В этом случае уравнение движения (76) примет вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = a \sin \mu t. \quad (80)$$

Общее решение этого уравнения, как известно, есть сумма частного решения $\bar{y}$ неоднородного уравнения (80) и общего решения Y соответствующего однородного уравнения (77)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0.$$

Общее решение уравнения (77) было найдено выше и имело вид

$$Y = N \sin (\omega t + \varphi).$$

Найдем теперь частное решение уравнения (80).

Допустим сначала, что частота μ внешней периодической возмущающей силы отлична от собственной частоты колебаний ω . Так как в этом случае μi не является корнем характеристического уравнения $k^2 + \omega^2 = 0$, то согласно правилу п. 2 этого параграфа частное решение $\bar{y}$ следует искать в форме

$$\bar{y} = A \sin \mu t + B \cos \mu t.$$

Дифференцируя $\bar{y}$ два раза и подставляя выражения для $\bar{y}$ и $\frac{d^2 y}{dt^2}$ в уравнение (80), найдем выражение для коэффициентов A и B :

$$A = \frac{a}{\omega^2 - \mu^2}, \quad B = 0.$$

Таким образом, частное решение уравнения (80) будет иметь вид

$$\bar{y} = \frac{a}{\omega^2 - \mu^2} \sin \omega t,$$

а общее решение этого уравнения

$$y = \bar{y} + Y = \frac{a}{\omega^2 - \mu^2} \sin \omega t + N \sin (\omega t + \varphi). \quad (81)$$

Из формул (81) следует, что если частота μ внешней возмущающей силы близка к собственной частоте колебаний пружины ω , то разность $\omega^2 - \mu^2$ близка к нулю и амплитуда колебания резко возрастает.

Если же частота μ внешней возмущающей силы совпадает с собственной частотой ω , то формула (81) становится неприменимой.

Так как при этом $\mu i = \omega i$ является корнем характеристического уравнения $k^2 + \omega^2 = 0$, то согласно правилу п. 2 частное решение уравнения (80) в этом случае следует искать в форме

$$\bar{y} = (A \sin \mu t + B \cos \mu t) \cdot t.$$

Подставляя $\bar{y}$ и $\frac{d^2\bar{y}}{dt^2}$ в уравнение (80) и учитывая, что $\mu = \omega$, найдем значения коэффициентов A и B :

$$A = 0, \quad B = -\frac{a}{2\omega}.$$

Поэтому частное решение $\bar{y}$ будет иметь вид

$$\bar{y} = -\frac{at}{2\omega} \cos \omega t.$$

Общее решение уравнения (80) запишется следующим образом:

$$y = Y + \bar{y} = N \sin(\omega t + \varphi) - \frac{at}{2\omega} \cos \omega t.$$

Наличие множителя t во втором члене указывает на то, что амплитуда колебания с течением времени неограниченно возрастает.

График функции $\frac{at}{2\omega} \cos \omega t$ изображен на рис. 277 для случая $a=2$,

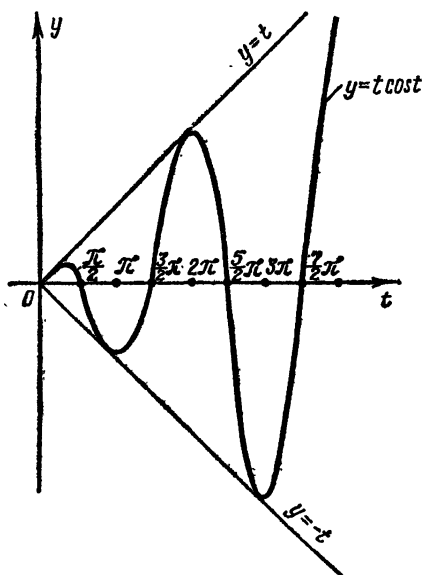


Рис. 277

$\omega = 1$. В этом случае говорят, что имеет место *резонанс*. Итак, резонанс при колебательном движении наступает в том случае, если собственная частота колебаний совпадает с частотой внешней силы.

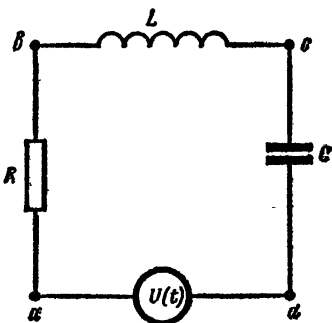


Рис. 278

К линейным дифференциальным уравнениям второго порядка приводят также явления, связанные с изменением силы тока в цепи.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из омического сопротивления R , самоиндукции L , емкости C , к которой подключен источник электродвижущей силы, изменяющейся с течением времени по известному закону: $U = U(t)$ (рис. 278). Определим, как изменяется сила тока в цепи $I = I(t)$ в зависимости от времени t . Обозначим через U_{ab} , U_{bc} , U_{cd} падения напряжения соответственно на участках ab , bc , cd цепи. Так как в замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжения равна электродвижущей

силе, то

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} = U(t).$$

Из физики известно, что

$$U_{ab} = R \cdot I(t) \quad (\text{закон Ома}),$$

$$U_{bc} = L \cdot \frac{dI(t)}{dt}, \quad U_{cd} = \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt.$$

Поэтому

$$R \cdot I(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt = U(t).$$

Дифференцируя по t обе части последнего равенства, получим

$$R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} = U'(t),$$

или

$$I'' + \frac{R}{L} I' + \frac{I}{LC} = \frac{U'}{L}.$$

Таким образом, искомая сила тока I в цепи является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если внешняя электродвижущая сила U постоянна (в частности равна нулю), то $U' = 0$, и мы приходим к линейному дифференциальному уравнению без правой части

$$I'' + \frac{R}{L} I' + \frac{I}{LC} = 0.$$

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В этом параграфе мы очень кратко рассмотрим линейные дифференциальные уравнения высших порядков. При этом доказательства свойств решений этих уравнений приводиться не будут, так как они аналогичны соответствующим доказательствам для уравнений второго порядка.

1. Определения и общие свойства

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_n(x) y = f(x) \quad (82)$$

называется *линейным дифференциальным уравнением n -го порядка*.

Здесь коэффициенты $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $\dots$, $a_n(x)$ и свободный член $f(x)$ — заданные функции аргумента x .

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение принимает вид

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_n(x) y = 0 \quad (83)$$

и называется *линейным однородным уравнением* (или уравнением без правой части). Если же $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение называется *неоднородным уравнением* (или уравнением с правой частью).

Теорема существования и единственности решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка формулируется аналогично теореме существования и единственности решения для линейного уравнения второго порядка.

Теорема. Если коэффициенты $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ и правая часть $f(x)$ линейного уравнения (82) непрерывны на интервале (α, β) , причем коэффициент $a_0(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала, то каковы бы ни были начальные условия $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$, $y''|_{x=x_0} = y''_0$, ..., $y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$ ($\alpha < x_0 < \beta$), существует единственное решение уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, ..., $y_n(x)$ — n каких-либо частных решений однородного линейного уравнения (83). Определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & y'_3(x) & \dots & y'_n(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) & y''_3(x) & \dots & y''_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & y_3^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (84)$$

называется *определителем Вронского*.

Определение. Частные решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ однородного линейного дифференциального уравнения n -го порядка образуют фундаментальную систему частных решений на некотором интервале (α, β) , если ни в одной точке этого интервала определитель Вронского $W(x)$ не обращается в нуль.

Как и в случае линейных уравнений второго порядка, для линейных уравнений n -го порядка имеют место следующие теоремы о структуре общего решения.

Теорема 1. Если $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $y = y_3(x)$, ..., $y = y_n(x)$ — частные решения однородного линейного уравнения n -го порядка (83), образующие на интервале (α, β) фундаментальную систему частных решений, то общее решение этого уравнения имеет вид

$$Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) + \dots + C_n y_n(x). \quad (85)$$

Теорема 2. Если $\bar{y}$ — частное решение линейного неоднородного уравнения (82), а Y — общее решение соответствующего однородного уравнения (83), то функция $y = \bar{y} + Y$ является общим решением неоднородного дифференциального уравнения (82).

2. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

Определение. Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x). \quad (86)$$

Здесь коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ — некоторые числа.

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \quad (87)$$

Будем искать решение уравнения (87) в виде $y = e^{kx}$. Подставляя эту функцию в данное уравнение и сокращая на общий множитель $e^{kx} \neq 0$, получим алгебраическое уравнение

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0, \quad (88)$$

из которого определяются те значения k , при которых функция $y = e^{kx}$ является решением уравнения (87). Алгебраическое уравнение (88) называется *характеристическим уравнением* для линейного дифференциального уравнения (87).

Уравнение (88) n -й степени и поэтому имеет n корней. Можно показать, что:

1) любому действительному корню k_1 характеристического уравнения, имеющему кратность r ($k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_r$), соответствует r частных решений:

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = x e^{k_1 x}, y_3 = x^2 e^{k_1 x}, \dots, y_r = x^{r-1} e^{k_1 x};$$

2) любой паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, каждый из которых имеет кратность r , соответствует $2r$ частных решений:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, y_r = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ y_{r+1} = e^{\alpha x} \sin \beta x, y_{r+2} = x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, y_{2r} = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Число таких решений, соответствующих всем действительным и комплексным корням характеристического уравнения (88), равно n . Эти решения, как можно показать, образуют фундаментальную систему частных решений.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y^V - y^{IV} - y''' + y'' = 0.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^5 - k^4 - k^3 + k^2 = 0.$$

Решаем его, разлагая левую часть на множители:

$$k^5 - k^4 - k^3 + k^2 = k^2(k^3 - k^2 - k + 1) = k^2[k^2(k-1) - (k-1)] = \\ = k^2(k-1)(k^2 - 1) = k^2(k-1)^2(k+1).$$

Итак, корни характеристического уравнения:

$$k_1 = k_2 = 0, k_3 = k_4 = 1, k_5 = -1.$$

Корню $k_1 = k_2 = 0$ кратности два соответствуют два частных решения $y_1 = e^{0x} = 1$ и $y_2 = x e^{0x} = x$. Корням $k_3 = k_4 = 1$ соответствуют частные решения $y_3 = e^x$ и $y_4 = x e^x$ и, наконец, простому корню $k_5 = -1$ соответствует одно частное решение $y_5 = e^{-x}$. Все эти част-

ные решения образуют фундаментальную систему. Поэтому общее решение имеет вид

$$Y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 x e^x + C_5 e^{-x}.$$

Рассмотрим теперь линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x). \quad (89)$$

Как мы знаем, общее решение этого уравнения является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения (83) и частного решения неоднородного уравнения (89).

Нахождение общего решения однородного линейного уравнения было только что рассмотрено.

При отыскании частного решения неоднородного уравнения (89) ограничимся случаем, когда правая часть имеет специальный вид, рассмотренный в § 4, п. 2.

Правила составления формы частного решения неоднородного уравнения остаются при этом дословно такими же, как сформулированные в § 4, п. 2, правила для составления формы частного решения уравнения второго порядка.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y''' + y' = \cos 2x.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$k^3 + k = 0.$$

Его корни $k_1 = 0$, $k_2 = +i$, $k_3 = -i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$Y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Частное решение неоднородного уравнения надо искать в форме

$$\bar{y} = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Дифференцируем $\bar{y}$ три раза:

$$\bar{y}' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x,$$

$$\bar{y}'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x,$$

$$\bar{y}''' = 8A \sin 2x - 8B \cos 2x.$$

Подставляем выражения $\bar{y}'''$ и $\bar{y}'$ в данное уравнение и приводим подобные члены:

$$8A \sin 2x - 8B \cos 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x = \cos 2x,$$

$$6A \sin 2x - 6B \cos 2x = \cos 2x.$$

Приравнявая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях последнего равенства, получим

$$6A = 0, \quad -6B = 1.$$

Отсюда $A = 0$, $B = -\frac{1}{6}$, и частное решение будет иметь вид

$$\bar{y} = -\frac{1}{6} \sin 2x.$$

Общее решение данного уравнения

$$y = \bar{y} + Y = -\frac{1}{6} \sin 2x + C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

В § 1, п. 8 были рассмотрены приближенные методы интегрирования уравнений первого порядка — метод изоклин и метод Эйлера. В этом параграфе будет изложен метод нахождения приближенного решения дифференциального уравнения с помощью рядов. Этот метод пригоден для приближенного решения уравнений любого порядка.

Решение дифференциального уравнения может во многих случаях быть представлено в виде степенного ряда, сходящегося в определенном интервале. Коэффициенты этого ряда можно найти методом, основанным на применении ряда Тейлора.

Пусть требуется найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (90)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Допустим, что решение $y = y(x)$ данного уравнения можно представить в виде степенного ряда (ряда Тейлора):

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0) \frac{x-x_0}{1!} + y''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + y'''(x_0) \frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots \quad (91)$$

Для определения коэффициентов ряда поступим следующим образом. Значения $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$ нам известны из начальных условий. Для нахождения $y''(x_0)$ подставим в правую часть уравнения (90) вместо y и y' их значения при $x = x_0$:

$$y''(x_0) = y''_0 = f(x_0, y_0, y'_0). \quad (92)$$

Для определения $y'''(x_0)$ дифференцируем обе части равенства (90) по x и подставляем значения y , y' и y'' при $x = x_0$.

Последовательно получаем

$$y'''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' = \Phi(x, y, y', y''), \quad (93)$$
$$y'''(x_0) = \Phi(x_0, y_0, y'_0, y''_0).$$

Дифференцируя равенство (93) еще раз и подставляя значения y_0 , y'_0 , y''_0 , y'''_0 при $x = x_0$, найдем значение $y^{IV}(x_0)$ и т. д. Найденные значения производных подставляем в ряд Тейлора (91), который дает решение уравнения (90).

Пример. Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного решения уравнения

$$y'' = y \cos x + x,$$

удовлетворяющего начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Ищем решение уравнения в виде ряда Маклорена

$$y = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

Принимая во внимание, что при $x=0$ $y=1$, из данного дифференциального уравнения находим

$$y''(0) = 1 \cdot \cos 0 + 0 = 1.$$

Для нахождения y''' дифференцируем обе части данного уравнения:

$$y''' = y' \cos x - y \sin x + 1;$$

при $x=0$ получим

$$y'''(0) = y'(0) \cdot \cos 0 - y(0) \cdot \sin 0 + 1 = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Подставляя найденные значения производных в ряд, для решения $y(x)$ получим приближенное выражение в виде частичной суммы ряда

$$y(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

З а м е ч а н и е. При применении рядов к приближенному решению дифференциальных уравнений мы не рассматриваем вопрос о том, при каких условиях возможно искать решение в виде степенного ряда. Этот вопрос изучается в специальных курсах дифференциальных уравнений.

§ 7. ПОНЯТИЕ О СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Общие понятия

Во многих задачах математики, физики и техники требуется определить сразу несколько функций, связанных между собой несколькими дифференциальными уравнениями. Совокупность таких уравнений называется *системой дифференциальных уравнений*. В частности, к таким системам приводят задачи, в которых изучается движение тел в пространстве под действием заданных сил.

Пусть, например, по некоторой кривой (L) в пространстве под действием силы F движется материальная точка массы m . Требуется определить закон движения точки, т. е. зависимость координат точки от времени.

Допустим, что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

радиус-вектор движущейся точки. Если переменные координаты точки обозначить через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, то

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}.$$

Скорость и ускорение движущейся точки вычисляется по формулам:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k},$$
$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k}$$

(см. гл. VI, § 5, п. 4).

Сила F , под действием которой движется точка, вообще говоря, является функцией времени, координат точки и проекций скорости на оси координат:

$$\mathbf{F} = F_x \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \mathbf{i} + F_y \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \mathbf{j} + F_z \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \mathbf{k}.$$

На основании второго закона Ньютона уравнение движения точки записывается следующим образом: $ma = F$.

Проектируя векторы, стоящие в левой и правой частях этого равенства, на оси координат, получим три дифференциальных уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right). \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Эти дифференциальные уравнения представляют собой систему трех дифференциальных уравнений второго порядка* относительно трех искомых функций: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

В дальнейшем мы ограничимся изучением только системы уравнений первого порядка специального вида относительно искомых функций $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x)$. Эта система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n). \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Система уравнений (95) называется *системой в нормальной форме*, или *нормальной системой*.

В нормальной системе правые части уравнений не содержат производных искомых функций.

Решением системы (95) называется совокупность функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, ..., $y_n(x)$, удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

* Порядком системы дифференциальных уравнений называется наивысший из порядков уравнений, входящих в эту систему.

Системы уравнений второго, третьего и более высоких порядков можно свести к нормальной системе, если ввести новые искомые функции. Так, например, систему (94) можно преобразовать в нормальную форму следующим образом. Введем новые функции $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$, положив $u(t) = \frac{dx}{dt}$, $v(t) = \frac{dy}{dt}$, $w(t) = \frac{dz}{dt}$. Тогда $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dw}{dt}$, и система уравнений (94) запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{m} F_x(t, x, y, z, u, v, w), \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m} F_y(t, x, y, z, u, v, w), \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{1}{m} F_z(t, x, y, z, u, v, w), \\ \frac{dx}{dt} &= u(t), \\ \frac{dy}{dt} &= v(t), \\ \frac{dz}{dt} &= w(t). \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Система (96) является нормальной.

Рассмотрим, например, нормальную систему из трех уравнений с тремя неизвестными функциями x , y , z :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(t, x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Для нормальной системы дифференциальных уравнений теорема Коши существования и единственности решения формулируется следующим образом.

Теорема. Пусть правые части уравнений системы (97), т. е. функции $f_i(t, x, y, z)$ ($i = 1, 2, 3$) непрерывны по всем переменным в некоторой области G и имеют в ней непрерывные частные производные: $\frac{\partial f_i}{\partial x}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y}$, $\frac{\partial f_i}{\partial z}$. Тогда каковы бы ни были значения t_0 , x_0 , y_0 , z_0 , принадлежащие области G , существует единственное решение системы $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0. \quad (98)$$

Для интегрирования системы (97) можно применить метод, с помощью которого данная система, содержащая три уравнения относительно трех искомых функций, сводится к одному уравнению третьего порядка относительно одной неизвестной функции. Покажем на примере применение этого метода. Для простоты ограничимся

системой из двух уравнений. Пусть дана система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -7x + y, \\ \frac{dy}{dt} &= -2x - 5y. \end{aligned} \right\}$$

Для нахождения решения системы поступаем следующим образом. Дифференцируя первое из уравнений системы по t , находим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7 \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Подставляя в это равенство выражение $\frac{dy}{dt}$ из второго уравнения системы, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7 \frac{dx}{dt} + (-2x - 5y).$$

Заменяя, наконец, функцию y ее выражением из первого уравнения системы

$$y = \frac{dx}{dt} + 7x, \quad (*)$$

получим линейное однородное уравнение второго порядка относительно одной неизвестной функции:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -7 \frac{dx}{dt} - 2x - 5 \left(\frac{dx}{dt} + 7x \right),$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 12 \frac{dx}{dt} + 37x = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим его общее решение

$$x = e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t). \quad (**)$$

Дифференцируя равенство (**), находим

$$\frac{dx}{dt} = -6e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t} (-C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

Подставляя выражения для x и $\frac{dx}{dt}$ в равенство (*) и приводя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} y &= -6e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t} (-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + \\ &+ 7e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t) = e^{-6t} [(C_2 + C_1) \cos t + \\ &+ (C_2 - C_1) \sin t]. \end{aligned}$$

Функции

$$\begin{aligned} x &= e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y &= e^{-6t} [(C_2 + C_1) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t] \end{aligned} \quad (***)$$

являются решением данной системы.

Итак, интегрируя нормальную систему двух дифференциальных уравнений, мы получили ее решение, зависящее от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 . Можно показать, что и в общем случае для

нормальной системы, состоящей из n уравнений, ее общее решение будет зависеть от n произвольных постоянных. Так, для нормальной системы из трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(t, x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(t, x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(t, x, y, z) \end{aligned} \right\}$$

общее решение зависит от трех произвольных постоянных C_1, C_2, C_3 и имеет вид

$$x = x(t, C_1, C_2, C_3), \quad y = y(t, C_1, C_2, C_3), \quad z = z(t, C_1, C_2, C_3).$$

Для выделения частного решения задаются начальные условия:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0,$$

и постоянные C_1, C_2, C_3 определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} x(t_0, C_1, C_2, C_3) &= x_0, \\ y(t_0, C_1, C_2, C_3) &= y_0, \\ z(t_0, C_1, C_2, C_3) &= z_0. \end{aligned} \right\}$$

В качестве примера выделим из полученного выше общего решения (***)

$$\begin{aligned} x &= e^{-6t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y &= e^{-6t} [(C_2 + C_1) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t] \end{aligned}$$

частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

При начальных условиях из решения (***) получаем систему уравнений для определения постоянных C_1 и C_2 :

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0, \\ 1 &= (C_2 + C_1) \cdot 1 + (C_2 - C_1) \cdot 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда $C_1 = 0, C_2 = 1$.

Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$\begin{aligned} x &= e^{-6t} \sin t, \\ y &= e^{-6t} (\cos t + \sin t). \end{aligned}$$

2. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Кроме рассмотренного метода интегрирования нормальной системы уравнений, мы укажем сейчас еще один метод, применимый только к нормальным системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть дана нормальная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для простоты ограничимся системой трех уравнений с тремя неизвестными функциями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Будем искать частное решение этой системы в виде

$$x = \alpha e^{kt}, \quad y = \beta e^{kt}, \quad z = \gamma e^{kt}. \quad (100)$$

Мы должны определить коэффициенты α , β , γ и показатель степени k так, чтобы функции (100) были решением системы (99). Подставляя эти функции в систему (99) и сокращая на множитель $e^{kt} \neq 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} k\alpha &= a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ k\beta &= a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ k\gamma &= a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma. \end{aligned} \right\}$$

Переносим все члены в одну сторону, получим следующую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных α , β , γ :

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma &= 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma &= 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Система (101) является однородной системой уравнений. Как известно (см. гл. III, § 2, п. 4), для того чтобы однородная система имела отличные от нуля решения, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы равнялся нулю. Таким образом, для того чтобы система (101) имела отличные от нуля решения, должно иметь место равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (102)$$

Равенство (102) представляет собой уравнение третьей степени относительно k и называется *характеристическим уравнением* для системы (99). Ограничимся случаем, когда характеристическое уравнение имеет различные действительные корни k_1 , k_2 , k_3 . Для каждого из этих корней напомним соответствующую систему уравнений (101) и определим коэффициенты α_1 , β_1 , γ_1 ; α_2 , β_2 , γ_2 ; α_3 , β_3 , γ_3 . Если обозначить частные решения системы, соответствующие корню характеристического уравнения k_1 , через x_1 , y_1 , z_1 ; соответствующие корню k_2 — через x_2 , y_2 , z_2 и корню k_3 — через x_3 , y_3 , z_3 , то, как можно показать, общее решение системы дифференциальных уравнений (99) запишется в виде

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3, \\y(t) &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3, \\z(t) &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3,\end{aligned}$$

или в виде

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 \alpha_1 e^{k_1 t} + C_2 \alpha_2 e^{k_2 t} + C_3 \alpha_3 e^{k_3 t}, \\y(t) &= C_1 \beta_1 e^{k_1 t} + C_2 \beta_2 e^{k_2 t} + C_3 \beta_3 e^{k_3 t}, \\z(t) &= C_1 \gamma_1 e^{k_1 t} + C_2 \gamma_2 e^{k_2 t} + C_3 \gamma_3 e^{k_3 t}.\end{aligned}\tag{103}$$

Пример. Найти общее решение системы

$$\left. \begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x.\end{aligned}\right\}\tag{*}$$

Решение. Характеристическое уравнение (102), соответствующее данной системе дифференциальных уравнений, имеет вид

$$\begin{vmatrix} -2-k & -3 \\ -1 & 0-k \end{vmatrix} = 0,$$

или $k^2 + 2k - 3 = 0$. Его корни $k_1 = -3$, $k_2 = 1$. Частные решения системы (*) будем искать в виде

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_1 e^{k_1 t}, & x_2 &= \alpha_2 e^{k_2 t}, \\ y_1 &= \beta_1 e^{k_1 t}, & y_2 &= \beta_2 e^{k_2 t}.\end{aligned}$$

Система уравнений (101) для определения α и β при $k_1 = -3$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned}[-2 - (-3)] \alpha_1 - 3\beta_1 &= 0, \\ -\alpha_1 + [0 - (-3)] \beta_1 &= 0,\end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned}\alpha_1 - 3\beta_1 &= 0, \\ -\alpha_1 + 3\beta_1 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений, так как второе уравнение есть следствие первого. Полагая, например, $\beta_1 = 1$, находим $\alpha_1 = 3$. Итак, корню характеристического уравнения $k_1 = -3$ соответствуют частные решения $x_1 = 3e^{-3t}$ и $y_1 = e^{-3t}$.

Система уравнений (101) для определения α и β при $k = 1$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned}-3\alpha_2 - 3\beta_2 &= 0, \\ -\alpha_2 - \beta_2 &= 0.\end{aligned}\right\}$$

В качестве решений этой системы можно взять $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = -1$. Тогда корню характеристического уравнения $k = 1$ соответствуют частные решения $x_2 = e^t$ и $y_2 = -e^t$.

Общее решение данной системы (*), согласно формуле (103), запишется в виде:

$$\begin{aligned}x(t) &= 3C_1 e^{-3t} + C_2 e^t, \\ y(t) &= C_1 e^{-3t} - C_2 e^t.\end{aligned}$$

Если среди корней характеристического уравнения (102) имеются комплексные, то соответствующие им частные решения преобразуются по формулам Эйлера подобно тому, как это делалось для одного линейного уравнения (см. § 4, п.1).

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА НЬЮТОНА

В гл. VI, § 9 была поставлена задача интерполирования и выведена интерполяционная формула Лагранжа. Однако во многих случаях удобнее пользоваться записью интерполяционного многочлена в другой форме—в форме Ньютона. Прежде чем выводить интерполяционную формулу Ньютона, дадим некоторые общие понятия.

1. Разности и их свойства

Пусть дана функция $y=f(x)$. Рассмотрим ряд равноотстоящих значений независимой переменной x : $x_0, x_1, \dots, x_n$, образующих арифметическую прогрессию с разностью h : $x_0, x_1=x_0+h, x_2=x_0+2h, \dots, x_n=x_0+nh$. Пусть $y_0, y_1, \dots, y_n$ —значения функции $y=f(x)$ соответственно в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$y_k = f(x_k) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n).$$

Величины

$$y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0), \quad y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1), \\ \dots, \quad y_n - y_{n-1} = f(x_n) - f(x_{n-1})$$

называются *разностями первого порядка*, или *первыми разностями*, и обозначаются соответственно через $\Delta y_0, \Delta y_1, \dots, \Delta y_{n-1}$ или $\Delta f(x_0), \Delta f(x_1), \dots, \Delta f(x_n)$. Таким образом,

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \dots, \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \quad \dots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Разности

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \quad \dots, \quad \Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k, \quad \dots, \quad \Delta^2 y_{n-2} = \\ = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$$

называются *разностями второго порядка*, или *вторыми разностями*.

Аналогично определяются разности третьего порядка

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \quad \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1, \quad \dots$$

и вообще разности порядка p :

$$\Delta^p y_k = \Delta^{p-1} y_{k+1} - \Delta^{p-1} y_k \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

Все разности можно расположить в виде таблицы.

Таблица 1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	...
x_0	y_0					
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δy_0				
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$			
$x_3 = x_0 + 3h$	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	
$x_4 = x_0 + 4h$	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	...
$x_5 = x_0 + 5h$	y_5	Δy_4	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$	...
$x_6 = x_0 + 6h$	y_6	Δy_5	$\Delta^2 y_4$	$\Delta^3 y_3$		
...	...	...	...	...	...	...

Табл. 1 называется *диагональной таблицей разностей* с шагом h . В каждом столбце этой таблицы разности записываются между соответствующими значениями уменьшаемого и вычитаемого.

Пример 1. Составить диагональную таблицу разностей с шагом $h=1$ для функции $y=x^5$, считая $x_0=-4$.

Решение приведено в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
—4	—1024						
		781					
—3	—243		—570				
		211		390			
—2	—32		—180		—240		
		31		150		120	
—1	—1		—30		—120		0
		1		30		120	
0	0		0		0		0
		1		30		120	
1	1		30		120		0
		31		150		120	
2	32		180		240		0
		211		390		120	
3	243		570		360		
		781		750			
4	1024		1320				
		2101					
5	3125						

Укажем следующие очевидные свойства разностей.

1. Разность постоянной равна нулю, т. е. $\Delta c=0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак разности, т. е.

$$\Delta kf(x) = k\Delta f(x).$$

3. Разность суммы нескольких функций равна сумме разностей этих функций,

$$\text{т. е. } \Delta [f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x).$$

Предлагаем эти свойства доказать читателю.

Рассмотрим первую разность степенной функции $y=x^n$

$$\Delta(x^n) = (x+h)^n - x^n.$$

По формуле бинома Ньютона (см. сноску на стр. 184)

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n.$$

Следовательно,

$$\Delta(x^n) = nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n.$$

Таким образом, разность степенной функции $y=x^n$ есть многочлен степени $n-1$ с коэффициентом nh при x^{n-1} . В частности, $\Delta(x^2)$ есть многочлен первой степени, а $\Delta(x)$ — многочлен нулевой степени, т. е. постоянная ($\Delta x = (x+h) - x = h$).

Рассмотрим теперь многочлен степени n

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Найдем его первую разность. Используя свойства разностей, получим

$$\Delta P_n(x) = a_0\Delta(x^n) + a_1\Delta(x^{n-1}) + \dots + a_{n-1}\Delta x + \Delta(a_n).$$

Согласно предыдущему, $\Delta(x^n)$ есть многочлен степени $n-1$, $\Delta(x^{n-1})$ — многочлен степени $n-2$, ..., $\Delta(x)$ — постоянная, $\Delta(a_n)=0$. Следовательно, $\Delta P_n(x)$ есть многочлен степени $n-1$ с коэффициентом при старшей степени, равным a_0nh :

$$\Delta P_n(x) = a_0nhx^{n-1} + a'_1x^{n-2} + \dots + a'_{n-2}x + a'_{n-1}.$$

Взяв разность от первой разности $\Delta P_n(x)$, получим разность второго порядка $\Delta^2 P_n(x) = \Delta[\Delta P_n(x)]$, которая согласно предыдущему будет многочленом степени $n-2$.

Таким образом, степень каждой последующей разности уменьшается на единицу. Следовательно, разность n -го порядка будет многочленом нулевой степени, т. е. постоянной. Очевидно, все последующие разности равны нулю.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Разность n -го порядка многочлена n -й степени при условии, что переменная x получает равные приращения h , есть величина постоянная. Все последующие разности равны нулю.

Диагональная таблица разностей, составленная для функции $y = x^5$ (см. табл. 2) иллюстрирует эту теорему. Имеет место и обратное предположение, которое мы приводим без доказательства.

Теорема 2. Если разности n -го порядка при условии, что аргумент x получает постоянное приращение h , для некоторой функции постоянны, то эта функция есть многочлен n -й степени.

Теорема 2 имеет большое практическое значение. Она позволяет заменить функцию многочленом, если разности ее какого-либо порядка становятся постоянными или мало отличаются от постоянных.

Пример 2. Рассмотрим таблицу значений интеграла вероятностей $\Phi(x) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ и составим разности функции } \Phi(x) \text{ (см. табл. 3)*.}$$

Т а б л и ц а 3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	
0,7	0,2580				
0,8	0,2881	301			
0,9	0,3159	278	—23	—1	
1,0	0,3413	254	—24	0	
1,1	0,3643	230	—24	0	
1,2	0,3849	206			

Мы видим, что вторые разности почти постоянны. Поэтому на рассматриваемом участке данная функция ведет себя приблизительно как многочлен второй степени.

2. Интерполяционная формула Ньютона

Как мы знаем, (см. гл. VI, § 9), задача интерполирования для многочленов формулируется следующим образом: найти многочлен $P_n(x)$ степени n , если известны его значения $y_0, y_1, \dots, y_n$ в узлах интерполяции $x_0, x_1, \dots, x_n$. Как

* Условимся разности записывать в единицах последнего разряда без нулей впереди.

было показано в гл. VI, § 9, эта задача имеет единственное решение. Здесь мы рассмотрим тот частный случай, когда узлы интерполяции равноотстоят друг от друга, т. е. образуют арифметическую прогрессию, разность которой обозначим через h :

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh.$$

Запишем искомый многочлен в виде

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + A_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ \dots + A_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}). \quad (1)$$

Для нахождения коэффициентов $A_0, A_1, \dots, A_n$ будем последовательно подставлять в формулу (1) $x = x_0, x = x_1, x = x_2$ и т. д.

При $x = x_0$ получим $y_0 = P_n(x_0) = A_0$. Итак, $A_0 = y_0$.

При $x = x_1$: $y_1 = P_n(x_1) = A_0 + A_1(x_1 - x_0) = A_0 + A_1h = y_0 + A_1h$. Следовательно, $A_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{1!h}$.

При $x = x_2$: $y_2 = P_n(x_2) = A_0 + A_1(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$. Но $x_2 - x_0 = 2h$; следовательно, $y_2 = A_0 + A_1 \cdot 2h + A_2 \cdot 2h \cdot h$. Подставив вместо A_0 и

A_1 их выражения, получим $y_2 = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot 2h + A_2 \cdot 2h^2$, или $y_2 - y_0 - 2\Delta y_0 = A_2 \cdot 2h^2$.

Так как

$$y_2 - y_0 - 2\Delta y_0 = (y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) - 2\Delta y_0 = \Delta y_1 + \Delta y_0 - 2\Delta y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0,$$

то $\Delta^2 y_0 = A_2 \cdot 2h^2$. Отсюда $A_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$.

Аналогично найдем $A_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}$ и вообще $A_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}$.

Подставляя найденные значения коэффициентов $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ в формулу (1), получим искомый многочлен

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}). \quad (2)$$

Эта формула называется *первой интерполяционной формулой Ньютона*. В частности, при $n=1$ получим многочлен первой степени — линейную интерполяционную формулу:

$$P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0). \quad (3)$$

При $n=2$ получаем параболическую или квадратичную интерполяционную формулу:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1). \quad (4)$$

Интерполяционной формуле Ньютона можно придать несколько другой вид, более удобный для практического применения. Положим $\frac{x - x_0}{h} = t$. Тогда

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - (x_0 + h)}{h} = \frac{x - x_0}{h} - 1 = t - 1; \quad \frac{x - x_2}{h} = \frac{x - (x_0 + 2h)}{h} = \frac{x - x_0}{h} - 2 = t - 2,$$

$$\dots, \quad \frac{x - x_k}{h} = t - k.$$

читывая эти равенства, формулу (2) можно записать в следующем виде:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + ht) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} t(t-1)(t-2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \dots [t-(n-1)]. \quad (5)$$

В частности, формулы (3) и (4) примут вид:

$$P_1(x) = P_1(x_0 + ht) = y_0 + \Delta y_0 t, \quad (6)$$

$$P_2(x) = P_2(x_0 + ht) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1). \quad (7)$$

Предположим теперь, что для некоторой функции $y = f(x)$ разности n -го порядка постоянны или почти постоянны. Это значит, что на некотором отрезке функция $y = f(x)$ ведет себя как многочлен n -й степени (см. п. 1. теорема 2 и пример 2). Заменяя данную функцию интерполяционным многочленом $P_n(x)$, значения которого в узлах интерполяции совпадают со значениями функции $f(x)$, получим приближенное равенство

$$f(x) \approx P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} (x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x-x_0)(x-x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}), \quad (8)$$

или

$$f(x_0 + ht) \approx P_n(x_0 + ht) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1) \dots [t-(n-1)]. \quad (9)$$

Обозначим через $R_n(x)$ разность $f(x) - P_n(x) = R_n(x)$. Эта разность дает погрешность приближения функции интерполяционным многочленом степени n . Доказывается, что

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})(x-x_n) \quad (10)$$

или, полагая $\frac{x-x_0}{h} = t$,

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} t(t-1) \dots (t-n). \quad (11)$$

В частности, для линейной интерполяции ($n=1$) формула (11) примет вид

$$R_1(x) \approx \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1). \quad (12)$$

Формулы (8) или (9) применяют обычно для значений x , лежащих в интервале $x_0 < x < x_1$. Поэтому $0 < t = \frac{x-x_0}{h} < \frac{x_1-x_0}{h} = 1$. Как легко показать, на отрезке $0 < t < 1$ выполняется неравенство $|t(t-1)| \leq \frac{1}{4}$. Поэтому

$$|R_1(x)| \approx \left| \frac{\Delta^2 y_0}{2} \right| \cdot |t(t-1)| \leq \frac{|\Delta^2 y_0|}{8}. \quad (13)$$

Итак, если первые разности почти постоянны, то погрешность линейной интерполяции не превосходит одной восьмой абсолютной величины второй разности. Рассмотрим пример на применение интерполяционной формулы Ньютона.

Пример 3. В табл. 3 приведены значения интеграла вероятностей $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Найти значение $\Phi(x)$ при $x=0,75$.

Решение. Так как вторые разности почти постоянны, то на рассматриваемом участке $\Phi(x)$ ведет себя приблизительно как многочлен второй степени. Поэтому $\Phi(x) \approx P_2(x)$. В частности, $\Phi(0,75) \approx P_2(0,75)$. Так как число 0,75 содержится между 0,7 и 0,8, то принимая за $x_0 \approx 0,7$, из табл. 3 находим $y_0 = 0,2580$, $\Delta y_0 = 0,0301$, $\Delta^2 y_0 = -0,0023$, $h = 0,1$. Учитывая, что $t = \frac{x-x_0}{h} = \frac{0,75-0,7}{0,1} = 0,5$, и применяя формулу (7), найдем

$$\begin{aligned} \Phi(0,75) &\approx P_2(0,75) = 0,2580 + \frac{0,0301}{1} \cdot 0,5 + \frac{(-0,0023)}{2!} \cdot 0,5(0,5-1) = \\ &= 0,2580 + 0,0151 + 0,0003 = 0,2734. \end{aligned}$$

Подсчитаем погрешность приближения, применяя формулу (11) для случая $n=2$:

$$R_2(x) \approx \frac{\Delta^3 y_0}{(2+1)!} t(t-1)(t-2).$$

Так как $\Delta^3 y_0 = -0,0001$, $t=0,5$, то

$$|R_2(0,75)| = \left| \frac{-0,0001}{3!} 0,5(0,5-1)(0,5-2) \right| < 0,00001.$$

Итак, применение интерполяционного многочлена второй степени не вносит погрешности при вычислениях с точностью до пятого знака после запятой.

3. Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования заключается в следующем: дана таблица значений некоторой функции $f(x)$. Требуется найти значение ее производной в некоторой точке.

Суть метода состоит в том, что функция $f(x)$ заменяется интерполяционным многочленом $P_n(x)$ ($f(x) \approx P_n(x)$), который дифференцируем необходимое число раз. При этом, естественно, чем меньше расстояния между узлами интерполяции, тем точнее полученный результат. Если таблица значений функции составлена для равноотстоящих значений аргумента, то следует пользоваться интерполяционной формулой Лагранжа. Если же таблица составлена для равноотстоящих значений аргумента, то пользуются интерполяционными формулами Ньютона.

Пусть, например, функция $f(x)$ заменяется многочленом с помощью интерполяционной формулы Ньютона (см. п. 2):

$$\begin{aligned} f(x) &\approx P_n(x) \approx P(x_0 + th) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} t + \\ &+ \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} t(t-1)(t-2) \dots (t-n+1), \end{aligned} \quad (14)$$

где $t = \frac{x-x_0}{h}$. Здесь функция $f(x)$ заменяется функцией $P_n(x_0 + th)$, в которой независимой переменной является t . По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dP_n}{dt} = \frac{dP_n}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (15)$$

Так как $\frac{dP_n}{dx} \approx f'(x)$, а $\frac{dx}{dt} = h$, то формула (15) запишется в виде $\frac{dP_n}{dt} = f'(x) h$.

Отсюда

$$f'(x) = \frac{1}{h} \frac{dP_n}{dt}. \quad (16)$$

Аналогично найдем, что

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2} \frac{d^2 P_n}{dt^2} \quad (17)$$

и вообще

$$f^{(k)}(x) \approx \frac{1}{h^k} \frac{d^k P_n}{dt^k}.$$

Таким образом, дифференцируя правую часть соотношения (14) и применяя формулы (16) и (17), найдем

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} (2t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} (3t^2-6t+2) + \dots \right], \quad (18)$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} [\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 (t-1) + \dots]. \quad (19)$$

Пример. Найти первую и вторую производные при $x=0,15$ от функции, заданной табл. 4.

Таблица 4

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	2,0000			
0,1	2,1152	1152		
0,2	2,2614	1462	310	13
0,3	2,4399	1785	323	11
0,4	2,6518	2119	334	

Решение. Здесь $x=0,15$. Так как $0,1 < x < 0,2$, то за x_0 берем 0,1. Итак, $x_0=0,1$, $y_0=2,1152$, $\Delta y_0=0,1462$, $\Delta^2 y_0=0,0323$, $\Delta^3 y_0=0,0011$, $h=0,1$, $t = \frac{x-x_0}{h} = \frac{0,15-0,10}{0,1} = 0,5$.

Применяя формулы (18) и (19), получим

$$f'(0,15) = \frac{1}{0,1} \left\{ 0,1462 + \frac{0,0323}{2!} (2 \cdot 0,5 - 1) + \frac{0,0011}{3!} [3 \cdot (0,5)^2 - 6 \cdot 0,5 + 2] \right\} =$$

$$= 10 (0,1462 + 0 - 0,00004) = 1,4616;$$

$$f''(0,15) = \frac{1}{(0,1)^2} [0,0323 + 0,0011 (0,5 - 1)] = 3,17.$$

Итак, $f'(0,15) = 1,4616$, $f''(0,15) = 3,17$.

Табл. 4 составлена для функции $f(x) = e^x + x^2 + 1$. Следовательно, $f'(x) = e^x + 2x$, $f''(x) = e^x + 2$. Значения производных в точке $x=0,15$ с точностью до 0,0001 таковы: $f'(0,15) = 1,4618$, $f''(0,15) = 3,1618$. Следует заметить, что чем выше порядок производной, тем выше порядок разности, с которой начинается формула для производной и, следовательно, тем больше сказываются ошибки в значениях функции. Поэтому вторая производная в нашем примере оказалась вычисленной менее точно.

З а м е ч а н и е. Часто вместо формул (18) и (19) для нахождения производных применяют менее точные формулы:

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{\Delta f(x)}{h}, \\ f''(x) &\approx \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}, \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) &\approx \frac{\Delta^n f(x)}{h^n}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Покажем, например, справедливость первой из формул (20). Из определения производной следует, что $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{h}$. Поэтому при малых h имеет место приближенное равенство $f'(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{h}$. Аналогично проверяется справедливость остальных формул.

П Р И Л О Ж Е Н И Е 2

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть в результате опыта получена таблица значений функции y для ряда значений независимой переменной x :

x	x_1	x_2	x_3	$\dots\dots\dots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\dots\dots\dots$	y_n

Предположим, что точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, ..., $M_n(x_n; y_n)$ примерно располагаются на одной прямой. Это означает, что зависимость между x и y близка к линейной $Y = ax + b$. Подберем неизвестные коэффициенты a и b так, чтобы прямая $Y = ax + b$ лежала по возможности ближе к каждой из нанесенных точек. Назовем отклонением в точке x_i разность $Y_i - y_i$, где $Y_i = ax_i + b$, а y_i — значение функции в точке x_i , полученное из опыта. Сущность метода наименьших квадратов заключается в том, что искомую прямую $Y = ax + b$ выбирают таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений $Y_i - y_i$ была бы наименьшей. Таким образом, неизвестные параметры a и b находят из условия, что сумма $\sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2$, т. е. $\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$, имела бы наименьшее значение. Поскольку x_i и y_i — постоянные числа (данные опыта), то указанная сумма есть функция параметров a и b :

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 = \Phi(a, b).$$

Чтобы найти эти значения параметров a и b , воспользуемся необходимыми условиями экстремума функций нескольких переменных: найдем частные произ-

водные от $\Phi(a, b)$ по a и b и приравняем их к нулю:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) x_i = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} &= 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Следовательно, параметры a и b , для которых осуществляется наилучшее приближение (в указанном смысле), определяется из системы уравнений (1); эту систему можно переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b n &= \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для определения чисел a и b мы получили систему двух уравнений первой степени. Можно доказать, что эта система всегда имеет единственное решение и что для найденных чисел a и b функция $\Phi(a, b)$ достигает минимума.

Подставляя найденные значения a и b в уравнение $Y = ax + b$, получим линейную функцию, наилучшим образом отражающую зависимость между величинами x и y , полученную из опыта.

Если опытные данные таковы, что при нанесении графика они примерно располагаются по квадратной параболе, то можно искать приближенную зависимость в форме

$$Y = ax^2 + bx + c.$$

Для нахождения значений коэффициентов a , b и c нужно найти минимум выражения:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i^2) = \Phi(a, b, c).$$

Нахождение минимума функции трех переменных $\Phi(a, b, c)$ сводится к решению системы трех уравнений первой степени:

$$\left. \begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^3 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + c \cdot n &= \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

из которых определяются неизвестные параметры a , b , c .

Пример. В табл. 1 приведены полученные из опыта значения функции при различных значениях независимой переменной x .

Таблица 1

x	0	1	1,5	2,1	3
y	2,9	6,3	7,9	10,0	13,2

Построив точки, убеждаемся, что они расположены примерно на одной прямой. Это значит, что зависимость между x и y близка к линейной $y = ax + b$. Применяя метод наименьших квадратов, найдем неизвестные параметры a и b .

Т а б л и ц а 2

NN	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_{ϕ}	Δy
1	0	2,9	0,00	0,00	2,86	0,04
2	1,0	6,3	1,00	6,30	6,28	0,02
3	1,5	7,9	2,25	11,85	7,99	0,09
4	2,1	10,0	4,41	21,00	10,04	0,04
5	3,0	13,2	9,00	39,60	13,12	0,08
Σ	7,6	40,3	16,66	78,75		

Вычисления располагаем, как указано в табл. 2 и составляем систему уравнений (2)

$$\left. \begin{aligned} 16,66a + 7,6b &= 78,75, \\ 7,6a + 5b &= 40,3. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, находим $a = 3,42$, $b = 2,86$.

Таким образом,

$$y = 3,42x + 2,86. \quad (4)$$

В табл. 2 в шестом столбце указаны значения y , вычисленные по формуле (4); седьмой столбец содержит абсолютные значения отклонений опытных данных от значений y , вычисленные по формуле (4).

